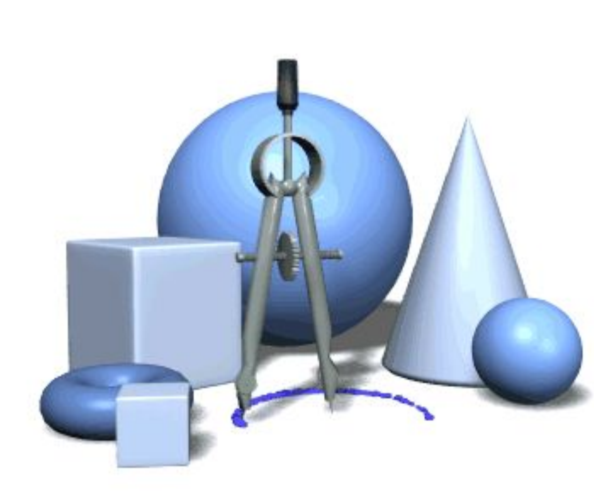
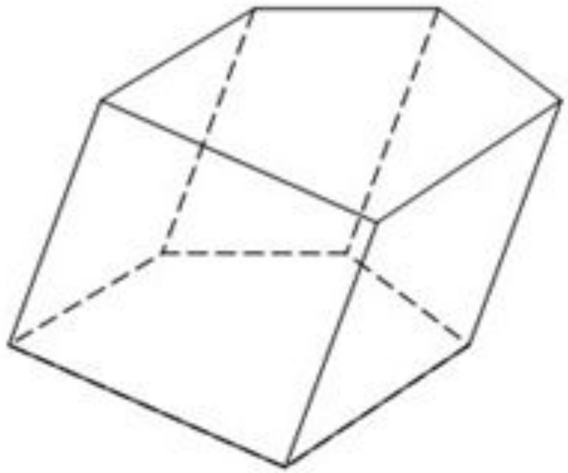


Готовимся к ЕГЭ.
Прототипы В9, В11.
Комбинация: призма - пирамида.

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники называются **основаниями призмы**, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, - **боковыми ребрами**



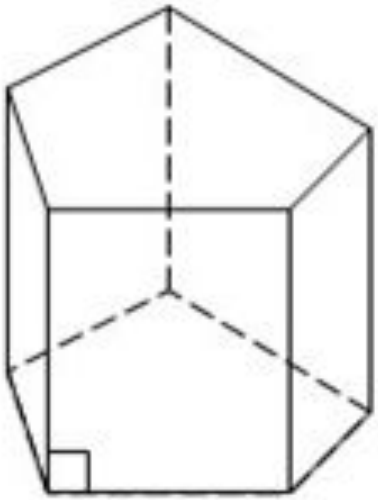
призмы.

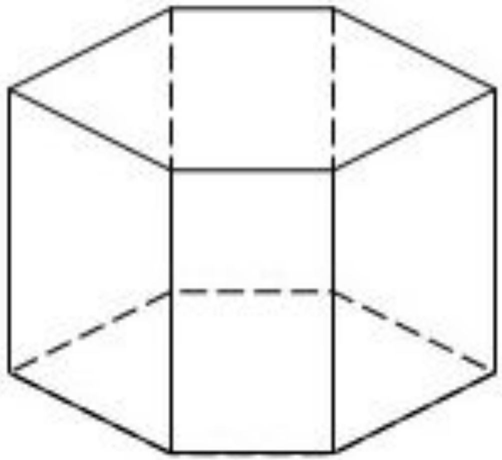
Свойства призмы:

1. Основания призмы равны и лежат в параллельных плоскостях.
2. Боковые ребра параллельны и равны.

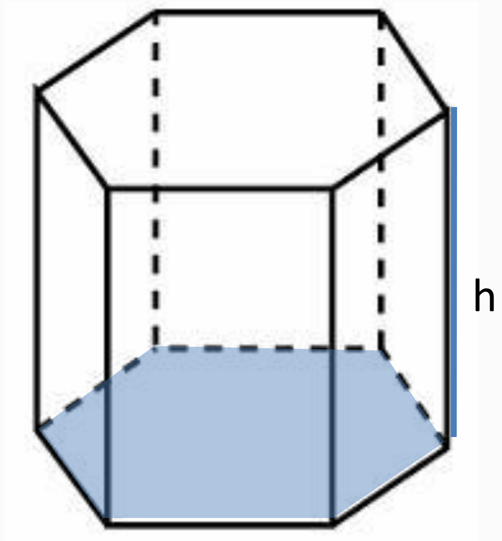
Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. **Боковая поверхность** состоит из параллелограммов. **Высотой призмы** называется расстояние между плоскостями. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю призмы**.

