

9.3. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

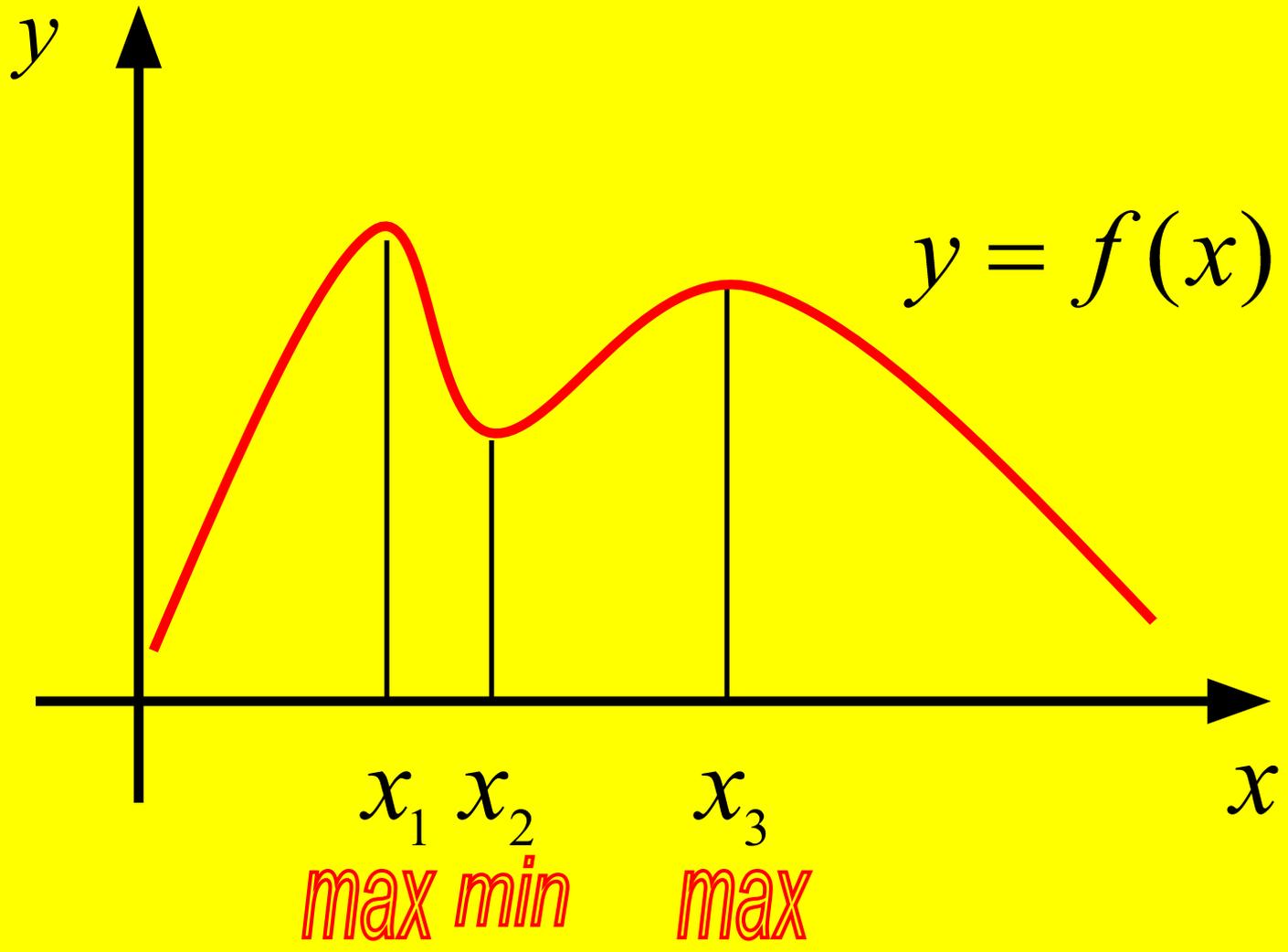
$$f(x) \leq f(x_0)$$

Точка x_1 называется точкой минимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_1)$$

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно максимумом и минимумом функции.

Максимум и минимум функции называется экстремумом функции.



На одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может быть, что минимум в одной точке больше максимума в другой.

Максимум или минимум функции на некотором промежутке не являются в общем случае наибольшим и наименьшим значением функции.

