Лекция 3

Методы решения ЗЛП. Двойственность. Анализ оптимальных решений ЗЛП

Свойства решений ЗЛП

1. Область допустимых значений задачи линейного программирования выпукла

2. Целевая функция ЗЛП достигает своего минимального (максимального) значения в угловой точке многогранника решений. Если целевая функция достигает своего экстремального значения более чем в одной угловой точке многогранника решений, то она достигает того же значения в любой линейной выпуклой комбинации этих угловых точек.

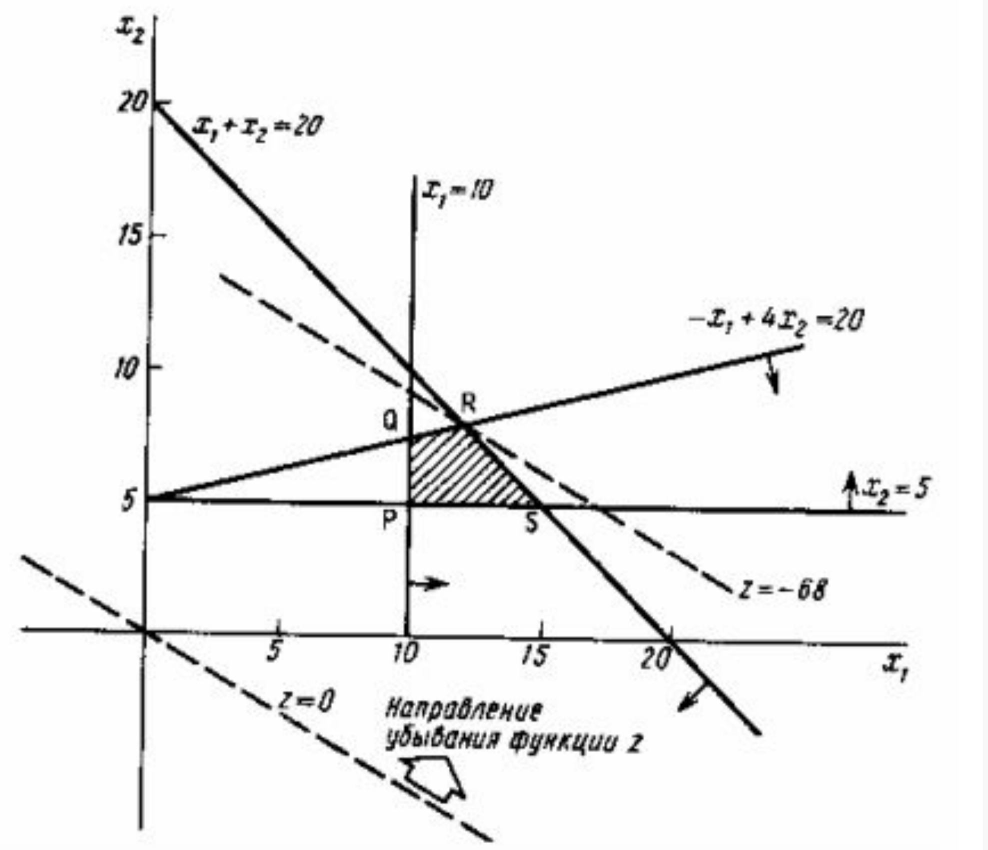
Геометрическая интерпретация

Минимизировать функцию

$$z = -3x_1 - 4x_2$$

при ограничениях $x_1, x_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20, \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 20, \\ x_1 &\geq 10, \\ x_2 &\geq 5. \end{aligned}$$



Симплекс-метод

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, b_i \geq 0, (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}).$$

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	...	c_r	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
				P_1	P_2	...	P_r	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k		P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	...	0	$a_{1\,m+1}$	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	...	0	$a_{2\,m+1}$	...	a_{2k}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b_r	0	0	...	1	...	0	$a_{r\,m+1}$	...	a_{rk}	...	a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	...	0	...	1	$a_{m\,m+1}$	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n

Симплекс-метод

Методы контроля:

1. Z-оценки при базисных переменных равны нулю
2. Значения правой части всегда неотрицательны
3. Значение целевой функции на каждом шаге не ухудшается.

Зацикливание

Зацикливание может возникать при наличии вырожденного опорного решения. Выражается в том, что значение целевой функции на следующем шаге не меняется.