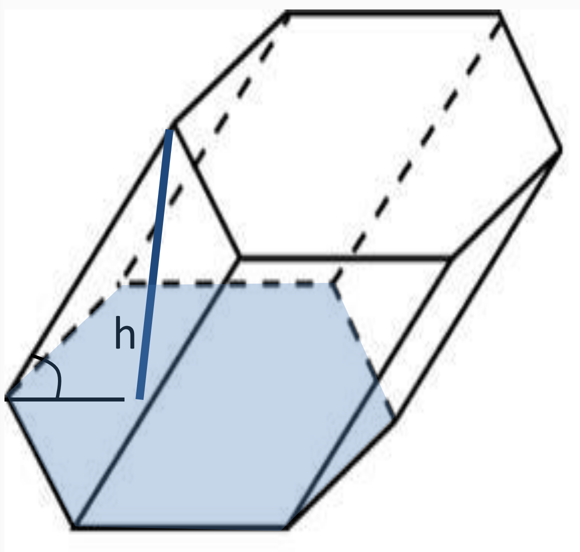
Призма называется **прямой**, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.
Призма называется **наклонной**, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям.
У прямой призмы боковые грани – прямоугольники.





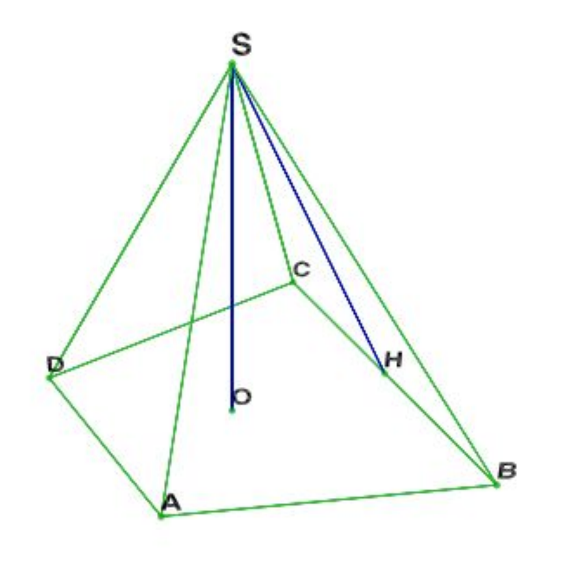
Призма называется **правильной**, если ее основания являются правильными многоугольниками.
Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей боковых граней.
Полная поверхность призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований



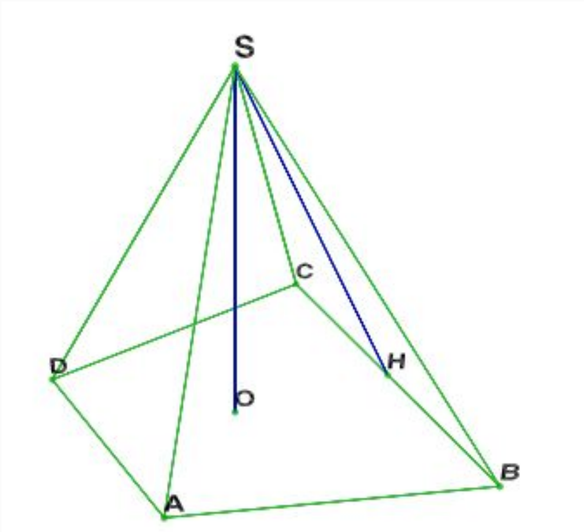


Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Пирамидой называется многогранник, основанием которой является многоугольник, а боковые грани - треугольники, имеющие общую точку. Общая точка является вершиной пирамиды.

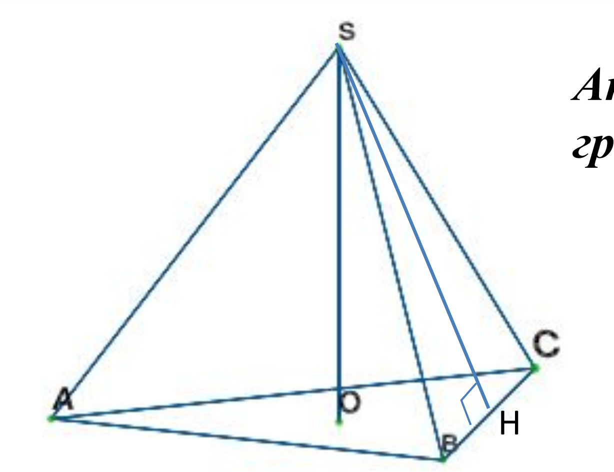


Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания называются боковыми ребрами.
Высотой пирамиды является перепендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания (SO).



