



Лекция № 5

«Методы кодирования»

Код Хэмминга.

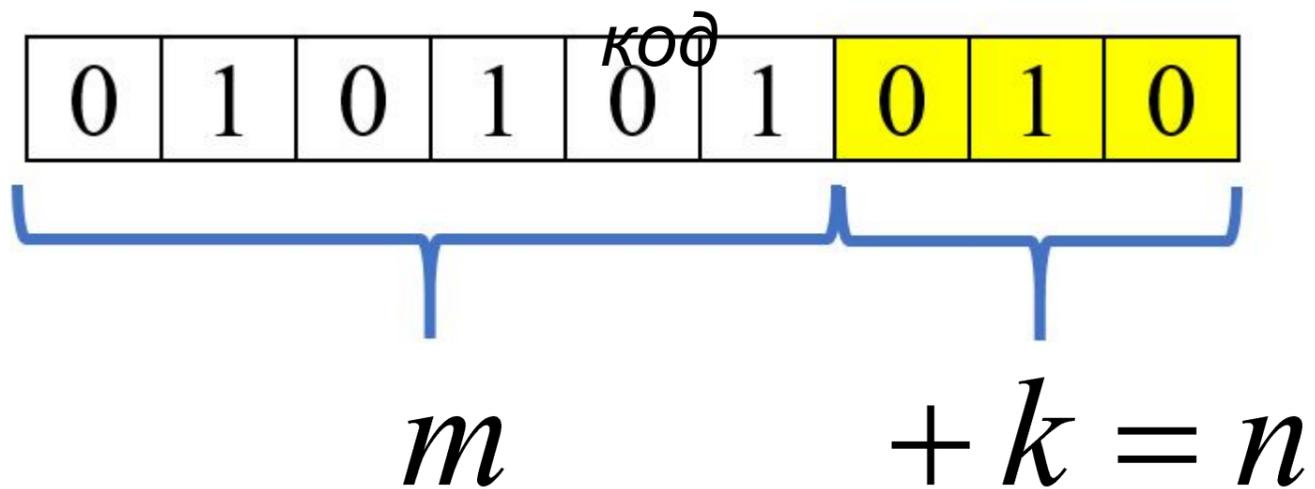
Ведущий преподаватель: канд. техн. наук, доцент кафедры ИУТС Альчаков Василий Викторович

2 КОД ХЭММИНГА

Линейные и систематические коды

Систематическими называют такие коды, в которых информационные и корректирующие символы расположены по строго определенной системе и всегда занимают строго определенные места в кодовых комбинациях.

несистематический, делимый



систематический, неразделимый



Линейные и систематические коды

В систематических кодах формирование проверочных элементов происходит по m информационным элементам кодовой комбинации. В канал связи идет n элементная комбинация, состоящая из m информационных и k проверочных разрядов.

В систематических кодах проверочные символы могут образовываться путем различных линейных комбинаций информационных символов.

Декодирование систематических кодов основано на проверке линейных соотношений между символами, стоящими на определенных проверочных позициях. В случае двоичных кодов, этот процесс сводится к проверке на четность.

4 КОД ХЭММИНГА

Линейные и систематические коды

Линейными называются коды, в которых проверочные символы представляют собой линейные комбинации информационных символов.

Для двоичных кодов в качестве линейной операции используют сложение по модулю 2. Последовательность нулей и единиц, принадлежащих данному коду, называется **кодовым вектором**.

СВОЙСТВО ЛИНЕЙНЫХ КОДОВ

Сумма или разность кодовых векторов линейного кода дает вектор, принадлежащий данному коду.

Код Хэмминга

Ричард Уэсли Хэмминг (11.02.1915 – 7.01.1998)

Американский математик, работы которого в сфере теории информации оказали существенное влияние на компьютерные науки и телекоммуникации. Основной вклад — т. н. код Хэмминга, а также расстояние Хэмминга.

Хэмминг родился в Чикаго. Он получил степень бакалавра в Чикагском университете в 1937 году. Затем он продолжил образование в Университете Небраска и в 1939 году получил там степень магистра. В 1942 году он защищает диссертацию в университете Иллинойс и становится доктором философии. Некоторое время числится



В рамках этого проекта Хэмминг профессором в Университете Пуэбло, где перенял работу для цифровых компьютеров для участия в Манхэттенском проекте в 1945. Цель программы состояла в том, чтобы выяснить, не приведет ли взрыв атомной бомбы к возгоранию атмосферы. Ответ оказался отрицательным, вследствие чего было принято решение об её использовании.

В период с 1946 по 1976 года Хэмминг работал в Bell Labs, где сотрудничал с Клодом Шенноном. 23 июля 1976 года он переехал в Монтеррей и возглавил там научные исследования в области вычислительной техники в Высшем военно-морском училище. Скончался 7 января 1998 года в возрасте 82 лет.

Код Хэмминга. Краткое описание кода

Код Хэмминга исправляет одиночные ошибки. Он состоит из комбинации из m информационных и k проверочных символов.