Исследование оптимальных решений

Исследование на устойчивость

Исследование на устойчивость – исследование диапазона изменения правых частей системы ограничений, при котором найденное оптимальное решение не изменяется.

Исследование на чувствительность

При исследовании на чувствительность исследуется зависимость решения ЗЛП от небольших изменений коэффициентов в условии задачи. При этом предыдущее решение может стать либо недопустимым, либо неоптимальным.

- К недопустимости пред. решения могут привести изменения запасов ресурсов и/или добавление новых ограничений.
- К неоптимальности пред. решения могут привести изменение целевой функции и/или изменение технологических коэффициентов и/или включение в модель нового вида производственной деятельности.

Анализ решения ЗЛП

Компания Reddy Mikks производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: M1 и M2. Следующая таблица представляет основные данные для задачи.

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	для наружных работ	для внутренних работ	
Сырье M1	6	4	24
Сырье M2	1	2	6
Доход (в тыс. долл.) на тонну краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на тонну аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить оптимальное (наилучшее) соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

Анализ решения ЗЛП

.

максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$

$$6x_1 + 4x_2 \le 24,$$

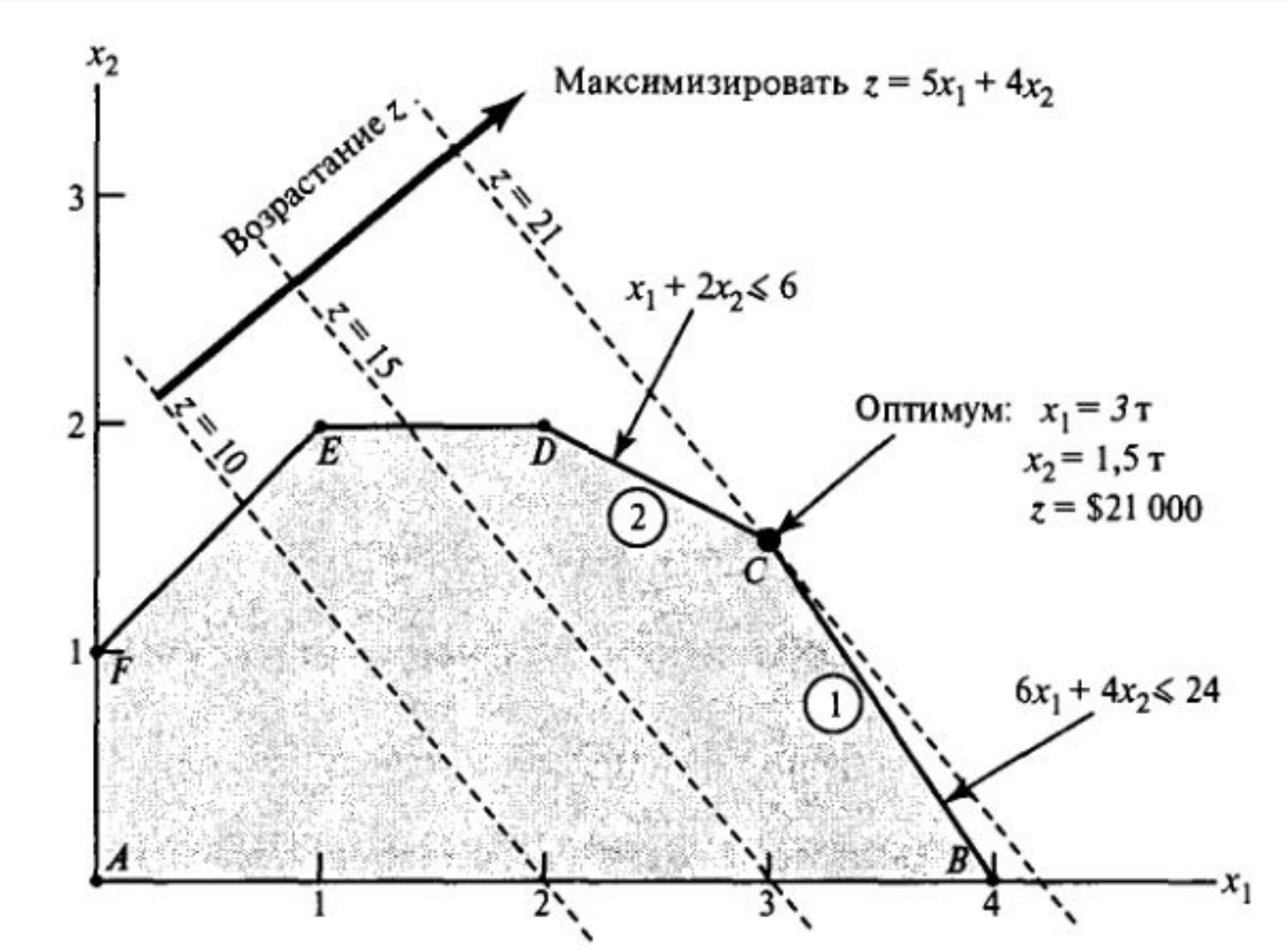
$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$