$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO$$

Правильная пирамида - пирамида, основание которой правильный многоугольник и основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

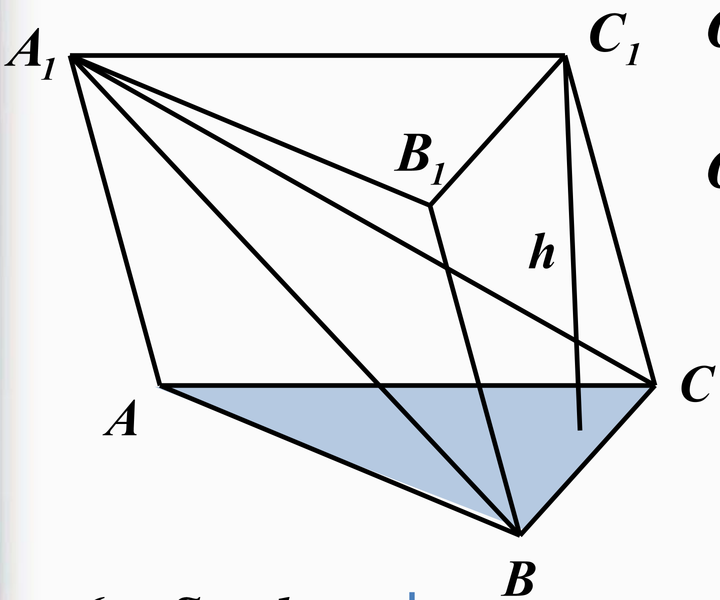


Апофема правильной пирамиды - высота боковой грани, опущенная из вершины (SH).

$$S_{бок} = \frac{1}{2} SH \cdot P_{ABC}$$ ***Для правильной пирамиды.***

От треугольной призмы, объем которой равен 6, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.

№ 1



Объём призмы равен $V_{пр} = S_{о.пр} h_{пр}$

Объём пирамиды равен $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{о.пир} h_{пир}$

$h_{пир} = h_{пр}$ $\qquad S_{о.пир} = S_{о.пр}$

Подставим в формулы объемов и разделим первое на второе:

$$6 = S_{ABC} h$$

$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{ABC} h$$

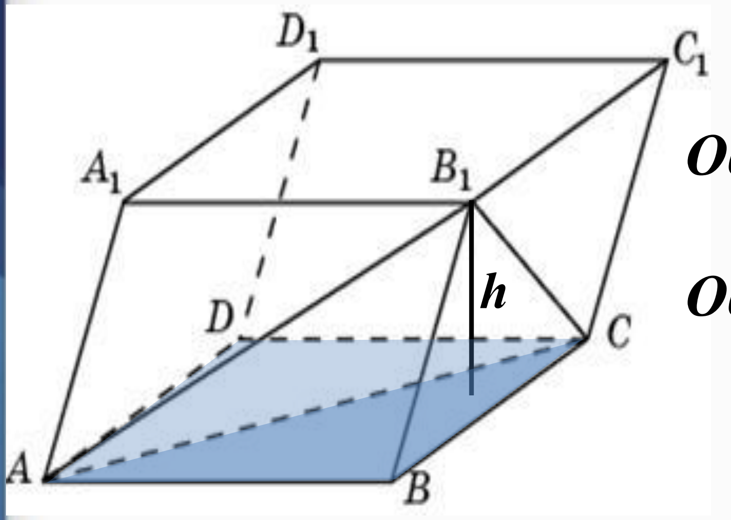
$$\div \quad \frac{6}{V_{пир}} = \frac{\cancel{S_{ABC}}\cancel{h}}{\frac{1}{3}\cancel{S_{ABC}}\cancel{h}} \Rightarrow V_{пир} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Объем оставшейся части = $V_{пр} - V_{пир} = 6 - 2 = 4$

Ответ: $\boxed{4}$

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC.

№ 2



Объём параллелепипеда равен $V_{пар} = S_{о.пар} h_{пар}$

Объём пирамиды равен $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{о.пир} h_{пир}$