Избыточная часть кода строится таким образом, чтобы при декодировании можно было установить не только наличие ошибки, но и ее расположение внутри кодовой комбинации.

Достигается это путем многократной проверки принятой кодовой комбинации на четность. При этом число проверок всегда равно числу контрольных разрядов k .

При каждой проверке охватывается часть информационных символов и один из контрольных разрядов, в ходе проверки получают один проверочный символ.

Если результат проверки дает четное число, то проверочному символу присваивается значение «0», в противном случае – «1».

В результате проверок получается k -разрядное двоичное число, указывающее номер позиции искаженного символа. Если в результате проверки получена комбинация из k нулей, значит ошибок в кодовой комбинации не обнаружено.

7 КОД ХЭММИНГА

Код Хэмминга. Алгоритм кодирования

1. Расчет характеристик кода Хэмминга

$$2^m \leq \frac{2^n}{1+n} \quad n = m + k \quad (5.1)$$

Соотношения между параметрами кода m , k , n

n	m	k	n	m	k
1	0	1	9	5	4
2	0	2	10	6	4
3	1	2	11	7	4
4	1	3	12	8	4
5	2	3	13	9	4
6	3	3	14	10	4
7	4	3	15	11	4
8	4	4	16	11	5

Код Хэмминга. Алгоритм кодирования

2. Определение структуры кодового вектора (позиции информационных и контрольных разрядов)

$$2^i \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Номера контрольных разрядов в этом случае будут равны

1, 2, 4, 16, 32 ...

3. Определение значений контрольных разрядов

Сумма единиц на проверочных позициях должна быть четной

Если сумма четная – значение контрольного коэффициента равно нулю, в противном случае – единице

Код Хэмминга. Алгоритм кодирования

4. Определение проверочных позиций

0	0	0	1	a1
0	0	1	0	a2
0	0	1	1	a3
0	1	0	0	a4
0	1	0	1	a5
0	1	1	0	a6
0	1	1	1	a7
1	0	0	0	a8
1	0	0	1	a9
1	0	1	0	a10
1	0	1	1	a11
1	1	0	0	a12
1	1	0	1	a13
1	1	1	0	a14
1	1	1	1	a15

$$n = m + k$$

5. Выявляют проверочные позиции

№ проверки	Проверочные позиции	№ контрольного символа
1	1,3,5,7,9,11,...	1
2	2,3,6,7,10,11,14,15,18,19,22,24,...	2
3	4,5,6,7,12,13,14,15,20,21,22,23,...	4
4	8,9,10,11,12,13,14,15,24,25,26,27,28,29,...	8

В результате первой проверки получается цифра младшего разряда контрольного числа, в результате второй проверки – число второго разряда, и т.д.

Значения информационных символов известны заранее, поэтому контрольные символы необходимо выбирать таким образом, чтобы сумма единиц была числом четным.

10 КОД ХЭММИНГА

Код Хэмминга. Пример

Закодировать кодом Хэмминга комбинацию 1 0 0 1 1

Число информационных разрядов $m = 5$

Число контрольных разрядов $k = 4$

Общее число разрядов $n = m + k = 9$

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
k1	k2	m1	k3	m2	m3	m4	k4	m5
k1	k2	1	k3	0	0	1	k4	1

ПРОВЕРКА 1

$$k1 \oplus m1 \oplus m2 \oplus m4 \oplus m5 = 0$$

$$k1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$k1 = 1$$

11 КОД ХЭММИНГА

Код Хэмминга. Пример

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
k1	k2	m1	k3	m2	m3	m4	k4	m5
k1	k2	1	k3	0	0	1	k4	1

ПРОВЕРКА 2

$$k2 \oplus m1 \oplus m3 \oplus m4 = 0$$

$$k2 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$k2 = 0$$

ПРОВЕРКА 3

$$k3 \oplus m2 \oplus m3 \oplus m4 = 0$$

$$k3 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$k3 = 1$$

12 КОД ХЭММИНГА

Код Хэмминга. Пример

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
k1	k2	m1	k3	m2	m3	m4	k4	m5
k1	k2	1	k3	0	0	1	k4	1

ПРОВЕРКА 4

$$k4 \oplus m5 = 0$$

$$k4 \oplus 1 = 0$$

$$k4 = 1$$

k1	k2	1	k3	0	0	1	k4	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1

10011 → 101100111

13 КОД ХЭММИНГА

Код Хэмминга. Пример

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
k1	k2	m1	k3	m2	m3	m4	k4	m5
1	0	1	1	1	0	1	1	1

Система проверок:

1-я проверка $k1 \oplus m1 \oplus m2 \oplus m4 \oplus m5 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$

2-я проверка $k2 \oplus m1 \oplus m3 \oplus m4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

3-я проверка $k3 \oplus m2 \oplus m3 \oplus m4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

4-я проверка $k4 \oplus m5 = 1 \oplus 1 = 0$

0101 = 5 в десятичной системе счисления \Rightarrow искажен 5-й разряд