Объём

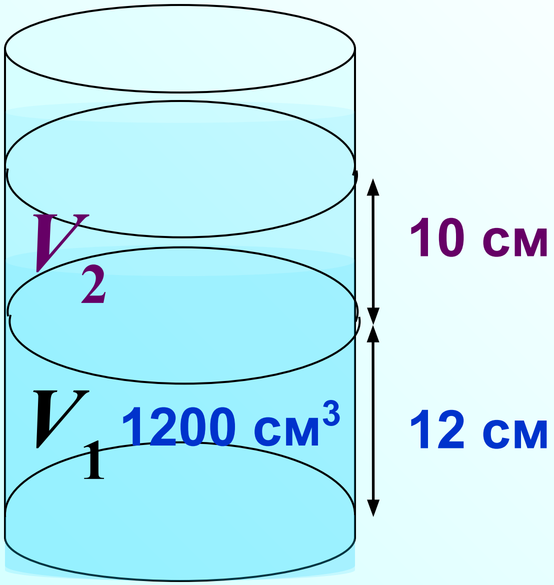
Цилиндр, призма

В цилиндрический сосуд налили 1200 $см^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 10 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в $см^3$.

$$V_{ц.} = S_о h$$

Объем детали будет равен объему вытесненной жидкости – это известно нам из курса физики.

Найдем отношение объемов

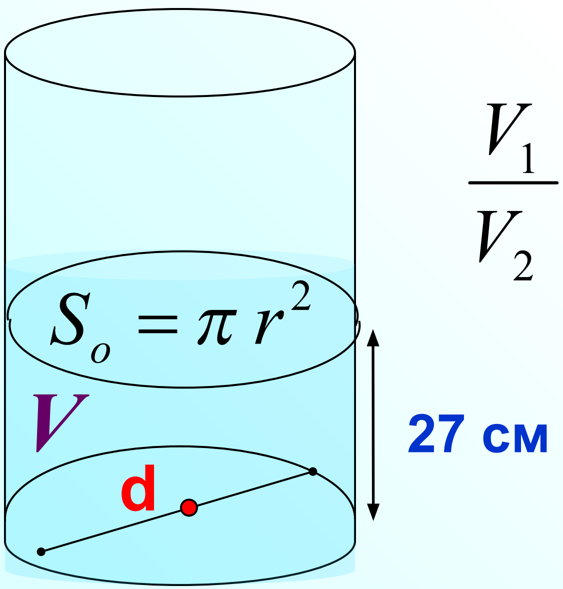


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cancel{S_o} \cdot h_1}{\cancel{S_o} \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{\overset{1200}{V_1}}{V_2} = \frac{\overset{12}{h_1}}{\underset{10}{h_2}}$$

В 9	1	0	0	0		

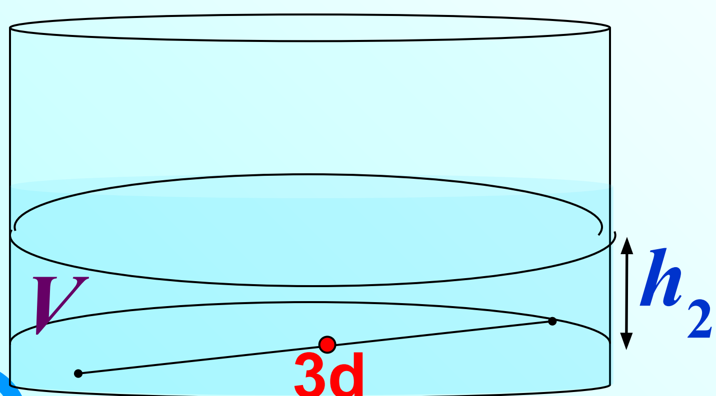
В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 27 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3 раза больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 h_1}{S_2 h_2} = \frac{\cancel{\pi}\left(\frac{d}{2}\right)^2 h_1}{\cancel{\pi}\left(\frac{3d}{2}\right)^2 h_2} = \frac{\frac{d^2}{4} h_1}{\frac{9d^2}{4} h_2} = \frac{h_1}{9h_2}$$

Найдем о

Объем жидкости не изменился, т.е. $V_1 = V_2$



$$\frac{\overset{1}{\cancel{V_1}}}{\underset{1}{\cancel{V_2}}} = \frac{\overset{27}{h_1}}{9h_2}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{27}{9h}$$

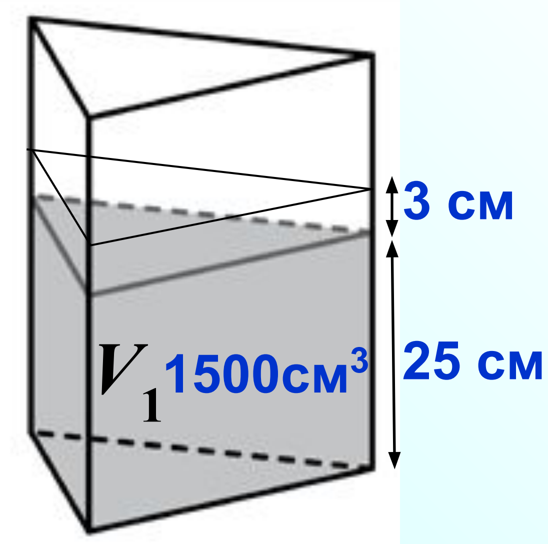
В 9	3					

В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1500 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 28 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3.

$$V_{\text{приз.}} = S_{\text{о}} h$$

Объем детали будет равен объему вытесненной жидкости – это известно нам из курса физики.

