

Лекция №2

Течение и вязкость жидкостей

1. Течение жидкости, идеальная жидкость. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.

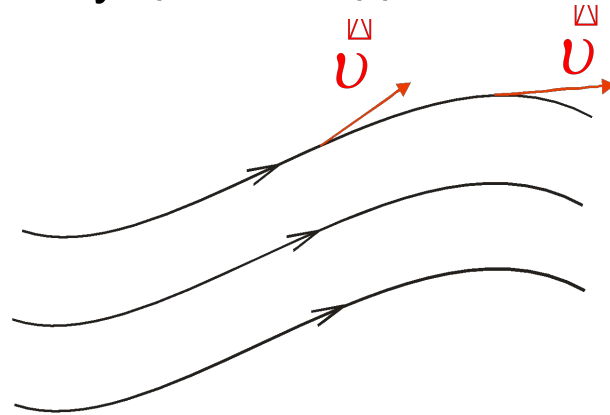
2. Движение вязкой жидкости. Уравнение Ньютона. Формула Пуазейля.

3. Модель кровообращения Франка. Пульсовая волна. Формула Моенса-Кортевега.

1 вопрос - Течение жидкости, идеальная жидкость. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.

Движение жидкостей называется **течением**.

Совокупность частиц движущейся жидкости называется **потоком**.



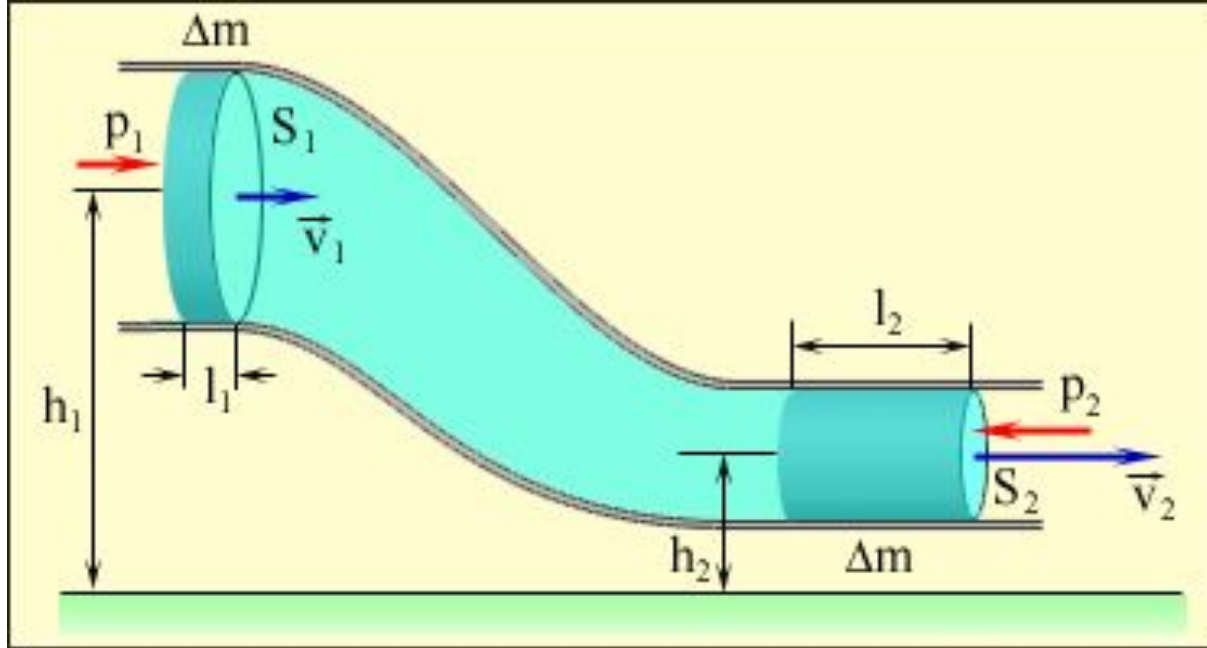
Графически движение жидкостей изображается с **помощью**
линий тока.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется
трубкой тока.