$h_{пар} = h_{пир}$ $\qquad S_{о.пар} = 2S_{о.пир}$

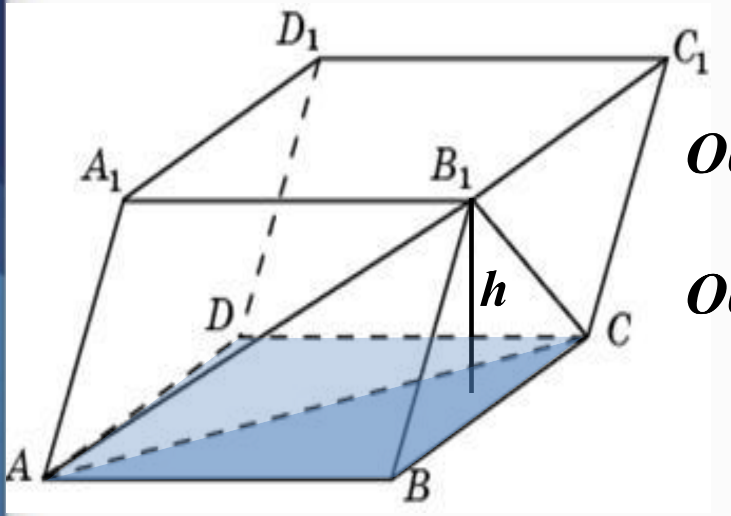
Подставим в формулы объемов и разделим первое на второе:

$$\left. \begin{aligned} 12 &= 2S_{о.пир}h \\ V_{пир} &= \frac{1}{3}S_{о.пир}h \end{aligned} \right| \div \quad \frac{12}{V_{пир}} = \frac{2\cancel{S_{о.пир}}\cancel{h}}{\frac{1}{3}\cancel{S_{о.пир}}\cancel{h}} \Bigg| \Rightarrow \quad V_{пир} = \frac{12 \cdot \frac{1}{3}}{2} = 2$$

Ответ: $\boxed{2}$

Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объем треугольной пирамиды B_1ABC равен 3.

№ 3



Объём параллелепипеда равен $V_{пар} = S_{о.пар} h_{пар}$

Объём пирамиды равен $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{о.пир} h_{пир}$

$h_{пар} = h_{пир}$ $\quad$ $S_{о.пар} = 2S_{о.пир}$

Подставим в формулы объемов и разделим первое на второе:

$$V_{пар} = 2S_{о.пир} h$$

$$3 = \frac{1}{3} S_{о.пир} h$$

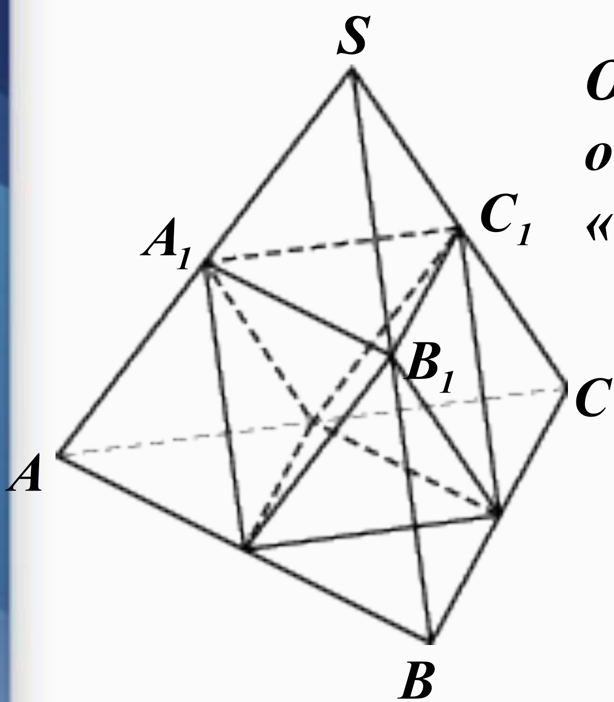
$$\div \quad \frac{V_{пар}}{3} = \frac{2\cancel{S_{о.пир}}\cancel{h}}{\frac{1}{3}\cancel{S_{о.пир}}\cancel{h}}$$

$$V_{пар} = \frac{3 \cdot 2}{\frac{1}{3}} = 18$$

Ответ: 18

Объем тетраэдра равен 1,9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра.

№ 4



Объем этого многогранника равен разности объемов исходного тетраэдра и четырех «отсеченных» тетраэдров.

Сравним один из них: $SA_1B_1C_1$ с исходным: $SABC$.

Очевидно, что тетраэдры подобны и $k = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{SA_1B_1C_1} = \frac{1}{8} \cdot 1{,}9$$