Найдем отношение объемов



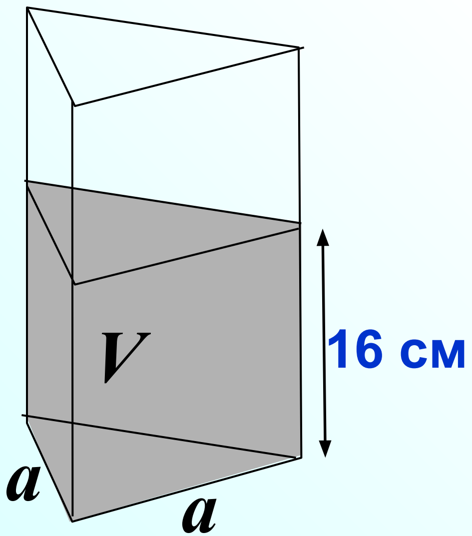
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cancel{S_o} \cdot h_1}{\cancel{S_o} \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{\overset{1500}{V_1}}{V_2} = \frac{\overset{25}{h_1}}{\underset{3}{h_2}}$$

В 9 | 1 | 8 | 0

В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого?
Ответ выразите в сантиметрах.

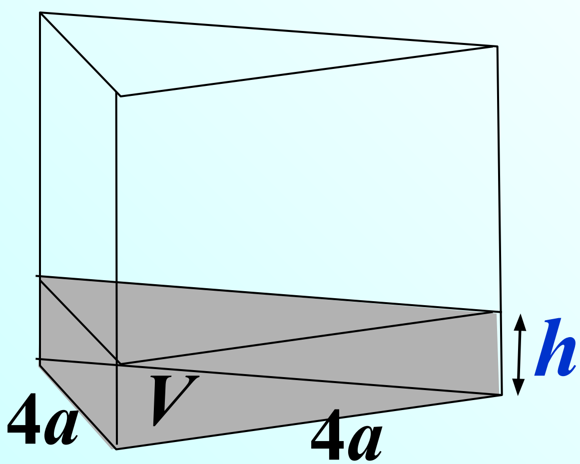
$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}ab\sin a$$



$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_1 h_1}{S_2 h_2}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{\sin 60^0}\cdot h_1}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot 4\cancel{a}\cdot 4\cancel{a}\cdot\cancel{\sin 60^0}\cdot h_2}=\frac{h_1}{16h_2}$$

Найдем о

Объем жидкости не изменился, т.е. $V_1=V_2$



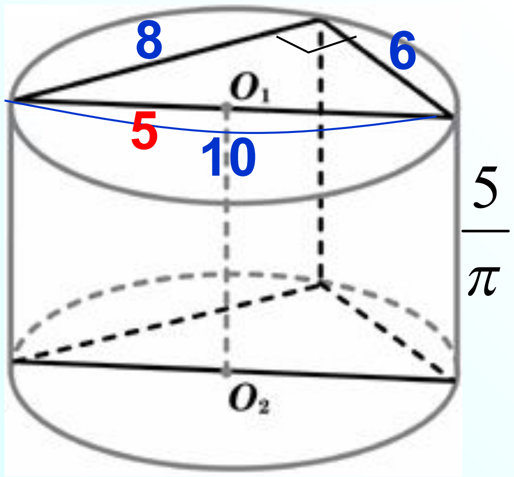
$$\frac{\overset{1}{\cancel{V_1}}}{\underset{1}{\cancel{V_2}}}=\frac{\overset{16}{h_1}}{16h_2}$$

$$\frac{1}{1}=\frac{16}{16h}$$

В 9 | 1

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\dfrac{5}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

$$V_{ц.} = S_о h$$

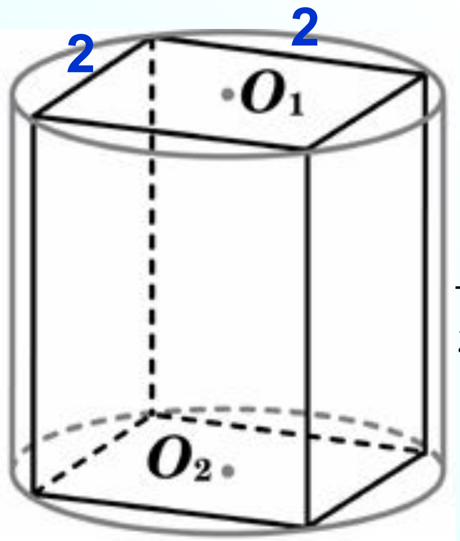


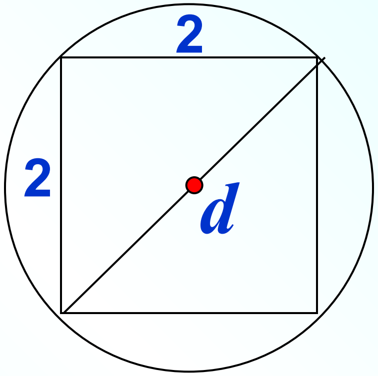
$$V_{ц.} = \pi r^2 h$$

$$V_{ц.} = \pi 5^2 \left(\frac{5}{\pi}\right) = \cancel{\pi}\, 25 \cdot \frac{5}{\cancel{\pi}}$$

