# «Методы оптимальных решений»
# № 1. Задачи линейного программирования и графический метод решения

Д.ф.-м.н. Михайлова М.В.

Автономная некоммерческая организация высшего образования
ИНСТИТУТ МЕЖДУНАРОДНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ
INSTITUTE OF INTERNATIONAL ECONOMIC RELATIONS

# МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

ТЕМА № 1 Линейное программирование
(лекция)

Преподаватель: Ларионов Владимир Борисович к.т.н..
**Контакты: lvb_imes@mail.ru**

# 1. Задачи математического программирования

- ***Экстремальными*** называются задачи, в которых ставится цель – достигнуть наибольшего или наименьшего значения данной функции при определенных ограничениях на переменные, от которых эта функция зависит.
- Ограничения задаются в виде систем уравнений или неравенств, которые называются ***системами ограничений***. Функция называется ***целевой функцией***.
- ***Решение экстремальной задачи*** – это набор значений неизвестных, удовлетворяющих системе ограничений, при котором данная функция достигает своего экстремума – ***оптимального решения***.
- Математическая дисциплина, занимающаяся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения, называется ***математическим программированием.***

# 1. Задачи математического программирования

**Различают:**

- **Линейное** программирование, в котором и система ограничений и целевая функция линейны.
- **Нелинейное** программирование (**квадратическое**, **дробно-линейное** и др.).
- **Параметрическое** программирование, в котором исходные данные зависят от некоторого параметра.
- **Целочисленное** программирование, в котором переменные являются целыми числами.
- **Выпуклое** программирование, в котором ищется максимум вогнутой функции на выпуклом множестве.
- **Стохастическое** программирование, в котором либо целевая функция, либо ограничения содержат случайные величины.
- **Динамическое** программирование, которое учитывает фактор времени.
- И другие виды.

# 1. Задачи математического программирования

Наряду с приведенными выше ***однокритериальными задачами*** (имеющими одну целевую функцию) часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске оптимального решения при наличии несводимых друг к другу критериев оптимальности (несколько целевых функций).

*Например,* принятие решения о строительстве дороги в объезд города должно учитывать такие факторы, как:

- выигрыш города в целом по соображениям экологии,
- проигрыш отдельных предприятий и фирм
- и многие другие.

Если такие задачи решаются методами математического программирования, то говорят о задачах ***многокритериальной оптимизации.***

Эти задачи могут носить как линейный, так и нелинейный характер.

# 2. Различные формы задач линейного программирования

Различают три основные формы ЗЛП:

1) **Стандартная** ЗЛП имеет вид:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$x_1 \ge 0, ..., x_n \ge 0$$

2) **Каноническая** ЗЛП имеет вид:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$x_1 \ge 0, ..., x_n \ge 0$$

3) **Общая** ЗЛП имеет вид:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = \overline{1,s}, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{s+1,m}, \end{cases}$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$x_1 \ge 0, ..., x_k \ge 0, \quad k < n$$

# 2. Различные формы задач линейного программирования

***Теорема.*** Все эти задачи эквивалентны.

**Замечание:** Любую ЗЛП можно свести к каноническому виду:

1) если $z \to \min$ , то $f = -z \to \max$ ;

2) если $g \le b$ , то $g + x = b, \quad x \ge 0$ ;

3) если $g \ge b$ , то $g - x = b, \quad x \ge 0$ ;

4) если переменная не имеет условия неотрицательности, то она представляется в виде разности двух неотрицательных переменных.

# Пример 1

Привести задачу линейного программирования к каноническому виду.

$$\begin{cases} y - x \le 3, \\ y + 3x \ge 3, \\ x \le 3, \end{cases}$$

$$y \ge 0, \quad f = 2x - 3y \to \min.$$

РЕШЕНИЕ.