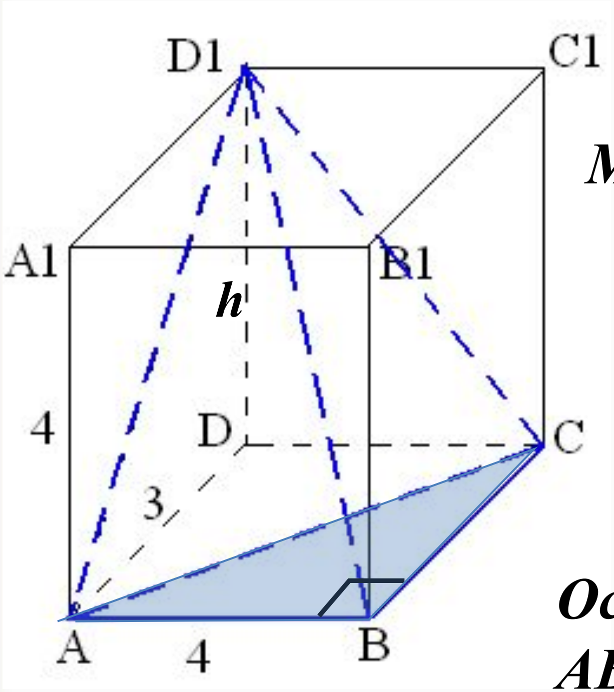
$$\Rightarrow V_{мног} = V_{SABC} - 4 \cdot \frac{1}{8} V_{SABC} = \frac{1}{2} V_{SABC} = 0{,}95$$

Ответ:

0	,	9	5

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AB=4, AD=3, AA_1=4.

№ 5



Многогранником является пирамида D_1ABC.

$$V_{D_1ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h_{пир}$$

$$h_{пир} = h_{пар} = D_1D = A_1A = 4$$

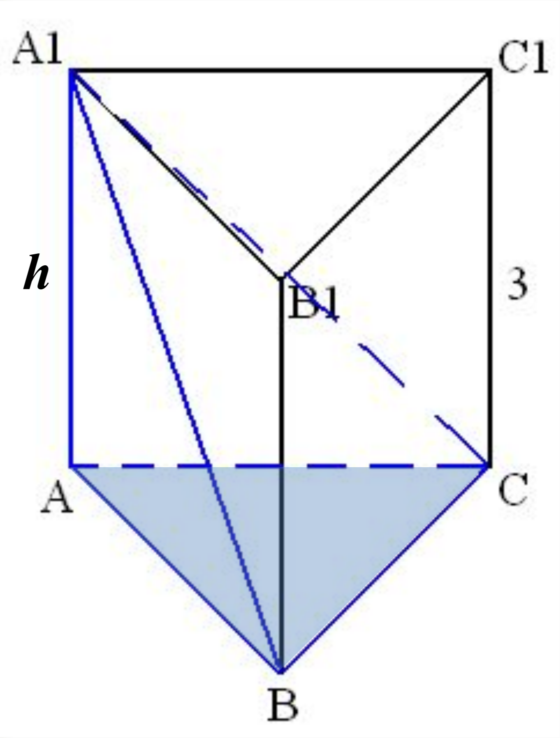
Основание – прямоугольный треугольник ABC с катетами 3 и 4.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 4 = 8$$

Ответ: $\boxed{8}$

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.

№ 6



Многогранником является пирамида A_1ABC.

$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

$$h = A_1A = 3$$

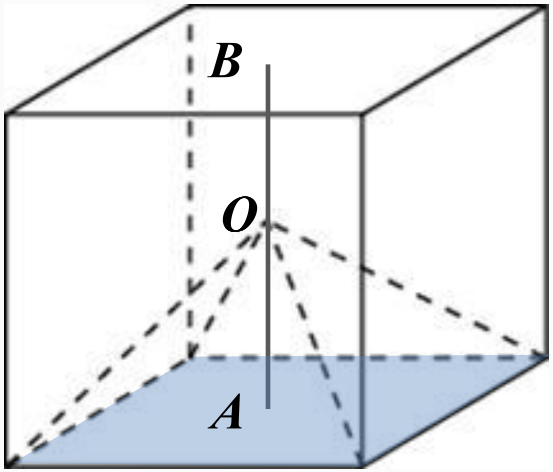
$$S_{ABC} = 2 \ (\text{по условию})$$

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 2 \cdot \cancel{3} = 2$$

Ответ: $\boxed{2}$

Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

№ 7



Куб можно рассматривать, как призму

Объём призмы равен $V_{пр} = S_{о.пр} h_{пр}$

Объём пирамиды равен $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{о.пир} h_{пир}$