В 9 | 1 | 2 | 5

В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.





$$d^2 = 2^2 + 2^2$$

$$d^2 = 8$$

$$d = \sqrt{8}$$

$$d = 2\sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\boxed{V_{ц.} = S_{о} h}$$

$$V_{ц.} = \pi r^2 h$$

$$V_{ц.} = \cancel{\pi}\left(\sqrt{2}\right)^2 \frac{2}{\cancel{\pi}} = 4$$

В 9 | 4

Объем первого цилиндра равен 12 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

$$V_{ц.} = S_о h$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cancel{\pi} r^2 \cancel{h}}{\cancel{\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^2 3\cancel{h}} = \frac{\cancel{r^2}}{\frac{\cancel{r^2}}{4}\cdot 3} = \frac{4}{3}$$

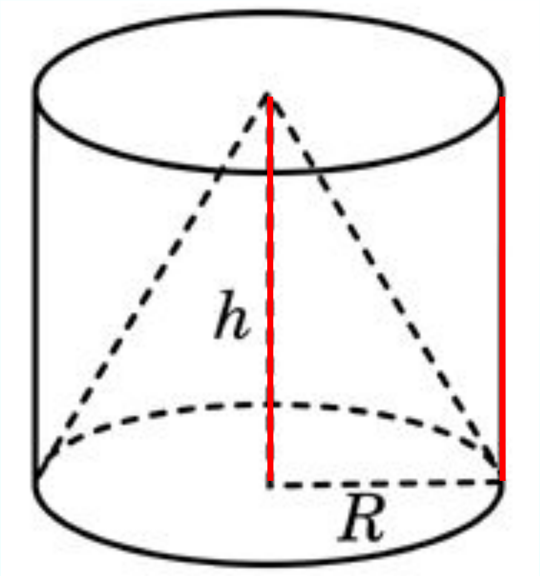
Найдем отношение объемов

$$\frac{\overset{12}{V_1}}{V_2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{12}{V} = \frac{4}{3}$$

В 9 | 9

Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 27.



$$\frac{V_к}{V_ц} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{S_o}\cancel{h}}{\cancel{S_o}\cancel{h}} = \frac{1}{3}$$

Найдем отношение объемов

$$\frac{\overset{27}{V_{к.}}}{V_{ц.}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{27}{V_{ц.}} = \frac{1}{3}$$

$$V_{ц.} = S_о h$$

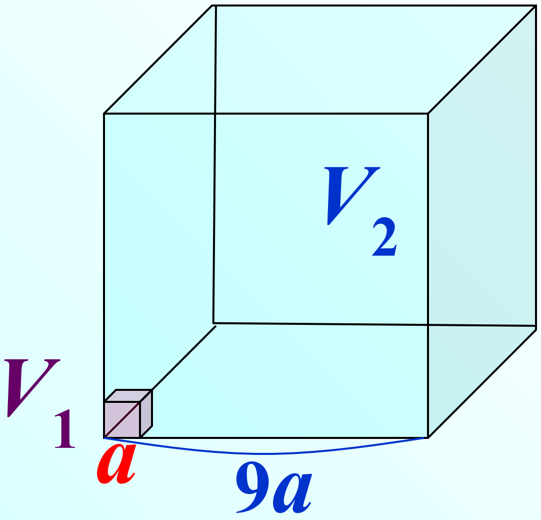
$$V_{кон.} = \frac{1}{3} S_о h$$

В 9	8	1				

Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в девять раз?

Найдем отношение объемов

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{(9a)^3} = \frac{\cancel{a^3}}{729\cancel{a^3}} = \frac{1}{729}$$



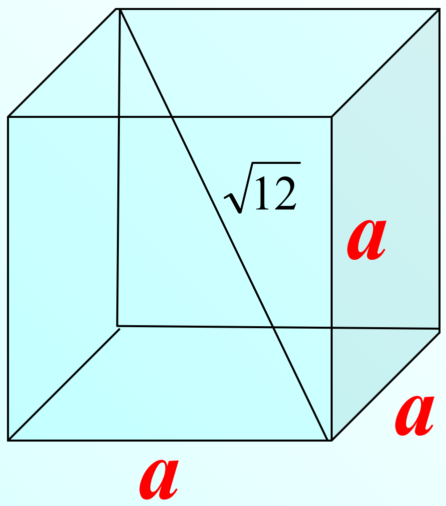
В 9 | 7 | 2 | 9

Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.

$$V_{\text{куб.}} = a^3$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Для прямоугольного параллелепипеда



$$d^2 = 3a^2$$

Для куба

$$\left(\sqrt{12}\right)^2 = 3a^2$$

$$12 = 3a^2$$

$$4 = a^2$$

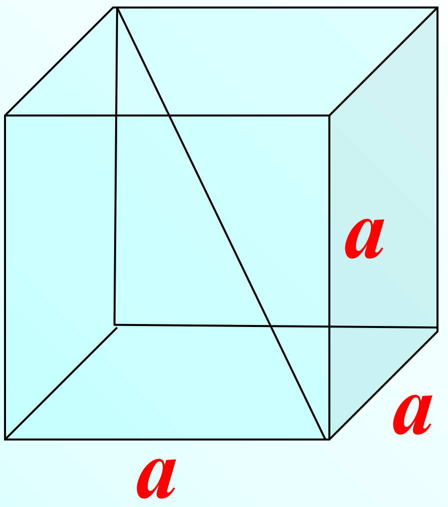
$$a = \pm 2 \qquad a = 2 \qquad V_{куб} = 2^3$$