Неравенство $y - x \le 3$ представим в виде равенства путем добавления к левой части неотрицательной переменной u: $y - x + u = 3, \quad u \ge 0.$

Неравенство $y + 3x \ge 3$ представим в виде равенства путем вычитания из левой части неотрицательной переменной v: $y + 3x - v = 3, \quad v \ge 0.$

Неравенство $x \le 3$ представим в виде равенства путем добавления к левой части неотрицательной переменной c: $x + c = 3, \quad c \ge 0.$

Целевую функцию заменим на: $g = -f = -2x + 3y \to \max.$

Так как на переменную x не наложено условие неотрицательности, то заменим ее разностью двух неотрицательных переменных a и b:

$$x = a - b, \quad a \ge 0, \quad b \ge 0.$$

# Пример 1 (продолжение)

Получим каноническую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} y - a + b + u = 3, \\ y + 3a - 3b - v = 3, \\ a - b + c = 3, \end{cases}$$

$$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, y \geq 0,$$

$$g = -2a + 2b + 3y \to \max.$$

# 3. Графический способ решения ЗЛП

Графический способ применим, если:

1) $n=2$, $f=c_1x+c_2y\to max(min)$ 2) в канонической форме $n=m+2$.

Строится на графике область допустимых решений, определяемая системой ограничений и условиями неотрицательности, в результате возможны случаи:

- ОДР – пустое множество, тогда задача не имеет решения;
- ОДР – единственная точка, тогда оптимальное решение будет в этой точке.
- ОДР – выпуклый многоугольник:

А) найти координаты всех угловых точек и вычислить значение целевой функции в этих точках. Наибольшее значение определяет максимум функции, а наименьшее значение – минимум. Если в двух соседних точках значение максимума (минимума) совпадает, это означает, что экстремум достигается на отрезке, соединяющем эти точки.

Б) построить радиус-вектор с координатами $(c_1,c_2)$, он задает направление возрастания целевой функции. Строим мысленно перпендикуляр к этому вектору и параллельно будем его переносить вдоль заданного вектора. Та точка, через которую мы входи в ОДР будет содержать минимум функции, а та точка, через которую будем покидать ОДР содержит максимум функции. Определим координаты указанной точки и значение целевой функции в ней.

- ОДР – это выпуклая неограниченная область, тогда экстремум может находиться либо в угловой точке, либо на отрезке, либо уходить в бесконечность, т.е. не существовать.

# Пример 2

Найти графическим методом решение задачи линейного программирования

$$\begin{cases} y - x \le 3, \\ y + 3x \ge 3, \\ x \le 3, \end{cases}$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0,$$

$$f = 2x - 3y \to \min.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем систему ограничений к виду

$$\begin{cases} y \le 3 + x, \\ y \ge 3 - 3x, \\ x \le 3, \end{cases}$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

# Пример 2 (продолжение)

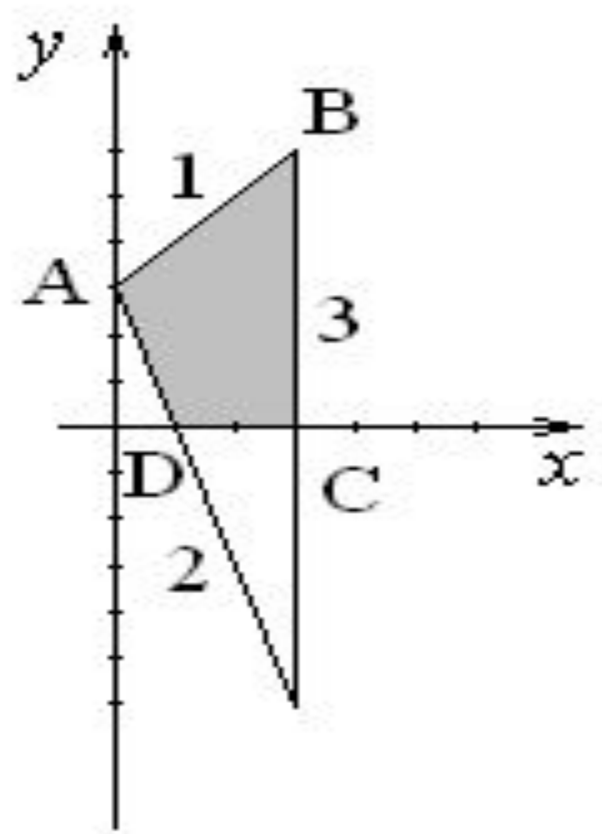
Построим соответствующую область на плоскости *OXY*:

- Границей первого неравенства $y \le 3+x$ является прямая $y=3+x$, проходящая через точки (0;3) и (3;6). Так как в этом неравенстве ***y*** меньше выражения, стоящего после знака равенства, то выбираем ту полуплоскость, которая расположена ниже прямой.
- Границей второго неравенства $y \ge 3-3x$ является прямая $y=3-3x$, проходящая через точки (0;3) и (3;-6). Так как в этом неравенстве ***y*** больше выражения, стоящего после знака равенства, то выбираем ту полуплоскость, которая расположена выше прямой.
- Границей третьего неравенства $x \le 3$ является прямая $x=3$, которая перпендикулярна оси *OY*. Так как $x \le 3$, то выбираем левую полуплоскость.
- Условия неотрицательности $x \ge 0$ и $y \ge 0$ ограничивают нашу область первой координатной четвертью.

# Пример 2 (продолжение)

Таким образом, получили область ABCD:

Найдем координаты вершин этой области из решения систем уравнений:




$$A:\begin{cases} y = 3 + x, \\ y = 3 - 3x, \end{cases} \qquad B:\begin{cases} y = 3 + x, \\ x = 3, \end{cases}$$

$$C:\begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases} \qquad D:\begin{cases} y = 0, \\ y = 3 - 3x. \end{cases}$$

# Пример 2 (продолжение)

Решим системы:

$$A:\begin{cases} y = 3 + x, \\ y = 3 - 3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 + x, \\ 3 + x = 3 - 3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 3. \end{cases} \Rightarrow A(0;3)$$

$$B:\begin{cases} y = 3 + x, \\ x = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 6. \end{cases} \Rightarrow B(3;6)$$

$$C:\begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow C(3;0)$$

$$D:\begin{cases} y = 0, \\ y = 3 - 3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow D(1;0)$$

# Пример 2 (продолжение)

Вычислим значения целевой функции f=2x-3y в вершинах области:

f(A)=2·0-3·3=-9,

f(B)=2·3-3·6=6-18=-12,

f(C)=2·3-3·0=6,

f(D)=2·1-3·0=2.

Очевидно, что минимум достигается в точке B, следовательно, решение имеет вид:

$$f_{\min} = -12$$

при x=3 и y=6 целевая функция достигает

# Пример 3

Решить графическим способом ЗЛП, имеющую более 2-х переменных:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 6, \\ 10x_1 - 3x_2 + x_6 = 15, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,6,$$

$$f = 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 - x_6 \to \max.$$

Эта задача имеет канонический вид, причем число переменных n=6, а число ограничений m=4. Поэтому графический метод можно применить.

# Пример 3 (продолжение)

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что в качестве базисных переменных будут $x_3, x_4, x_5, x_6$ (они входят каждое только в одно уравнение системы ограничений), тогда переменные $x_1$ и $x_2$ будут свободными. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 10 + 2x_1 - 5x_2, \\ x_4 = 1 - x_1 + x_2, \\ x_5 = 6 - x_1 - 2x_2, \\ x_6 = 15 - 10x_1 + 3x_2 \end{cases}.$$

Подставим эти выражения в целевую функцию:

$$f = 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 - x_6 =$$
$$= 5x_1 - x_2 - 2(10 + 2x_1 - 5x_2) + 5(1 - x_1 + x_2) + 5(6 - x_1 - 2x_2) - (15 - 10x_1 + 3x_2) =$$
$$= x_1 + x_2 \to \max.$$