$h_{пр} = AB = 2h_{пир} = 2AO \qquad S_{о.пир} = S_{о.пр}$

Подставим в формулы объемов и разделим первое на второе:

$$12 = S_{осн} \cdot 2OB$$

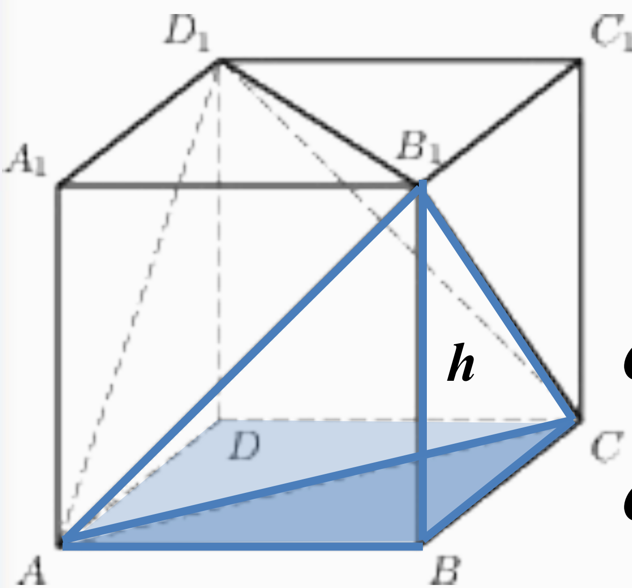
$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot OB$$

$$\div \quad \frac{12}{V_{пир}} = \frac{\cancel{S_{осн}} \cdot 2\cancel{OB}}{\frac{1}{3}\cancel{S_{осн}} \cdot \cancel{OB}} \quad \Rightarrow \quad V_{пир} = \frac{12 \cdot \frac{1}{3}}{2} = 2$$

Ответ: $\boxed{2}$

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5 . Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1 .

№ 8



Объем пирамиды AD_1CB_1 равен разности объемов исходного параллелепипеда и четырех «отсеченных» пирамид.

$$V_{AD_1CB_1} = V_{пар} - 4V_{B_1ABC} = 4,5 - 4\cdot 0,75 = 1,5$$

Сравним одну из них: B_1ABC с исходным параллелепипедом.

Объём параллелепипеда равен $V_{пар} = S_{о.пар} BB_1$

Объём пирамиды равен $V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} BB_1$

$$S_{о.пар} = 2S_{ABC}$$

Подставим в формулы объемов и разделим первое на второе:

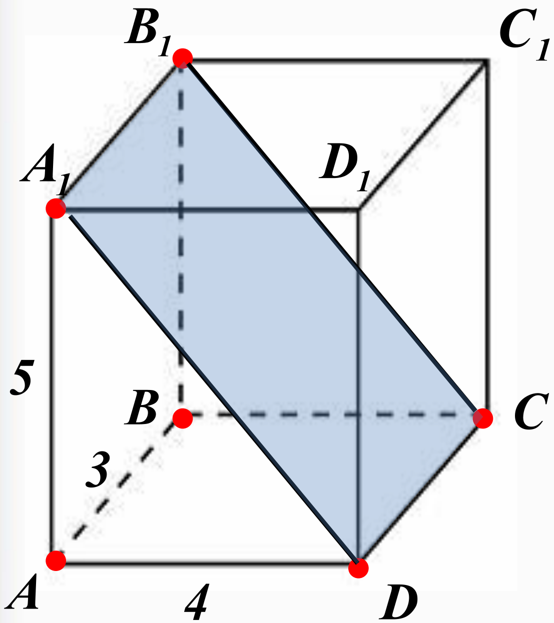
$$\left.\begin{array}{l} 4,5 = 2S_{ABC}h \\ V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}h \end{array}\right| \div \quad \frac{4,5}{V_{B_1ABC}} = \frac{2\cancel{S_{ABC}}\cancel{h}}{\frac{1}{3}\cancel{S_{ABC}}\cancel{h}} \quad \Rightarrow \quad V_{B_1ABC} = \frac{4,5\cdot\frac{1}{3}}{2} = 0,75$$

Ответ:

1	,	5

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=5$.

№ 9



Диагональное сечение A_1B_1CD делит прямоугольный параллелепипед на два равных многогранника.

Объем одного из них требуется найти..

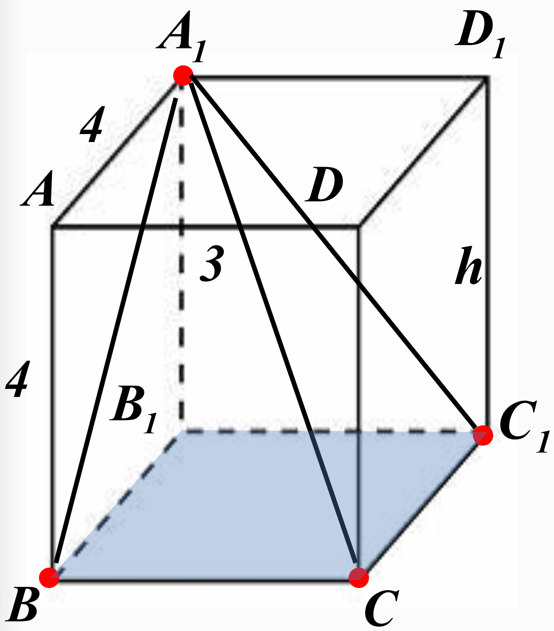
$$V_{мн} = \frac{V_{пар}}{2} = \frac{AB \cdot AD \cdot AA_1}{2} =$$

$$= \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 30$$

Ответ: | 3 | 0 |

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B, C, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=4$.