В 9	8					

Объем куба равен $24\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Для прямоугольного параллелепипеда



$$\boxed{V_{\text{куб.}} = a^3}$$

$$d^2 = 3a^2$$

Для куба

$$\overset{8\cdot 3}{24}\sqrt{3} = a^3$$

$$2^3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^3 = a^3$$

$$a = 2\sqrt{3}$$

$$d^2 = 3\left(2\sqrt{3}\right)^2$$

$$d^2 = 3 \cdot 4 \cdot 3$$

$$d = \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$d = 3 \cdot 2$$

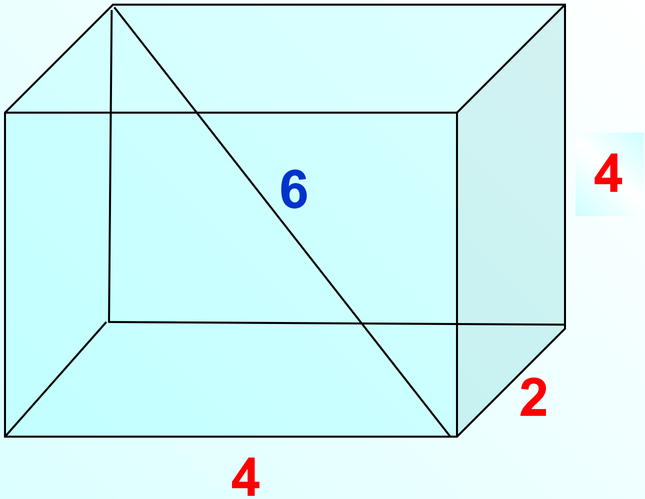
В 9	6					

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объем параллелепипеда.

Для прямоугольного параллелепипеда

$$V_{\text{пар.}} = abc$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



$$6^2 = 2^2 + 4^2 + x^2$$

$$x^2 = 36 - 16 - 4$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4$$

$$V = 4 \cdot 2 \cdot 4$$

В 9	3	2				

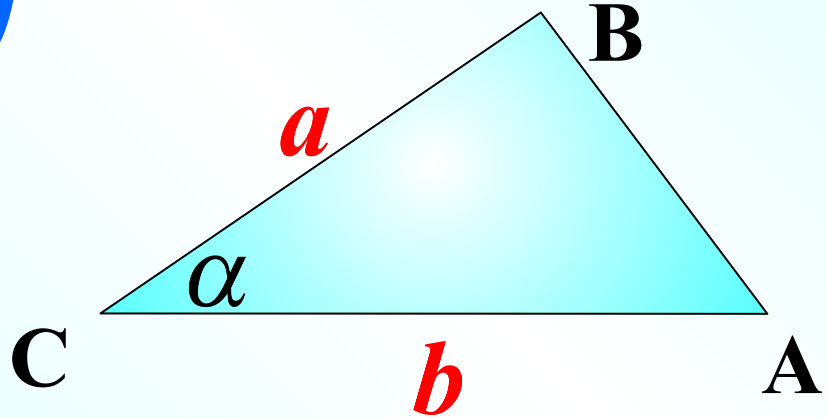
Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 19. Найдите ребро куба.

Объем куба увеличится на 19.
Составим и решим уравнение:
$$(x+1)^3 = x^3 + 19$$

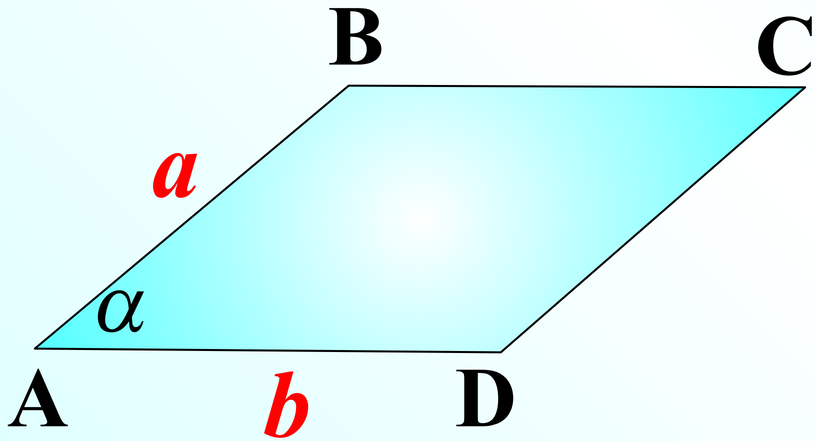
	a ребро	V
1 куб Исходный куб	x	x^3
2 куб Новый куб	$x+1$	$(x+1)^3$