Течение жидкости называется **стационарным**, если форма и расположение линий тока, а также значение скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения, называется **идеальной жидкостью**.

Жидкие среды составляют свыше 90% организма человека



$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

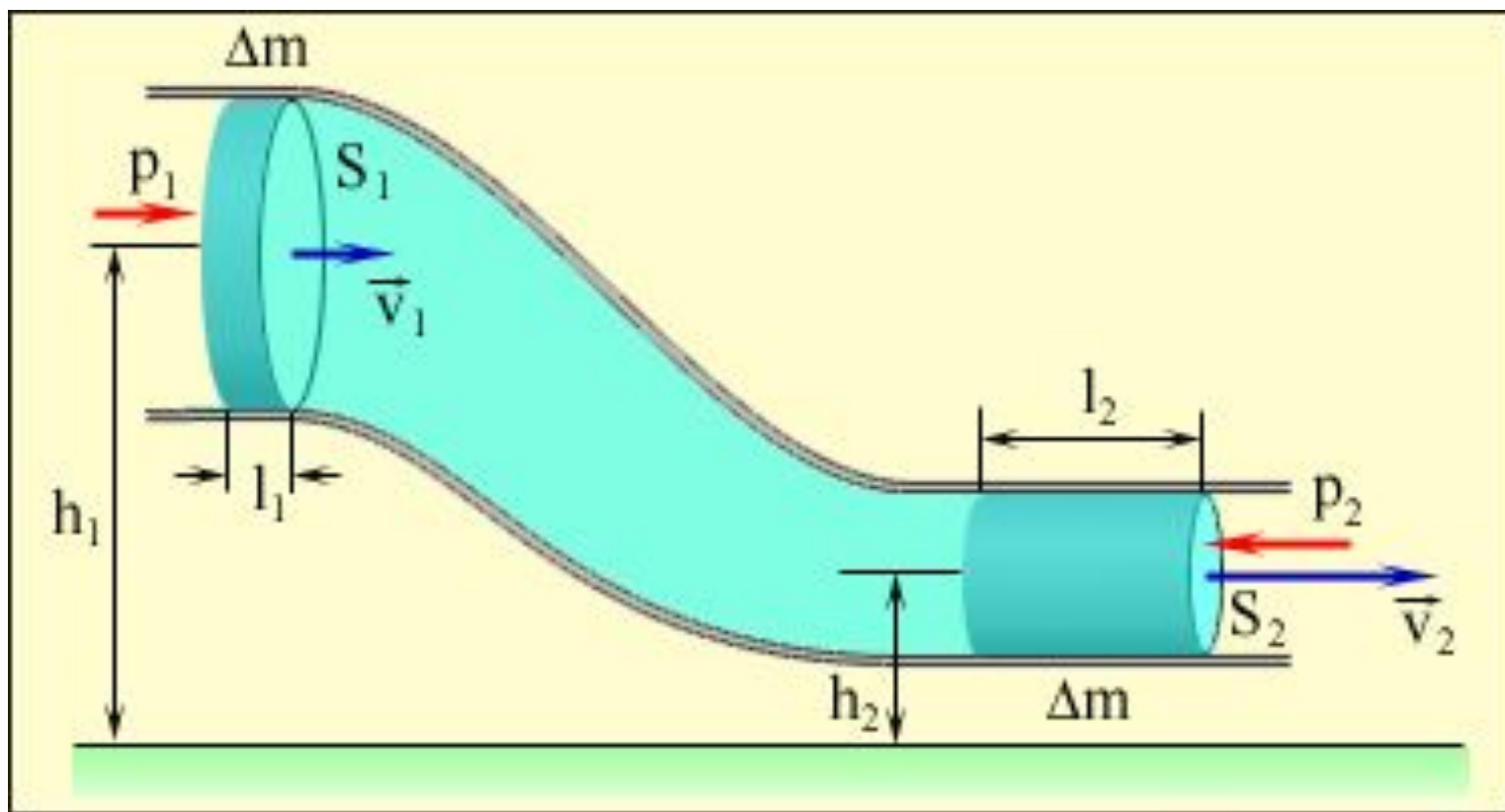
или

$$Sv = const$$

- это уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.

Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

Выделим в стационарно текущей **идеальной жидкости** трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 .



Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$E_2 - E_1 = A,$$

где E_1 - полная энергия жидкости массой m в местах сечения S_1

E_2 - то же для S_2

A – работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2 за малый промежуток времени Δt .

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2$$

$$F_1 = p_1 S_1; \quad F_2 = -p_2 S_2; \quad l_1 = v_1 \cdot \Delta t; \quad l_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \\ E_2 &= \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \end{aligned} \right\}$$

P_1 и P_2 - давления на сечениях S_1 и S_2 .

Объединив записанные формулы , получим:

$$\frac{mU_2^2}{2} + mgh_2 + P_2V = \frac{mU_1^2}{2} + mgh_1 + P_1V$$

Поделив обе части на V и учитывая, что $\frac{m}{V} = \rho$,

После ряда преобразований, используя уравнение неразрывности получаем

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2$$

или

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$$

-уравнение Бернулли

В идеальной несжимаемой жидкости сумма статического, динамического и гидростатического давлений постоянна на любом поперечном сечении потока

$$\frac{\rho v^2}{2}$$

- динамическое давление,

$$\rho g h$$

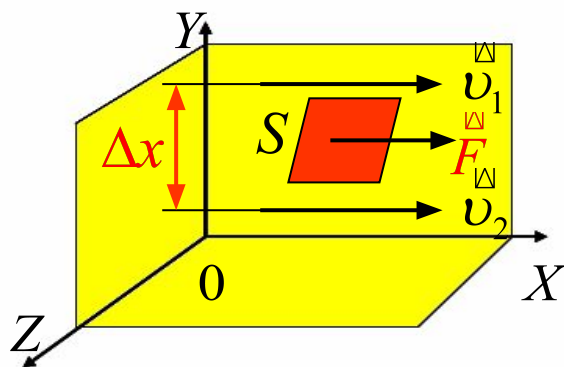
- гидростатическое давление,

$$p$$

- статическое давление.

2 вопрос - Движение вязкой жидкости. Уравнение Ньютона. Формула Пуазейля.

Вязкость (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.



На рисунке представлены два слоя, отстоящие друг от друга на расстоянии Δx и движущиеся со скоростями u_1 и u_2 .

При этом $u_1 - u_2 = \Delta u$.

Величина $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x , перпендикулярном направлению движения слоев и называется **градиентом скорости**

Уравнение Ньютона:

➔ Описывает силы внутреннего трения ($F_{тр}$)

$$F_{тр} = \eta \frac{dv}{dx} S$$

$\frac{dv}{dx}$ - градиент скорости

S - площадь соприкасающихся слоев жидкости

η - коэффициент внутреннего трения (**динамическая вязкость**)

“Си”: $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$ “СГС”: $[\eta] = \text{пуаз}$

$$1 \text{Па} \cdot \text{с} = 10 \text{П}$$

➔ $F_{тр}$ пропорциональны S

➔ Чем больше η , тем больше $F_{тр}$

➔ **Вязкость (η)** зависит от состояния и молекулярных свойств жидкости (температуры, плотности среды)

<u>жидкость</u>	<u>η (мПа.с)</u>
вода (0 °С)	1.8
вода (20 °С)	1.0
вода (100 °С)	0.3
кровь, <u>норма</u> (37 °С)	~4
плазма крови, норма (37 °)	~1.5
воздух	0.018
кровь, <u>диабет</u> (37 °С)	~ 23
кровь, <u>туберкулез</u> (37 °С)	~ 1.0

➔ **η** Сильно зависит от температуры

➔ **η** уменьшается с увеличением температуры среды

Различают ньютоновские и неньютоновские жидкости

➔ **Ньютоновские** – **подчиняются** уравнению Ньютона.

Для них вязкость (η) **не** зависит от градиента скорости (dv/dx)

Примеры: вода, спирт, плазма крови , низкомолекулярные органические жидкости

➔ **Неньютоновские** – **не** подчиняются уравнению Ньютона.