# Пример 3 (продолжение)

Так как все переменные $x_i \geq 0$, получим

$$\begin{cases} x_3 = 10 + 2x_1 - 5x_2 \geq 0, \\ x_4 = 1 - x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_5 = 6 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_6 = 15 - 10x_1 + 3x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Из этих неравенств выразим переменную $x_2$ через $x_1$:

$$\begin{cases} x_2 \leq \frac{1}{5}(2x_1 + 10), \\ x_2 \geq x_1 - 1, \\ x_2 \leq \frac{1}{2}(6 - x_1), \\ x_2 \geq \frac{1}{3}(10x_1 - 15). \end{cases}$$

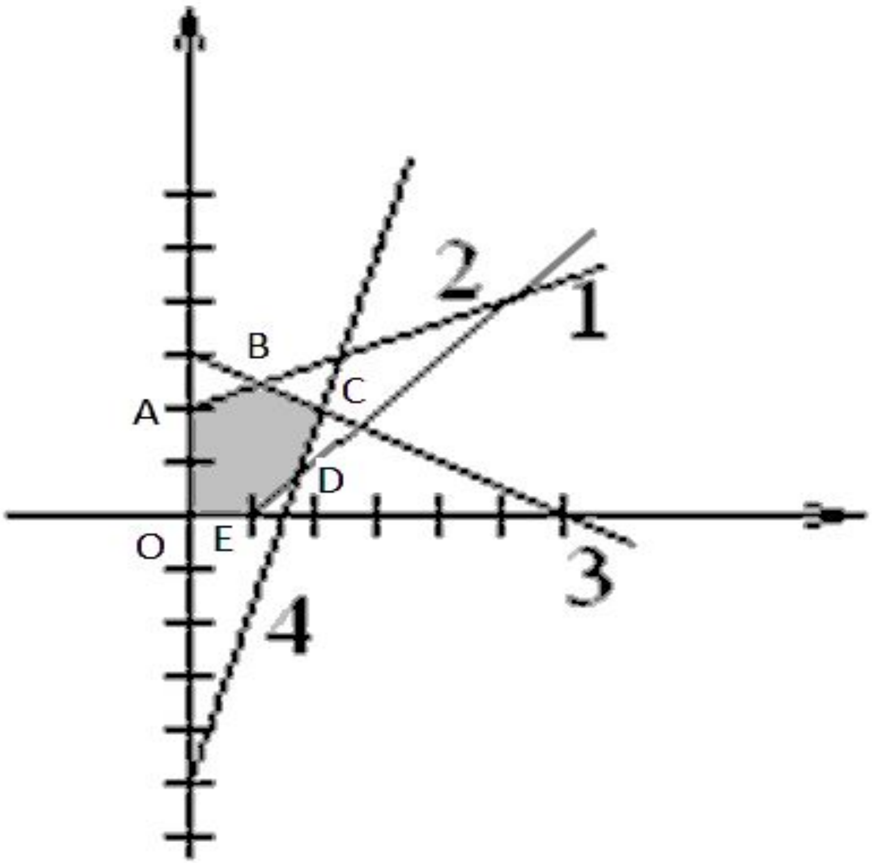
# Пример 3 (продолжение)

Построим ОДР для этих ограничений на плоскости $x_1Ox_2$:

- Границей первого ограничения $x_2 \le (2x_1 + 10)/5$ выступает прямая, проходящая через точки (0,2) и (5,4). Так как неравенство содержит знак ≤, то выбираем нижнюю полуплоскость.
- Границей второго ограничения $x_2 \ge x_1 - 1$ выступает прямая, проходящая через точки (1,0) и (5,4). Так как неравенство содержит знак ≥, то выбираем верхнюю полуплоскость.
- Границей третьего ограничения $x_2 \le (6 - x_1)/2$ выступает прямая, проходящая через точки (6,0) и (0,3). Так как неравенство содержит знак ≤, то выбираем нижнюю полуплоскость.
- Границей четвертого ограничения $x_2 \ge (10x_1 - 15)/3$ выступает прямая, проходящая через точки (3,5) и (0,-5). Так как неравенство содержит знак ≥, то выбираем верхнюю полуплоскость.