на 19 >

В 9 | 2

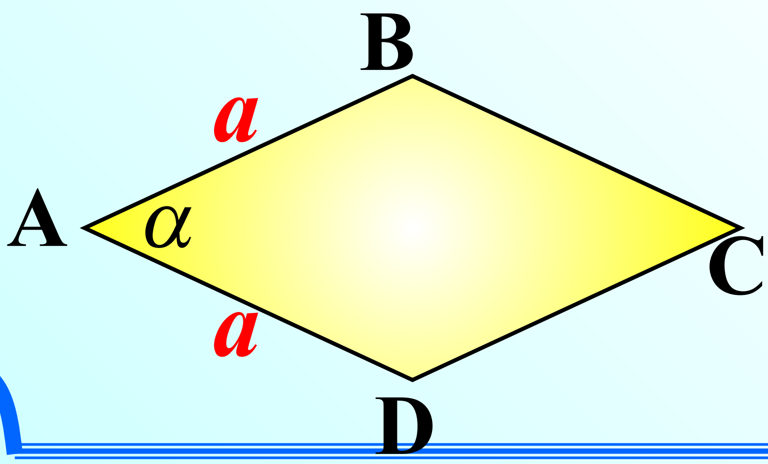


$$S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$$

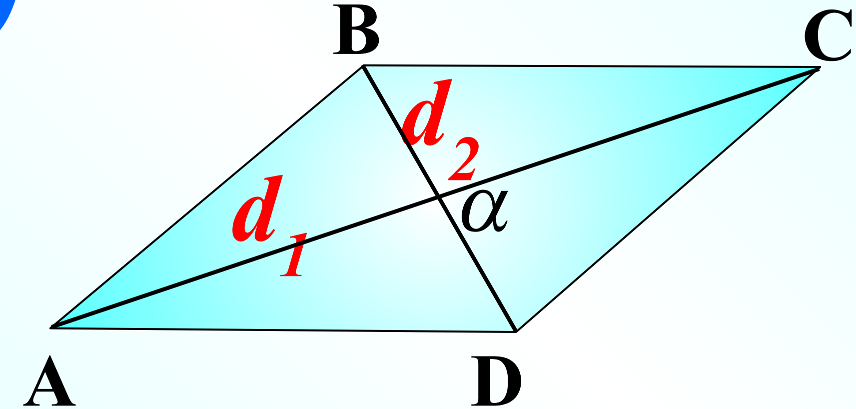


параллелограмм

$$S = ab \sin\alpha$$

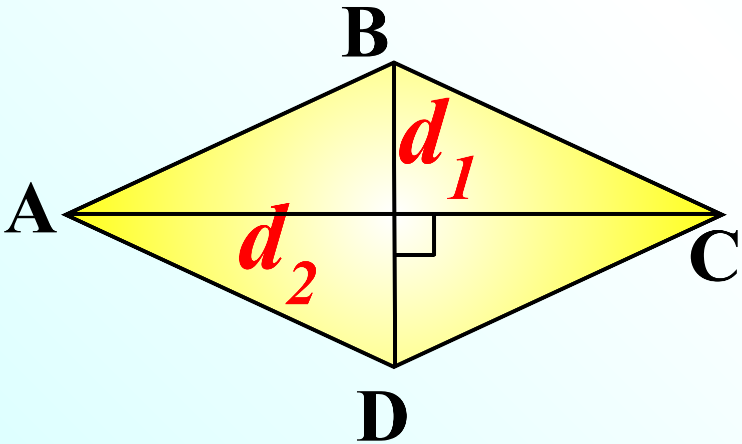


ромб $S = a^2 \sin\alpha$



параллелограмм

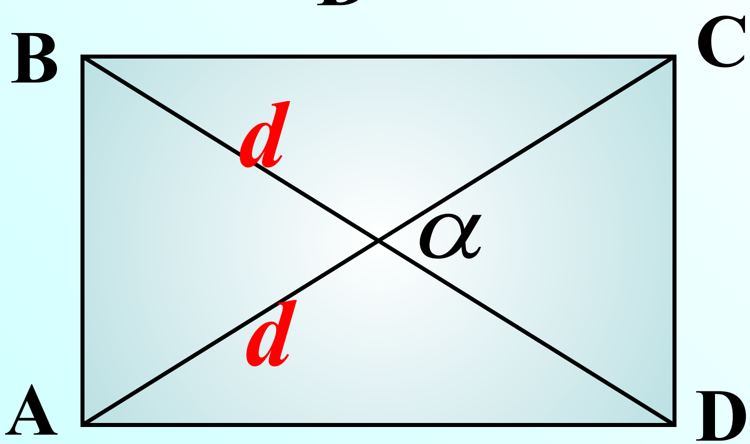
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin a$$



ромб

1

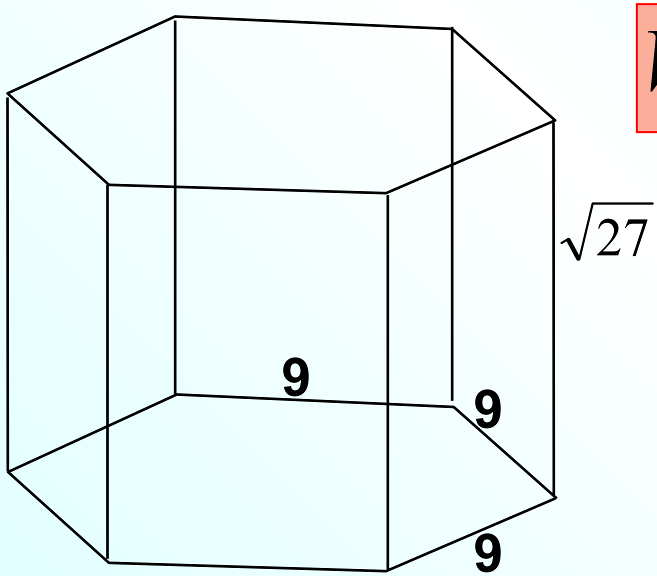
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