Если в некоторой точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум, то в некоторой окрестности этой точки выполняется теорема Ферма и производная функции в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0$$

**Однако, функция может иметь экстремум в точке,
в которой она не дифференцируема.**

Например, функция

$$y = |x|$$

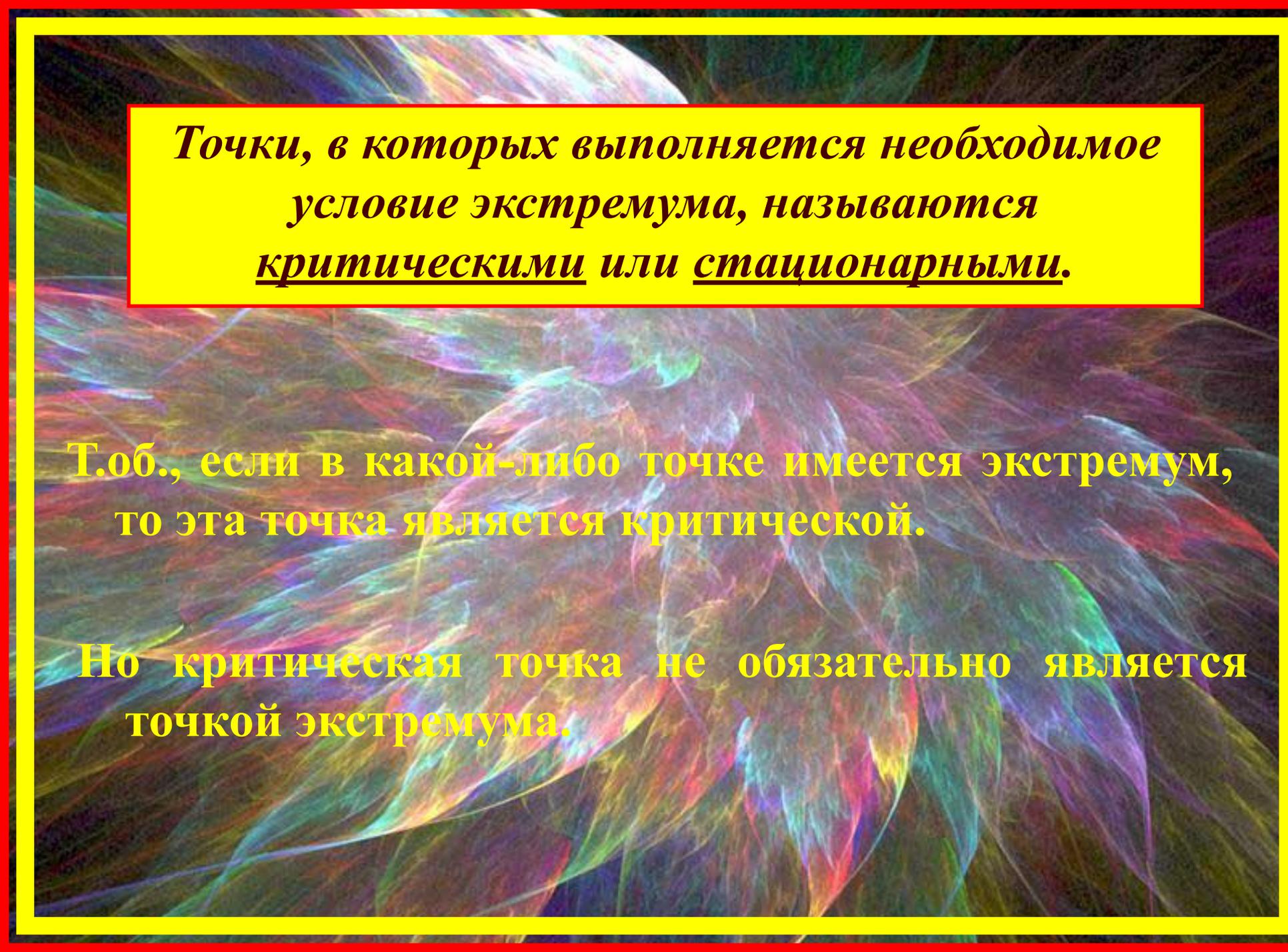
имеет минимум в точке

$$x = 0$$

но она в этой точке не дифференцируема.

необходимое условие экстремума:

Для того, чтобы функция $y=f(x)$ имела экстремум в точке x_0 , необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.



Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называются критическими или стационарными.

Т.об., если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка является критической.