# Пример 3 (продолжение)

Таким образом, получили область ABCDEO



# Пример 3 (продолжение)

Найдем вершину этого многоугольника, в которой достигается максимум целевой функции.

Для этого построим радиус-вектор с координатами (1;1), направление которого показывает направление возрастания целевой функции .

Строим мысленно перпендикуляр к этому вектору и параллельно будем его переносить вдоль заданного вектора.

Та точка, через которую мы будем покидать ОДР, содержит максимум функции.

Это точка С. Найдем ее координаты.

Так как точка С лежит на пересечении 3-ей и 4-ой прямых, то решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(6 - x_1), \\ x_2 = \frac{1}{3}(10x_1 - 15). \end{cases}$$

# Пример 3 (продолжение)

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}(6 - x_1), \\ x_2 = \dfrac{1}{3}(10x_1 - 15). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_2 = 18 - 3x_1, \\ 6x_2 = 20x_1 - 30. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 18 - 3x_1 = 20x_1 - 30 \\ x_2 = 3 - x_1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 48 = 23x_1 \\ x_2 = 3 - x_1/2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{48}{23}, \\ x_2 = 3 - \dfrac{48}{23} \cdot \dfrac{1}{2} = 3 - \dfrac{24}{23} = \dfrac{45}{23}. \end{cases}$$

В результате $x_1 = \dfrac{48}{23}, \quad x_2 = \dfrac{45}{23}$ и $f_{\max} = \dfrac{48+45}{23} = \dfrac{93}{23}$

# Тестовые вопросы

1. Максимальное значение целевой функции $z = 3x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно …

А) 6

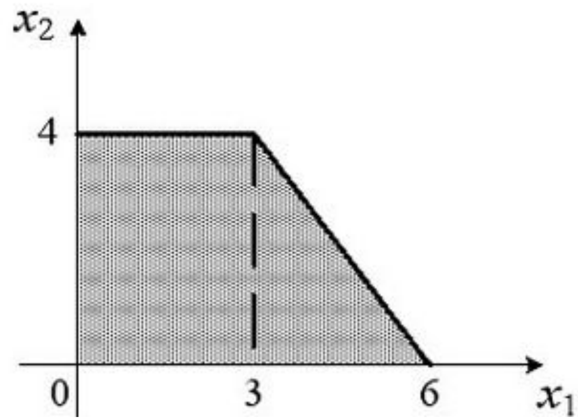
Б) 10

В) 14

Г) 16

# Тестовые вопросы

2. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид:




Тогда максимальное значение функции $z = 3x_1 + 5x_2$ равно …

А) 27

Б) 29

В) 20

Г) 31

# Тестовые вопросы

3. Минимальное значение целевой функции $z = 2x_1 + x_2$ при ограничениях $\begin{cases} x_2 \le x_1, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 2, \end{cases}$ равно …

А) 8

Б) 10

В) 6

Г) 4

# Тестовые вопросы

4. Математическая дисциплина, занимающаяся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения, называется …

5. Задача вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = \overline{1,m}$$
$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

является …

a) канонической ЗЛП

b) общей ЗЛП

c) стандартной ЗЛП

d) задачей нелинейного программирования

# Тестовые вопросы

6. Задача вида
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$
$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$
является …

a) канонической ЗЛП
b) общей ЗЛП
c) стандартной ЗЛП
d) задачей нелинейного программирования

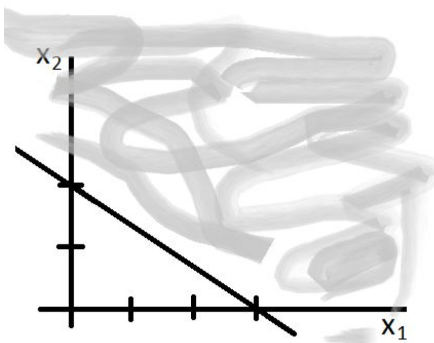
7. Множество всех планов задачи линейного программирования называется …

a) Допустимой областью
b) Критической областью
c) Оптимальным решением
d) Решением задачи