прямоугольник

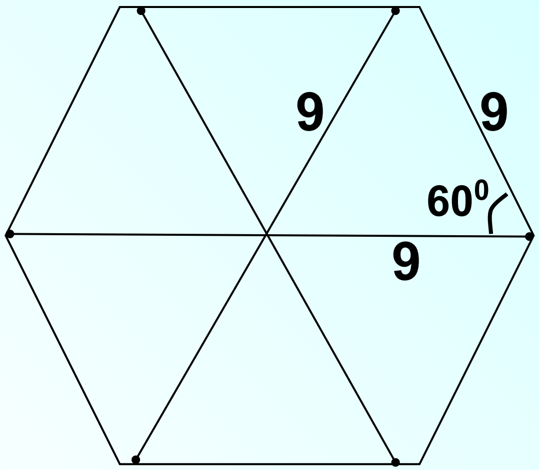
$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin a$$

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 9, а боковые ребра равны $\sqrt{27}$.



$$V_{\text{приз.}} = S_{\text{о}} h$$

Например, можно вычислить площадь правильного 6-уг., разбив его на 6 треугольников.



$$S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \sin 60^0 = 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{243\sqrt{3}}{2}$$

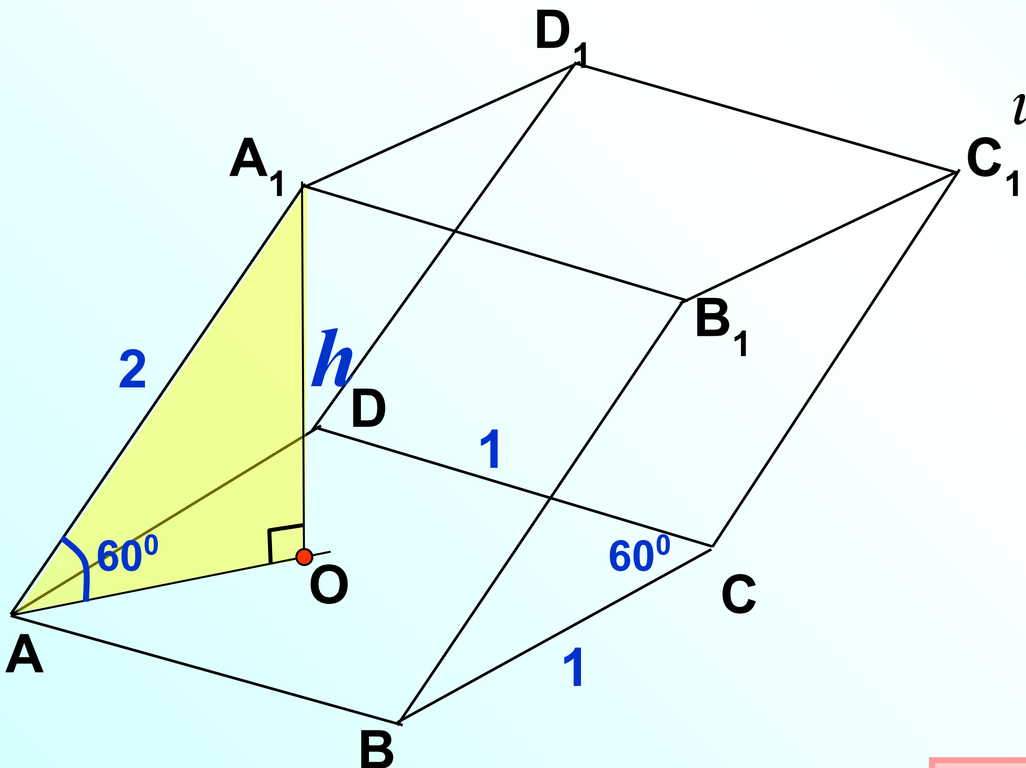
$$V = \frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{27} = \frac{243\sqrt{81}}{2} = \frac{243 \cdot 9}{2} = \frac{2187}{2} = 1093{,}5$$

В 9	1	0	9	3	,	5

Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60^0. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60^0 и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.

$$V_{\text{приз.}} = S_{\text{о}} h$$?

$$S_{\text{ром.}} = 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{из } \Delta AA_1O: \quad \sin 60^0 = \frac{h}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2}$$

$$h = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

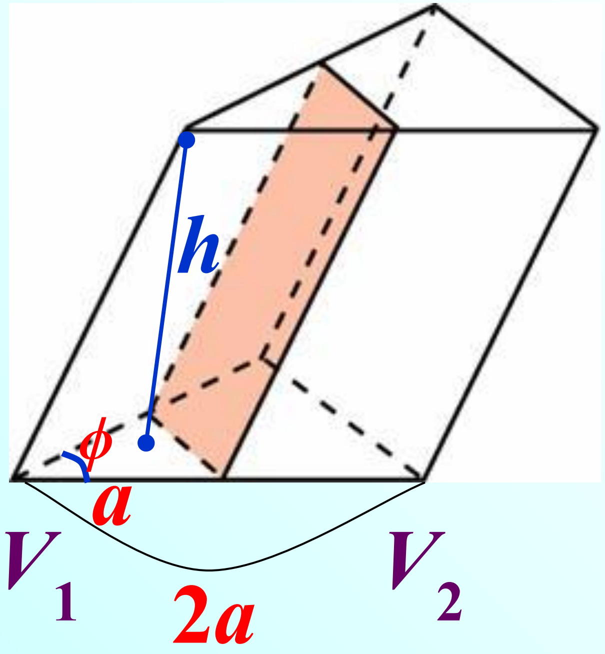
В 9	1	,	5			

Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin a$$

Обе призмы имеют одинаковую высоту

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 h}{S_2 h} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{\sin \varphi} \cdot \cancel{h}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot 2\cancel{a} \cdot 2\cancel{a} \cdot \cancel{\sin \varphi} \cdot \cancel{h}} = \frac{1}{4}$$