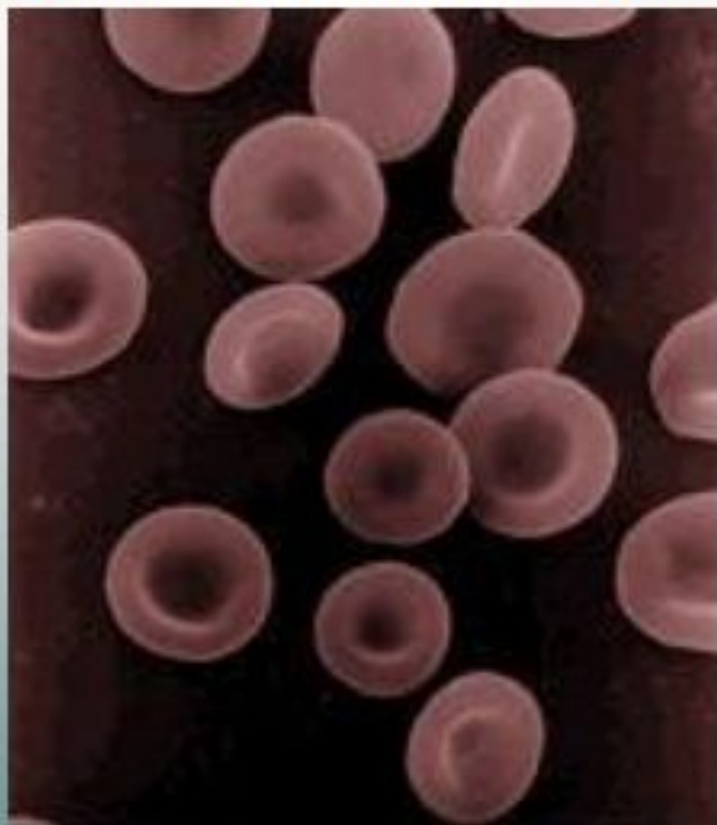
Для них вязкость (η) **зависит** от градиента скорости (dv/dx)