№ 10



Лучше всего расположить параллелепипед, как на рисунке.

Многогранник, объем которого требуется найти – пирамида $A_1B_1C_1CB$.

Пирамида и параллелепипед имеют общее основание и высоту.

Объём параллелепипеда равен $V_{пар} = S_{осн}h$

Объём пирамиды равен $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{осн}h$

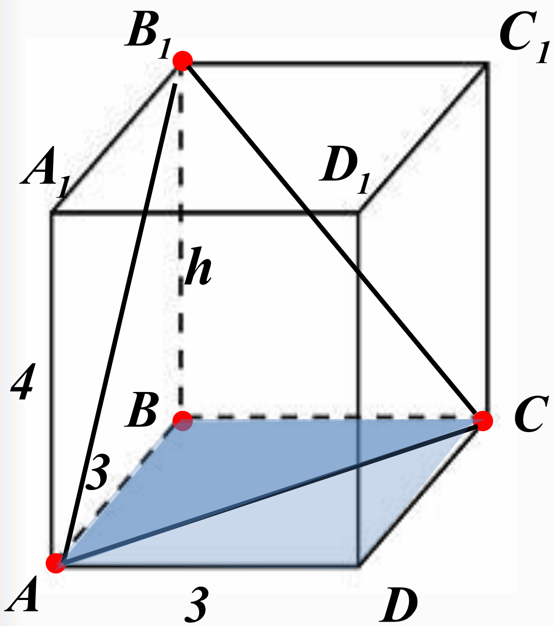
=> Объем пирамиды в три раза меньше объема параллелепипеда

$$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 16$$

Ответ: | 1 | 6 |

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AB=3, AD=3, AA_1=4.

№ 11



$$V_{пар} = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$$

Многогранник, объем которого требуется найти – пирамида B_1BAC.

Объём параллелепипеда равен $V_{пар} = S_{о.пар} h_{пар}$

Объём пирамиды равен $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{о.пир} h_{пир}$

$$h_{пар} = h_{пир} \qquad S_{о.пар} = 2S_{о.пир}$$

Подставим в формулы объемов и разделим первое на второе:

$$36 = 2S_{о.пир} h$$

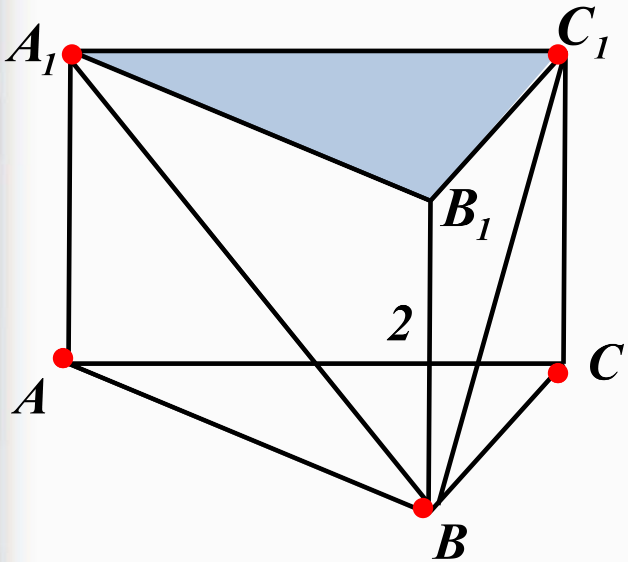
$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{о.пир} h$$

$$\div \quad \frac{36}{V_{пир}} = \frac{2\cancel{S_{о.пир}}\cancel{h}}{\frac{1}{3}\cancel{S_{о.пир}}\cancel{h}} \quad \Rightarrow \quad V_{пир} = \frac{36 \cdot \frac{1}{3}}{2} = 6$$

Ответ: $\boxed{6}$

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро =2.