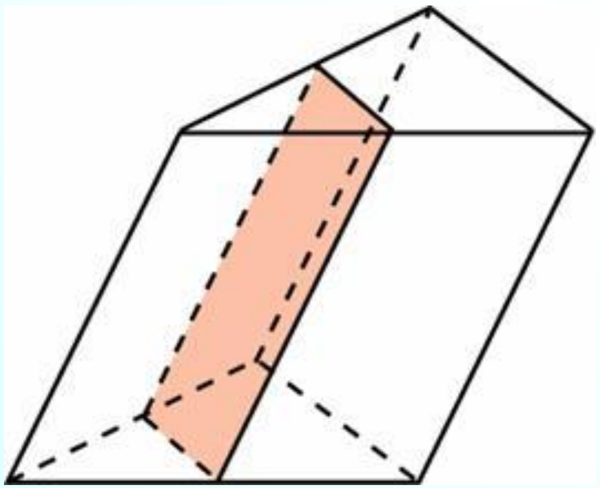
Найдем отношение объемов

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$$

32

В 9	8					

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.



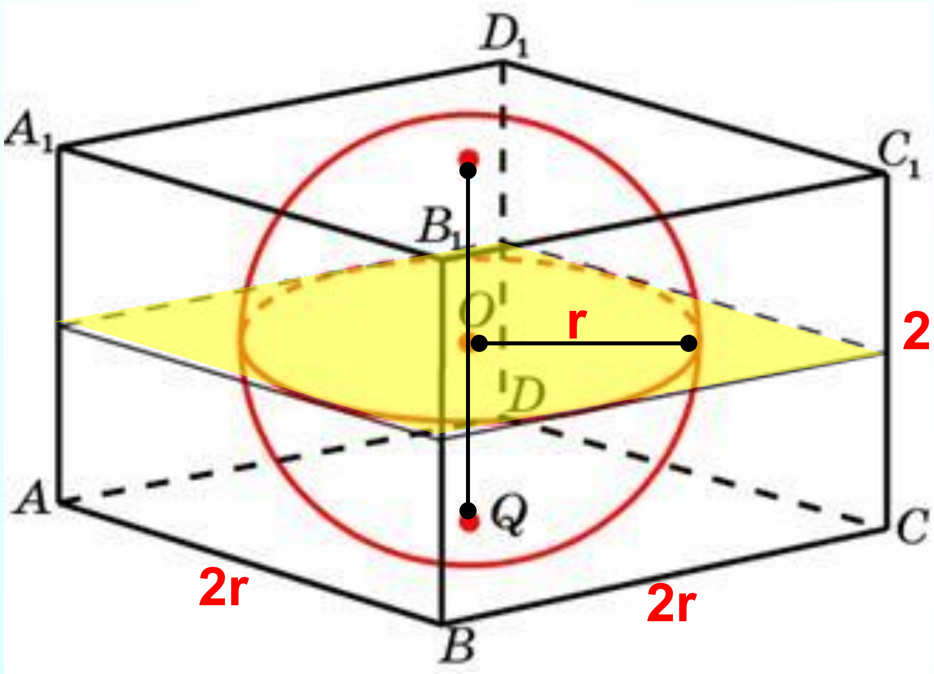
5

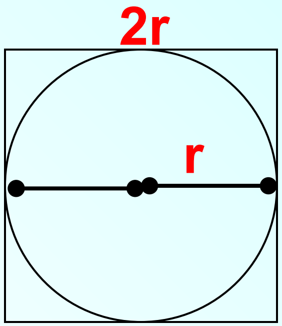
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$$

Применим результат, полученный в предыдущей задаче

В 9	2	0				

Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.





$$a = 2r$$

$$V_{куб.} = (2r)^3$$

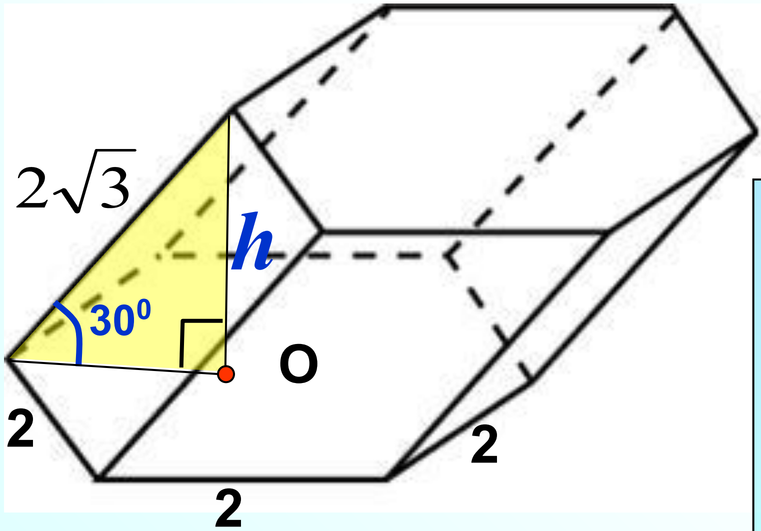
$$216 = 8r^3$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3$$