Но критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Примеры

Найти критические точки и экстремумы функций:

1

$$y = x^2$$

Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

$$y' = (x^2)' = 2x$$

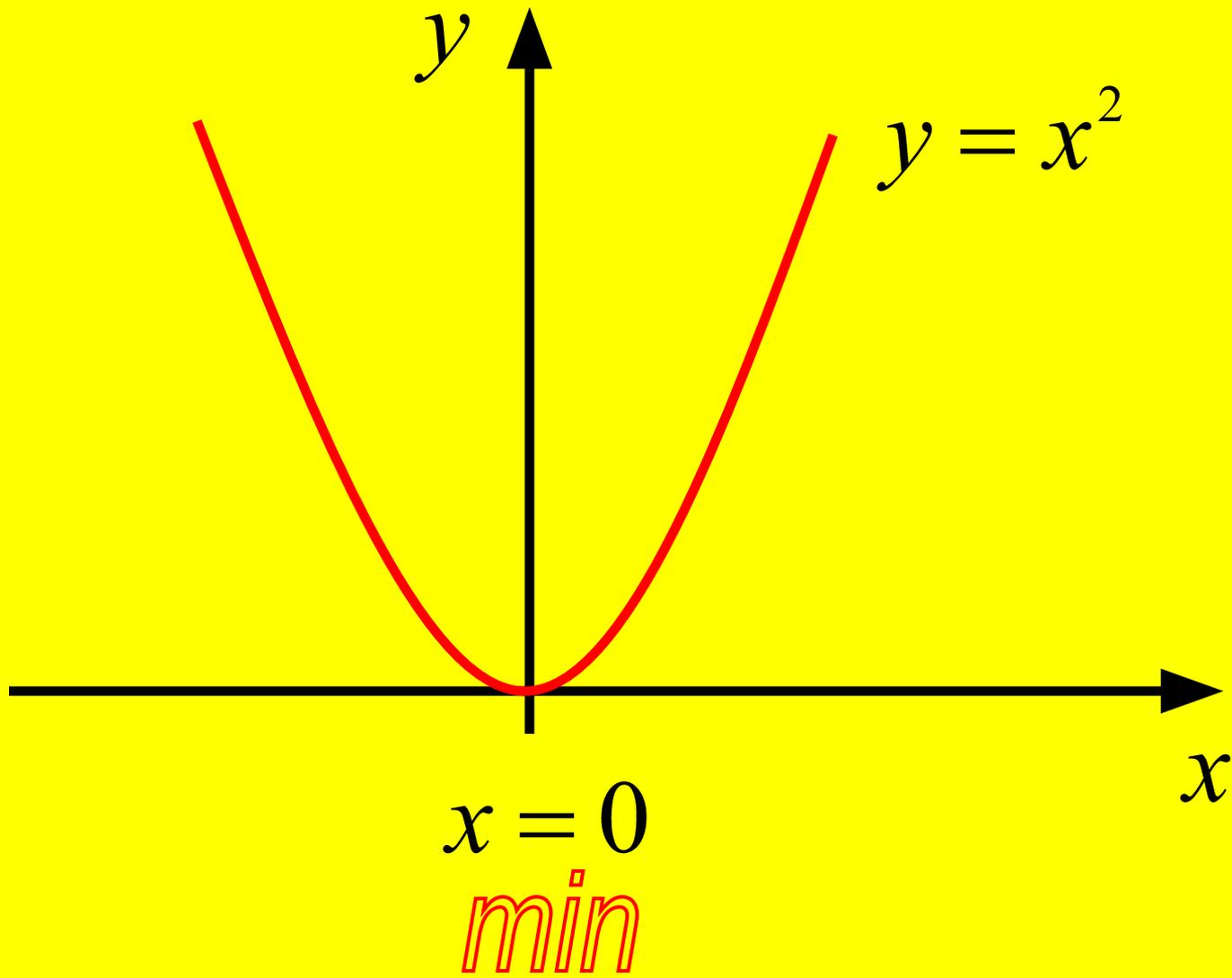
$$y' = 2x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