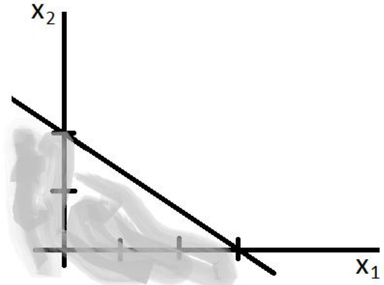
# Тестовые вопросы

8. Выберите полуплоскость, определяемую неравенством $2x_1 - 3x_2 \le 6$

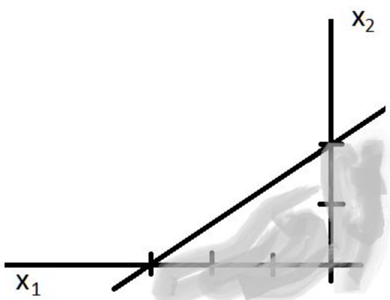
А)



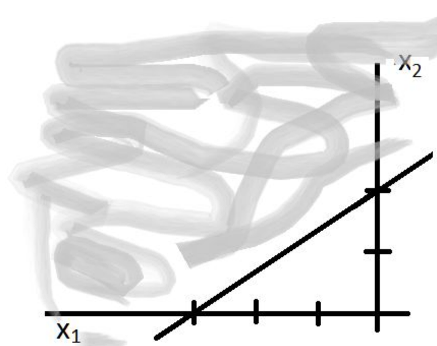

Б)




В)

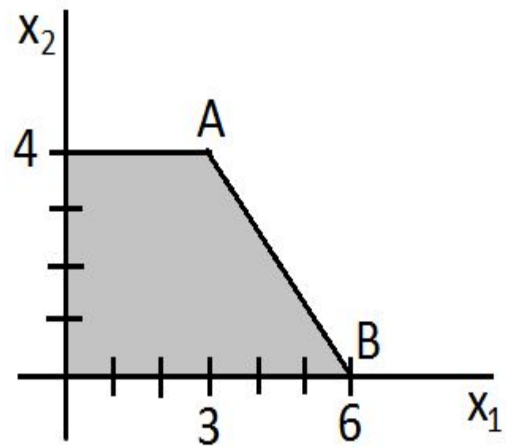



Г



# Тестовые вопросы

9. В какой точке выделенного многоугольника достигается экстремум $x_1 - 5x_2 \to \max$




А) (0;4)

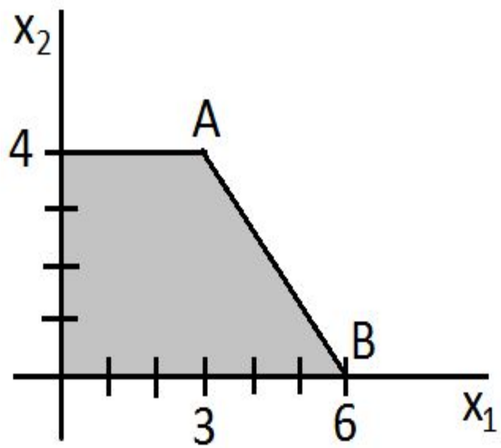
Б) (3;4)

В) (6;0)

Г) в любой точке отрезка АВ

# Тестовые вопросы

10. В какой точке выделенного многоугольника достигается экстремум $4x_1 + 3x_2 \to \max$




А) (0;4)

Б) (3;4)

В) (6;0)

Г) в любой точке отрезка АВ

# Задачи для самостоятельного решения

1. Построить множество решений неравенств:

$$а)\ 3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$б)\ 3x_1 - 4x_2 + 12 \leq 0$$

2. Построить множество решений систем неравенств:

$$а)\ \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \\ 0 \leq x_2 \leq 6. \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. Решить геометрически задачи:

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$а)\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \min,$$

$$б)\ \begin{cases} -x + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{cases}$$