- Содержат структурные элементы, склонные к агрегации

Примеры: суспензии, эмульсии, **кровь**

Кровь – неньютоновская жидкость

Высокая скорость течения



Низкая скорость течения

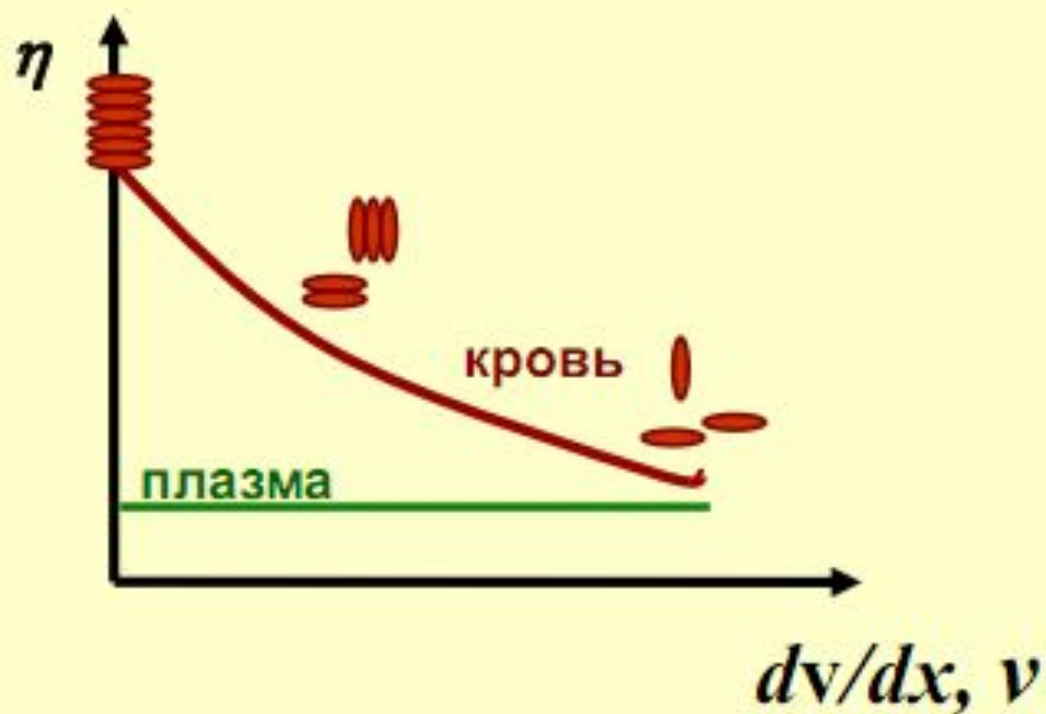


Монетные столбики

Зависимость вязкости крови и ее плазмы от скорости течения

Плазма крови – ньютоновская жидкость

Кровь – неньютоновская жидкость



- ➡ При увеличении скорости движения крови «монетные столбики» разрушаются, при остановке движения они вновь быстро (за 1 с) собираются

Существует два режима течения жидкостей:

ламинарный (слоистый) и **турбулентный (вихревой)**.

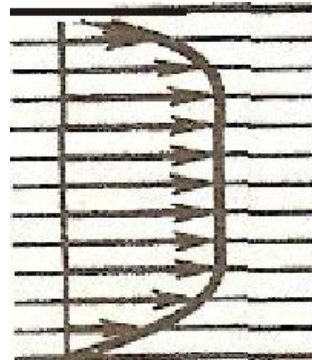
Течение называется **ламинарным**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.

$$v_{\max} = 2 \langle v \rangle$$



Течение называется **турбулентным**, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

$$v_{\max} = 1,23 \langle v \rangle$$



III. Ламинарное и турбулентное течение. Число Рейнольдса

A) Ламинарное течение (слоистое)

- ➔ Такое течение, при котором слои жидкости текут **не перемешиваясь**, скользя друг относительно друга



- ➔ медленное (малые скорости), упорядоченное

- ➔ в сосудах с гладкими стенками

- ➔ в артериях и венах в норме

Б) турбулентное течение (вихревое)

- ➔ Такое течение, при котором в жидкости образуются **завихрения**, т.к. скорости частиц непрерывно меняются
- ➔ Слои жидкости **перемешиваются** друг с другом



➔ быстрое (высокие скорости), хаотическое

➔ Сопровождается появлением звука (шума)

➔ в норме только в аорте

➔ возникает в плечевой артерии при измерении давления крови

IV. Ламинарное течение жидкости в трубах. Формула Пуазейля. Гидравлическое сопротивление

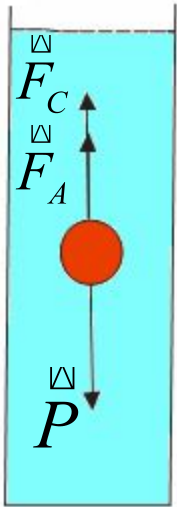
➔ кровеносная система - цилиндрические сосуды разного диаметра



➔ Жидкость движется в результате разности давлений на концах трубы: $\Delta p = p_1 - p_2$

Методы определения вязкости

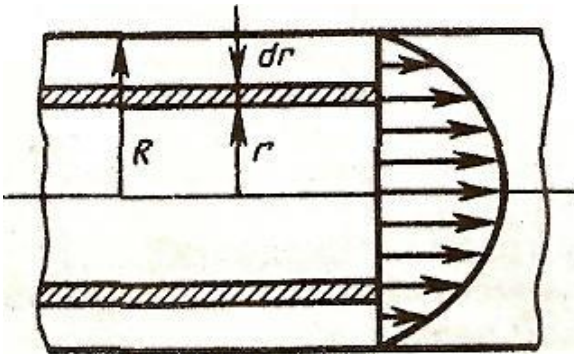
1) **Метод Стокса** – метод определения вязкости, основанный на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.