$$-x_1 + x_2 \le 1,$$

$$x_2 \le 2,$$

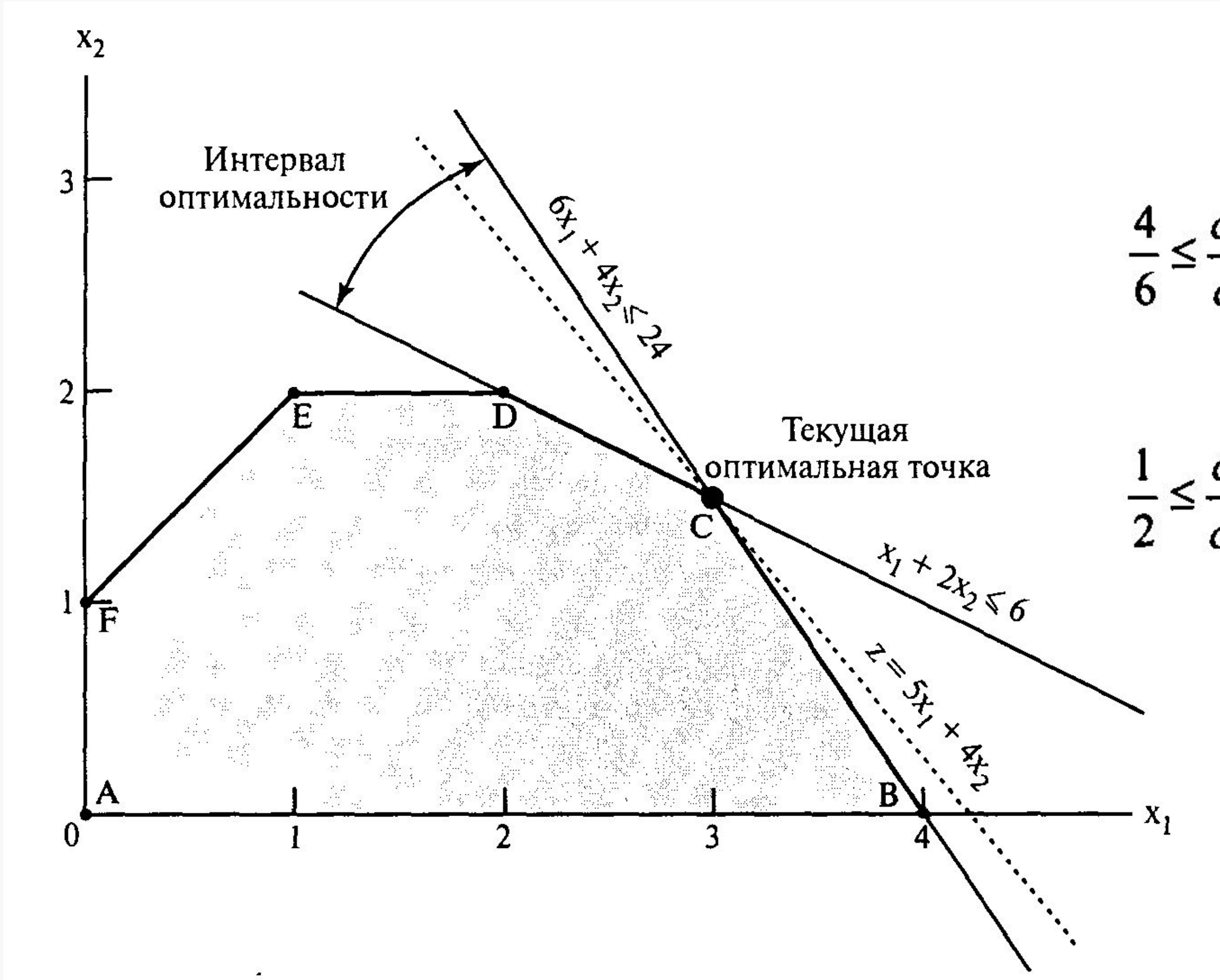
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Анализ решения ЗЛП