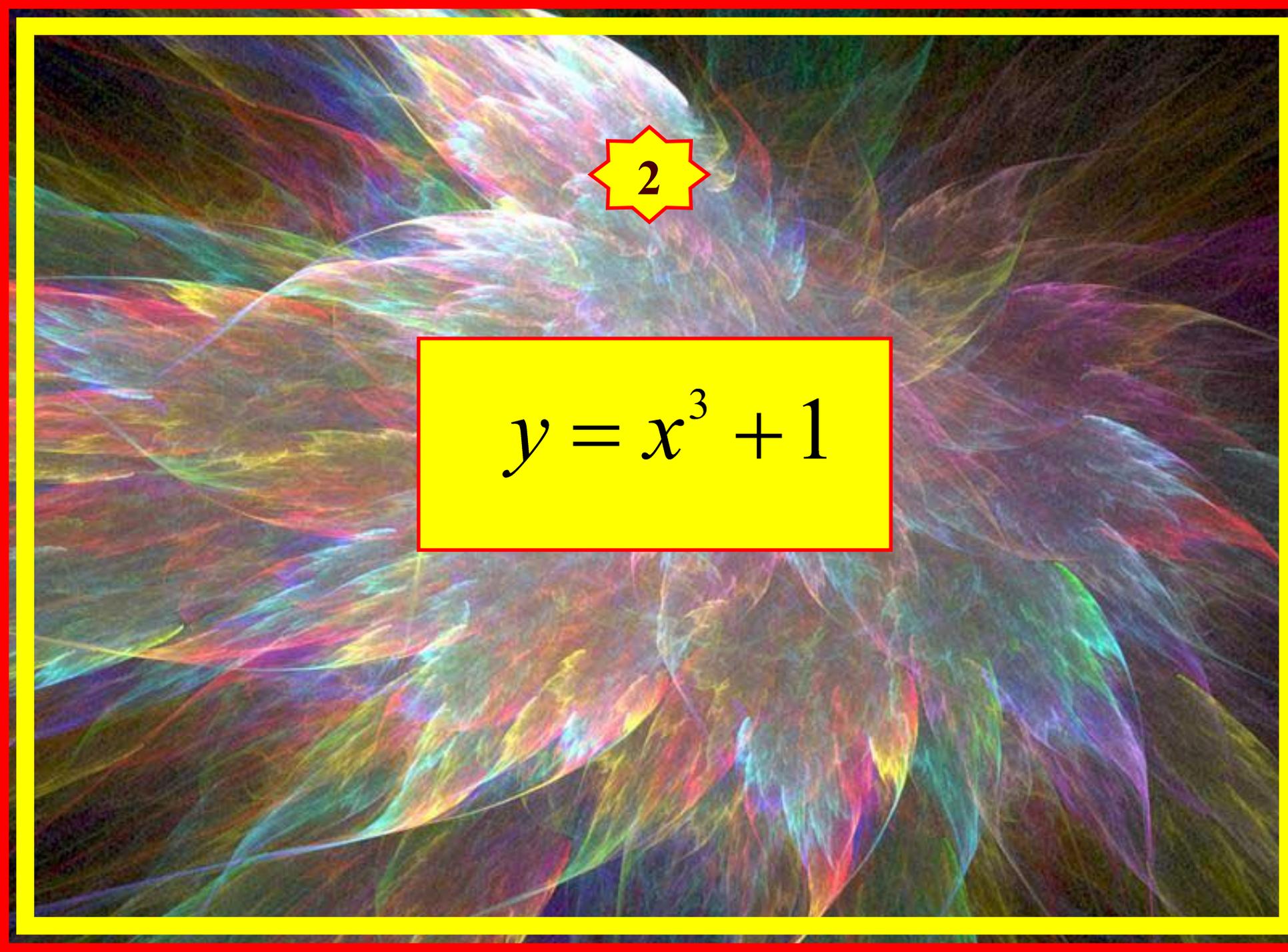
$$x = 0$$

- критическая точка

$$y = 0$$







2

$$y = x^3 + 1$$

Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

$$y' = (x^3 + 1)' = 3x^2$$

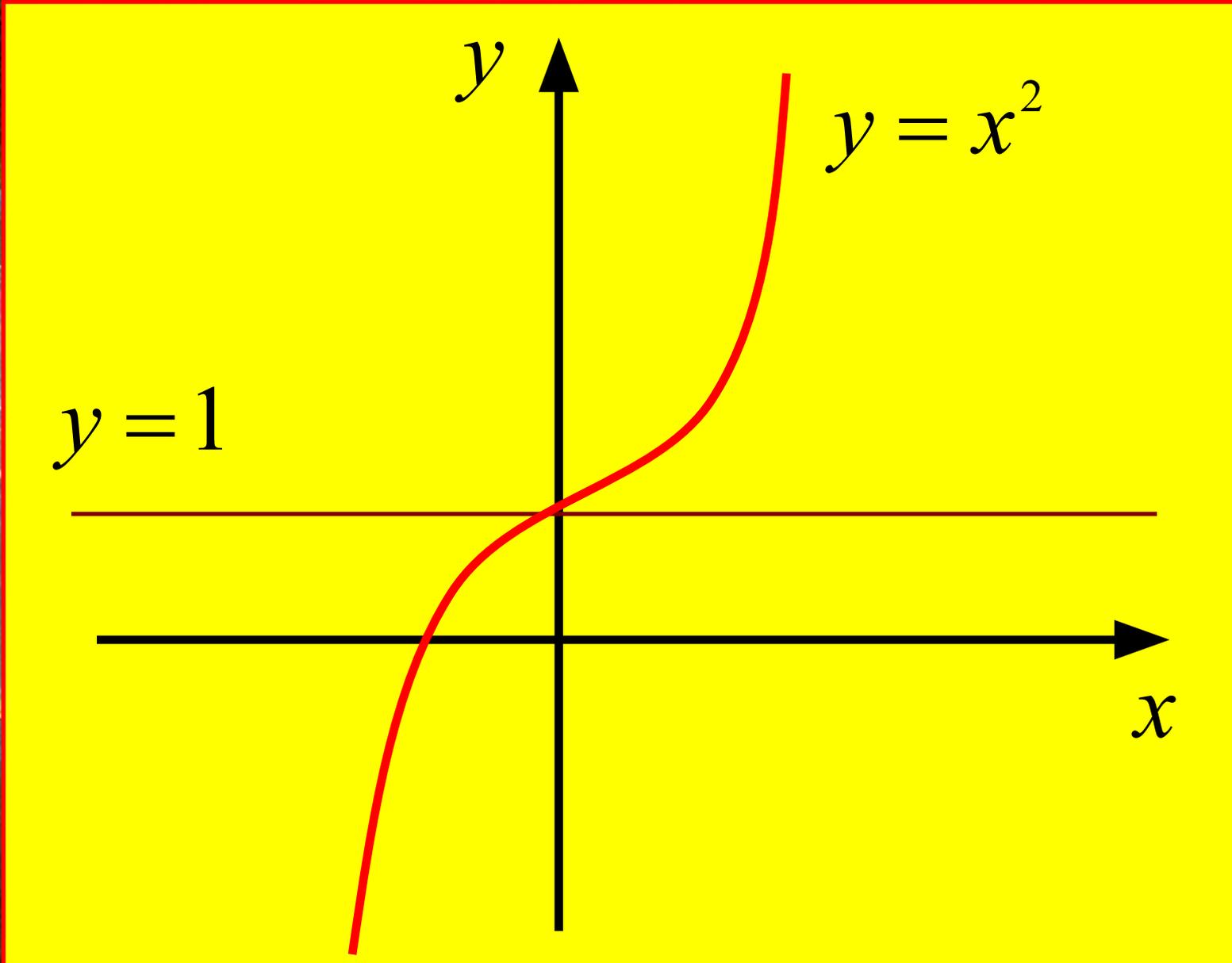
$$y' = 3x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$x = 0$$

- критическая точка

$$y = 1$$





первое достаточное условие экстремума

Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, а если с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

Доказательство:

Пусть производная меняет знак с плюса на минус,
т.е. на некотором интервале

$$(a; x_0) \quad f'(x) > 0$$

а на некотором интервале

$$(x_0; b) \quad f'(x) < 0$$

Тогда функция $y=f(x)$ будет возрастать на $(a; x_0)$

и будет убывать на $(x_0; b)$

По определению возрастающей функции

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in (a; x_0)$$

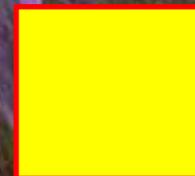
Для убывающей функции

$$f(x_0) < f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in (x_0; b)$$



x_0 - точка максимума.

Аналогично доказывается для минимума.



**схема исследования
функции на экстремум**

1

Найти производную функции

$$y' = f'(x)$$

2

Найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует.

3

Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки.

4

Найти экстремум функции.

Пример

Исследовать функцию на экстремум:

$$y = x(x - 1)^3$$

Решение:

Применим схему исследования функции на экстремум:

1

Находим производную функции:

$$\begin{aligned}y' &= (x(x-1)^3)' = (x-1)^3 + 3x \cdot (x-1)^2 = \\ &= (x-1)^2 (x-1+3x) = (x-1)^2 (4x-1)\end{aligned}$$