В 9	3					

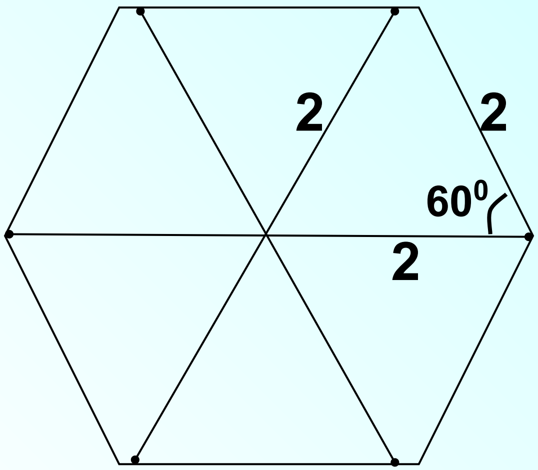
Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30^0.



$$V_{\text{приз.}} = S_{\text{о}} h$$

?

Например, можно вычислить площадь правильного 6-уг., разбив его на 6 треугольников.



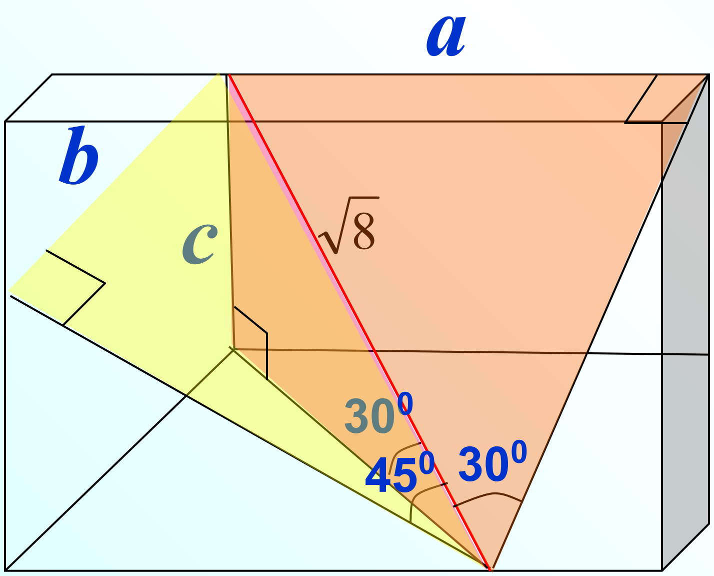
$$S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^0 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \ \textit{т.к. лежит против угла } 30^0$$

$$V = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

В 9	1	8				

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна и образует углы 30^0, 30^0 и 45^0 с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



Найдем длину, ширину и высоту параллелепипеда.

$$a = \sqrt{8}\cdot\sin 30^0 = \frac{\sqrt{8}\cdot 1}{2} = \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{8}\cdot\sin 30^0 = \frac{\sqrt{8}\cdot 1}{2} = \sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{8}\cdot\sin 45^0 = \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$V = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2 = 4$$

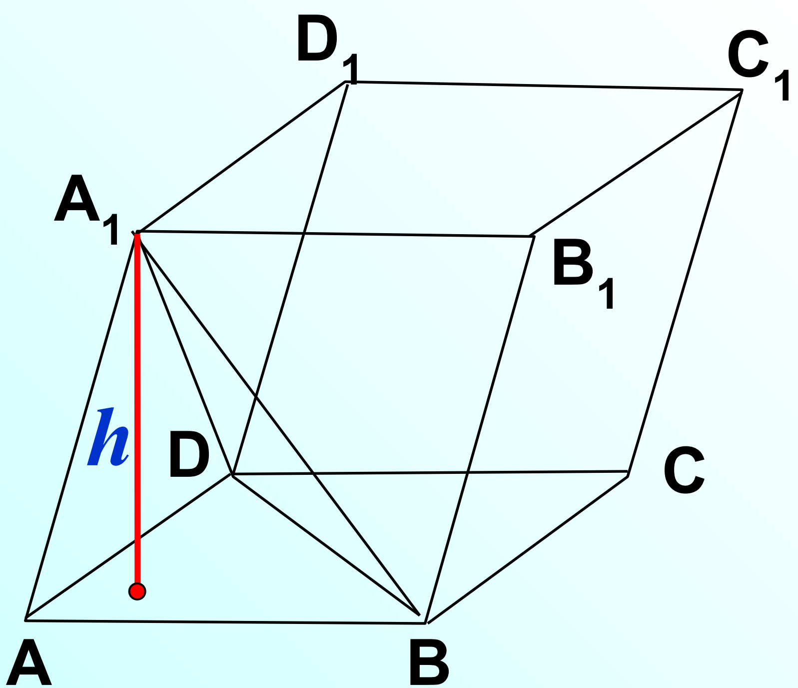
В 9	4					

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCA_1$.

$$V_{приз.} = S_o H$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{приз.}}{V_{пир.}} = \frac{\overset{2S_{ABD}}{\overset{=}{S_{ABCD}}} \cancel{h}}{\frac{1}{3} S_{ABD} \cancel{h}} = \frac{2\cancel{S_{ABC}}}{\frac{1}{3} \cdot \cancel{S_{ABC}}} = \frac{6}{1}$$



Найдем отношение объемов

$$\frac{9}{V_{пир.}} = \frac{6}{1}$$

В 9	1	,	5			