Графический анализ чувствительности

Изменение коэффициентов целевой функции



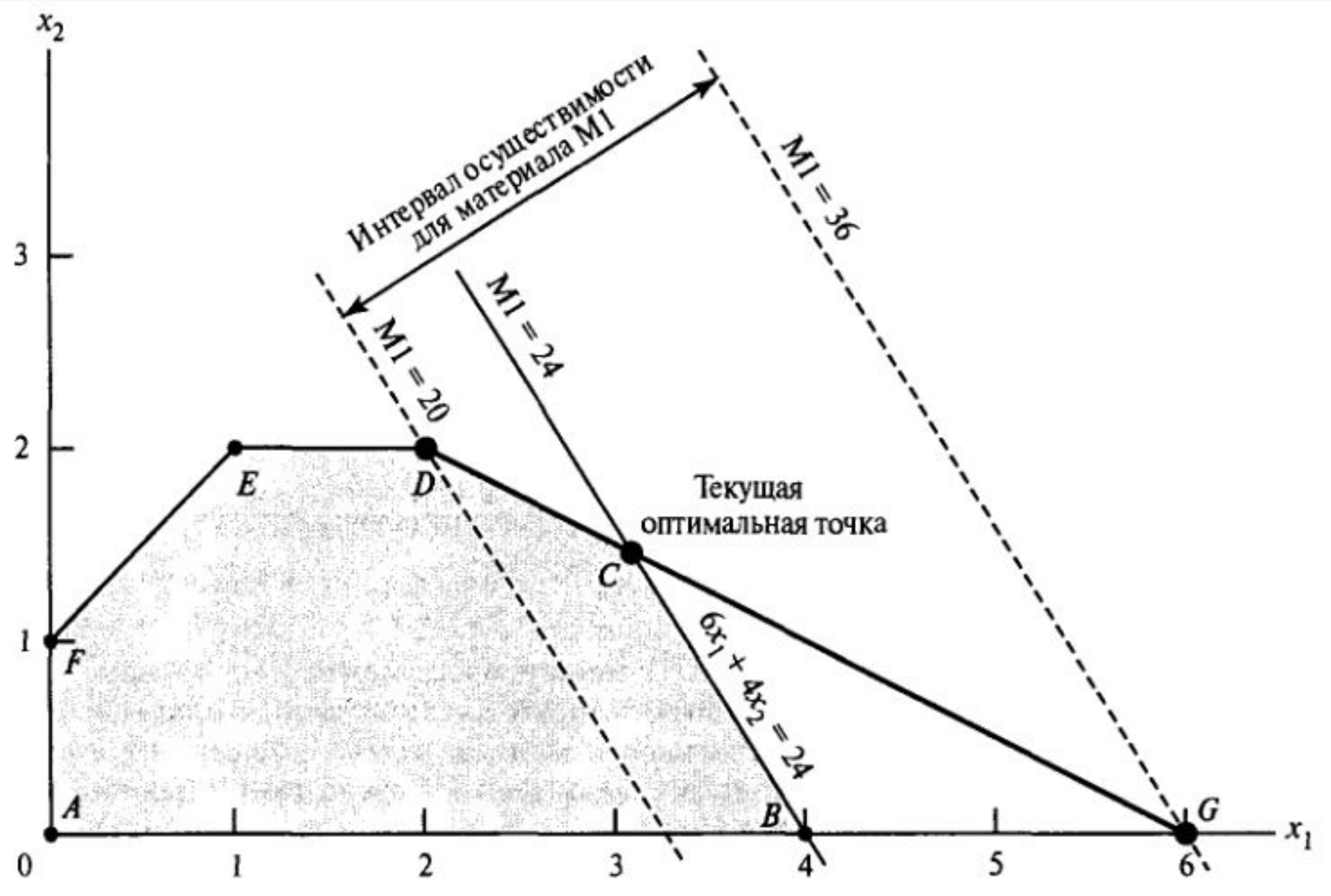
$$\frac{4}{6} \le \frac{c_2}{c_1} \le \frac{2}{1}, \quad c_1 \neq 0,$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{6}{4}, \quad c_2 \neq 0.$$