2

Находим критические точки:

$$(x - 1)^2 (4x - 1) = 0$$

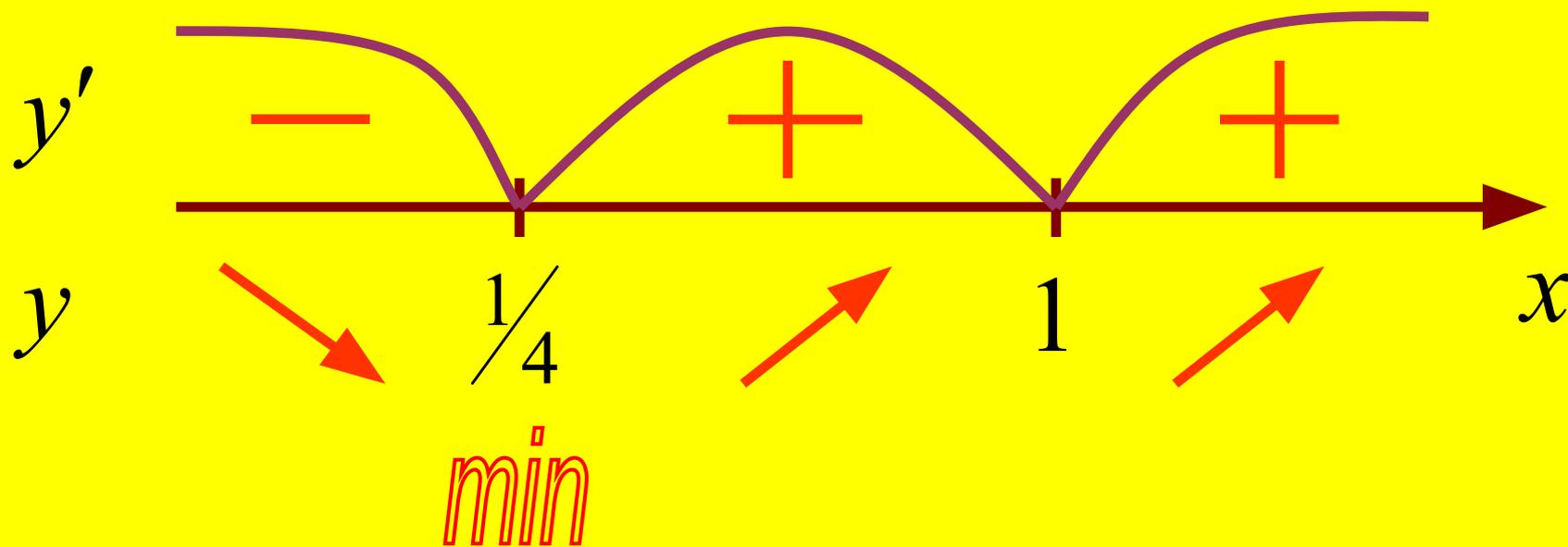
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{4}$$

критические точки

3

Иследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки:



В точке $x=1$ экстремума нет.



4

Находим экстремум функции:

$$f_{\min} \left(\frac{1}{4} \right) = -\frac{27}{256}$$

второе достаточное условие экстремума:

Если первая производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна нулю, а вторая производная в этой точке положительна, то x_0 есть точка минимума, а если вторая производная отрицательна, то x_0 есть точка максимума.

Доказательство:

Пусть

$$f'(x_0) = 0$$

$$f''(x_0) > 0$$

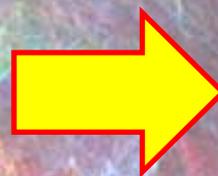
следовательно

$$f''(x) = (f'(x))' > 0$$

и в некоторой окрестности точки x_0 , т.е.

функция $f'(x)$ будет возрастать на $(a; b)$
содержащем точку x_0 .

Но $f'(x_0) = 0$



на интервале $(a; x_0)$ $f'(x) > 0$

а на интервале $(x_0; b)$ $f'(x) < 0$

Таким образом, функция $f'(x)$

при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, следовательно эта точка является точкой минимума.

Аналогично доказывается случай для максимума функции.

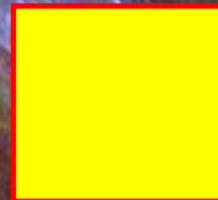


Схема исследования функции на экстремум в этом случае аналогична предыдущей, но третий пункт следует заменить на:

3

Найти вторую производную и определить ее знак в каждой критической точке.

Из второго достаточного условия следует, что если в критической точке вторая производная функции не равна нулю, то эта точка является точкой экстремума.

Обратное утверждение не верно: если в критической точке вторая производная функции равна нулю, то эта точка также может являться точкой экстремума.

В этом случае для исследования функции необходимо использовать первое достаточное условие экстремума.