Если измерить скорость шарика, то можно найти вязкость

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9v}$$

2) **Метод Пуазейля** – основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре.



$$\eta = \frac{\pi \cdot R^4 \Delta p \cdot t}{8Vl}$$

Формула Пуазейля:

➡ Описывает ламинарное движение жидкостей по трубам

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l}$$

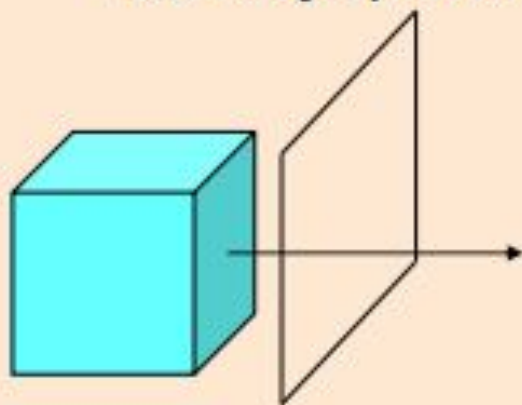
R – радиус трубы

η – вязкость

l – длина трубы

$\Delta p = p_1 - p_2$ – разность давлений

Q – **объемная скорость** (объем жидкости, протекающий за единицу времени через поперечное сечение трубы):



$$Q = \frac{dV}{dt}$$

$$[Q] = \frac{M^3}{c}$$

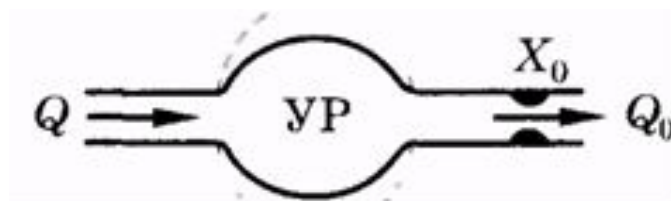
➡ Q **сильно зависит от R**

➡ Q обратно пропорциональна η, l

3. Модель кровообращения Франка. Пульсовая волна. Формула Моенса-Кортевега.

Модель кровообращения Франка позволяет установить связь между ударным объемом крови (объем крови, выбрасываемый желудочком за одну систолу), гидравлическим сопротивлением периферической части системы кровообращения x_0 и изменением давления в артериях.

Артериальная часть системы кровообращения моделируется упругим (эластичным) резервуаром (УР).



В УР (артерия) поступает кровь из сердца со скоростью Q . От УР кровь оттекает со скоростью Q_0 в периферическую систему (артериолы, капилляры).

Объем крови в УР зависит от давления P

$$V = V_0 + kP, \quad (1)$$

где k - упругость резервуара; V_0 - объем УР при $P=0$.

Возьмем первую производную

$$\frac{dV}{dt} = k \frac{dP}{dt} \quad (2)$$

$$Q = \frac{dV}{dt} + Q_0 \quad (3)$$

т.е. объемная скорость кровотока из сердца равна скорости возрастания объема УР, т.е. скорости оттока крови из упругого резервуара.

На основании формулы Пуазейля и формулы (3) можно записать для периферии:

$$Q_0 = \frac{P - P_v}{x_0} \quad (4)$$

где P - давление в УР; P_v - венозное давление. При $P_v = 0$

$$Q_0 = \frac{P}{x_0} \quad (5)$$

Подставляя (2) и (5) в (3), получим

$$Q = k \frac{dP}{dt} + \frac{P}{x_0} \quad \text{или} \quad Qdt = kdP + \frac{P}{x_0} dt \quad (6)$$

Во время систолы (сокращение сердца) происходит расширение УР, во время диастолы - отток крови к периферии, $Q=0$. Тогда (6) переписывается:

$$0 = kdP + \frac{P}{x_0} dt \quad \text{или} \quad \frac{dP}{P} = -\frac{dt}{kx_0} \quad (7)$$

Проинтегрировав (9), получаем зависимость давления в УР после систолы от времени:

$$P = P_c \times e^{-\frac{t}{kx_0}} \quad \text{и} \quad Q = Q_c \times e^{-\frac{t}{kx_0}} \quad (8)$$

Пульсовая волна - это распространяющаяся по аорте и артериям волна повышенного давления, вызванная выбросом крови из левого желудочка в период систолы.

Скорость пульсовой волны в крупных сосудах определяется формулой Моенса-Кортевега:

$$v = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}$$

где E - модуль упругости, ρ - плотность вещества сосуда, h - толщина стенки сосуда, d - диаметр сосуда.