Графический анализ чувствительности

Доступность ресурсов

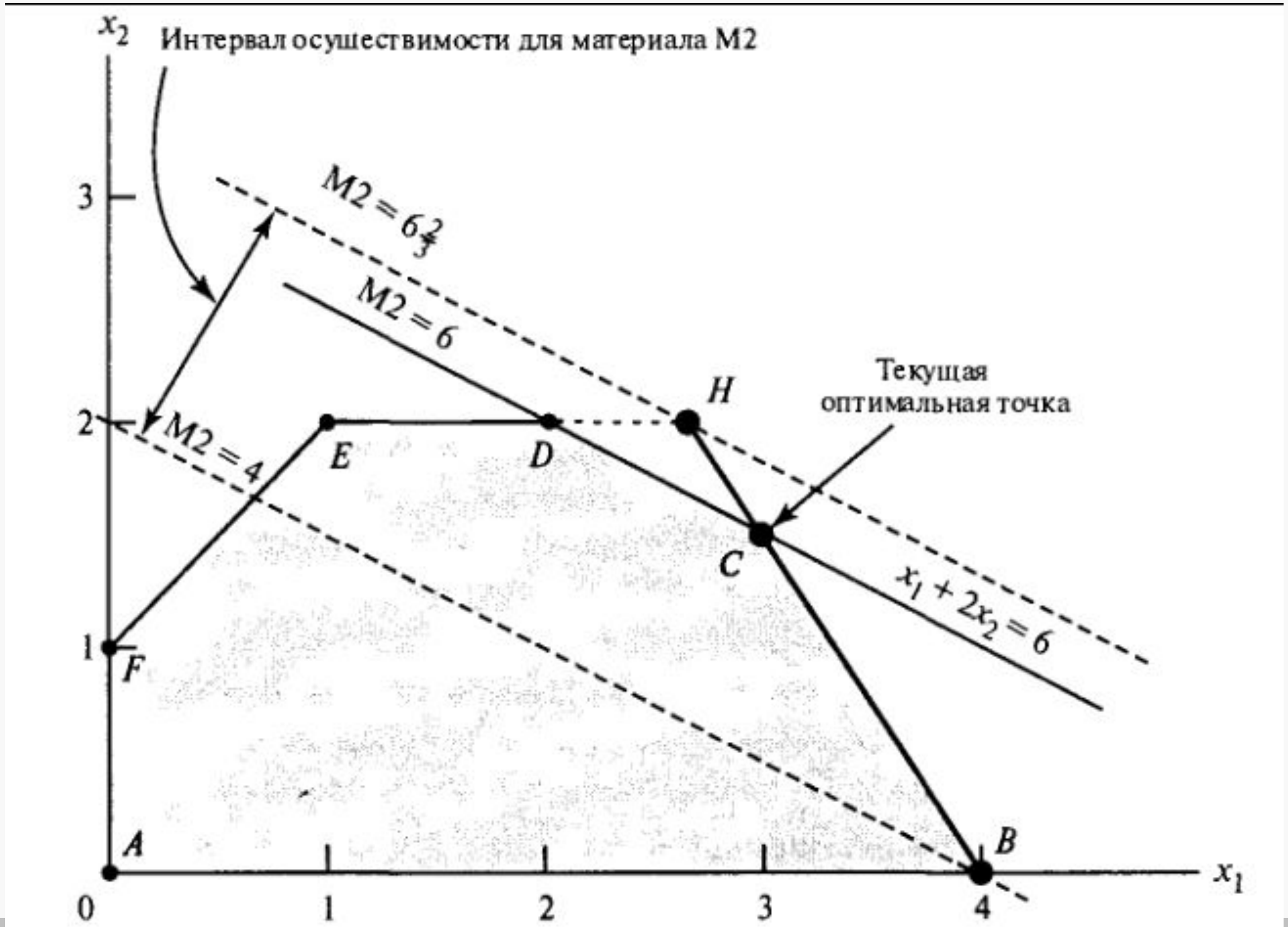
.