№ 12



Объем многогранника равен разности объемов исходной призмы и пирамиды $A_1B_1C_1$.

$$h_{пир} = h_{пр} = 2 \qquad S_{о.пир} = S_{о.пр} = S_{A_1B_1C_1} = 3$$

$$V_{пр} = S_{о.пр} h_{пр} = 3 \cdot 2 = 6$$

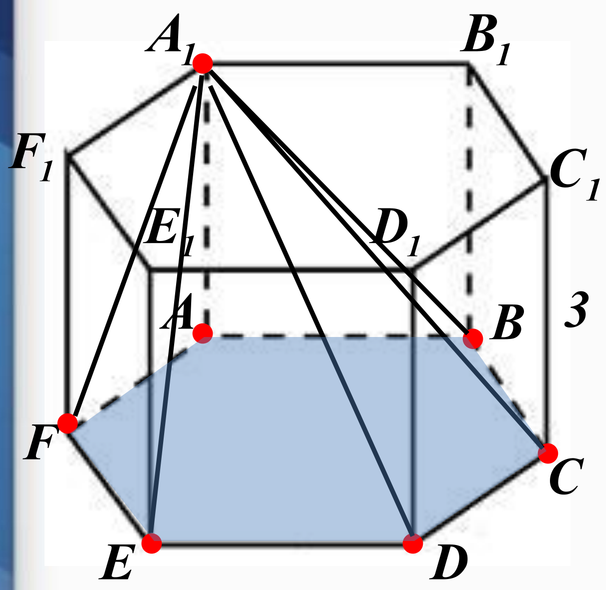
$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{о.пир} h_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 2$$

Объем многогранника= $V_{пр} - V_{пир} = 6 - 2 = 4$

Ответ: $\boxed{4}$

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

№ 13



Многогранник, объем которого требуется найти – пирамида $A_1ABCDEF$.

$$h_{пир} = h_{пр} = 3$$

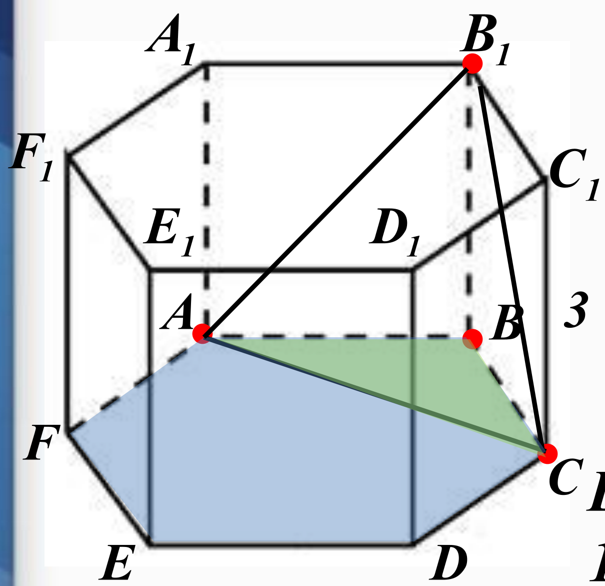
$$S_{о.пир} = S_{о.пр} = S_{A_1B_1C_1} = 4$$

$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{о.пир} h_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4$$

Ответ: $\boxed{4}$

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.

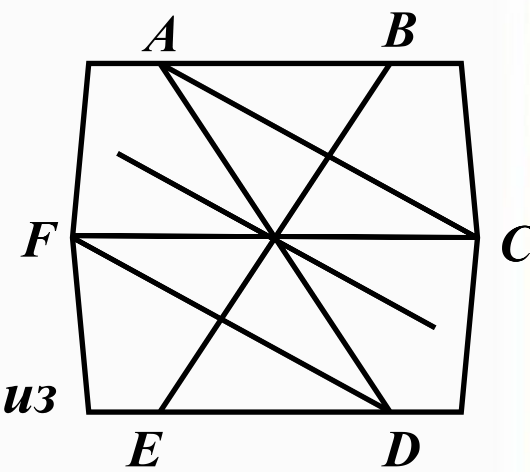
№ 14



Многогранник, объем которого требуется найти – пирамида B_1ABC.

$$h_{пир} = h_{пр} = 3$$

Сравним площади оснований.



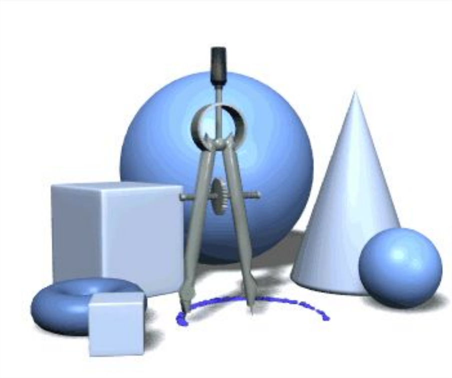
Шестиугольник составлен из 12 равных треугольников, а треугольник ABC - из двух.

=> S_{ABC} в шесть раз меньше площади шестиугольника.

=> S_{ABC} =6:6=1

$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{ABC} h_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1$$

Ответ: $\boxed{1}$



Спасибо за работу.