Графический анализ чувствительности

Доступность ресурсов

.



Двойственность в линейном программировании

Правила построения двойственных задач:

1. Если в исходной задаче целевая функция исследуется на min, то в двойственной задаче она будет исследоваться на max и наоборот.

2. Если в исходной задаче n переменных и m уравнений, то в двойственной задаче будет m переменных и n уравнений.

3. Коэффициенты целевой функции исходной задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи, а правые части системы ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции исходной задачи.

Двойственность в линейном программировании

4. Матрица ограничений двойственной задачи получается из матрицы ограничений исходной задачи транспонированием.

.

5. Если в исходной задаче $x_k \geq 0,$ то в двойственной задаче *k*-ое ограничение будет неравенством, если же в исходной задаче x_k не имело ограничений на знак, то k-ое ограничение в двойственной задаче будет равенством.

6. Если в исходной задаче l-ое ограничение - неравенство, то в двойственной задаче $y_l \geq 0$; если же в исходной задаче l-ое ограничение - равенство, то в двойственной задаче нет ограничений на знак $y_{i.}$

Пара симметричных двойственных задач.

$$Z = C_1X_1 + \dots + C_nX_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,n})$$

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge C_1 \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge C_n \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \; (i = \overline{1,m})$$

Пары сопряженных переменных.

$$\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_n,}^{\text{Основные}} \qquad \overbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}}^{\text{Дополнительные}}$$

$$\underbrace{y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n},}_{\text{Дополнительные}} \qquad \underbrace{y_1, y_2, \dots, y_m}_{\text{Основные}}$$

Экономический смысл двойственности

Прямая задача
Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$
при ограничениях
$6x_1 + 4x_2 \le 24$ (ресурс 1, сырье М1),
$x_1 + 2x_2 \le 6$ (ресурс 2, сырье М2),
$-x_1 + x_2 \le 1$ (ресурс 3),
$x_2 \le 2$ (ресурс 3),
$x_1, x_2 \ge 0$.
Оптимальное решение:
$x_1 = 3,\ x_2 = 1{,}5,\ z = 21$

Двойственная задача
Минимизировать $w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$
при ограничениях
$6y_1 + y_2 - y_3 \ge 5$,
$4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \ge 4$,
$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$.
Оптимальное решение:
$y_1 = 0{,}75,\ y_2 = 0{,}5,\ y_3 = y_4 = 0,\ w = 21$

Исследование на чувствительность

.

Теорема *В оптимальном плане двойственной задачи значение переменной y_i^* численно равно частной производной функции $F_{max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ по данному аргументу, т. е.*

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i} = y_i^*.$$

Последнее равенство означает, что изменение значений величин b_i приводит к увеличению или уменьшению $F_{max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Экономический смысл двойственности

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$Z = 18y_1 + 16y_2 + \\ + 5y_3 + 21y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

$$F^*_{\max} = Z^*_{\min} = 24$$

Экономический смысл двойственности

Задача 1					
Число единиц продукции		Остатки ресурсов (ед.)			
$x^*_1 = 6$	$x^*_2 = 4$	$x^*_3 = 0$	$x^*_4 = 0$	$x^*_5 = 1$	$x^*_6 = 3$
$y^*_5 = 0$	$y^*_6 = 0$	$y^*_1 = 4/5$	$y^*_2 = 3/5$	$y^*_3 = 0$	$y^*_4 = 0$
Превышение затрат на ресурсы над ценой реализации		Условные цены ресурсов			
Задача 2					

Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются <u>оптимальными двойственными оценками</u> исходной задачи (скрытые доходы).

Они определяют степень дефицитности ресурса.

Метод искусственного базиса

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 5, \\ 3x_1 - 10x_2 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + Mx_3 + Mx_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 10x_2 + x_4 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -10 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Метод искусственного базиса

В результате может быть:

1. Получено оптимальное решение, в котором все искусственные переменные равны нулю. Это и есть оптимальное решение задачи.

2. Получено оптимальное решение, в котором хотя бы одна искусственная переменная осталась в базисе. Это означает, что исходная задача не имеет решения, т.е. ОДЗ пустая.

3. В искусственной задаче видно, что целевая функция не ограничена на ОДЗ.