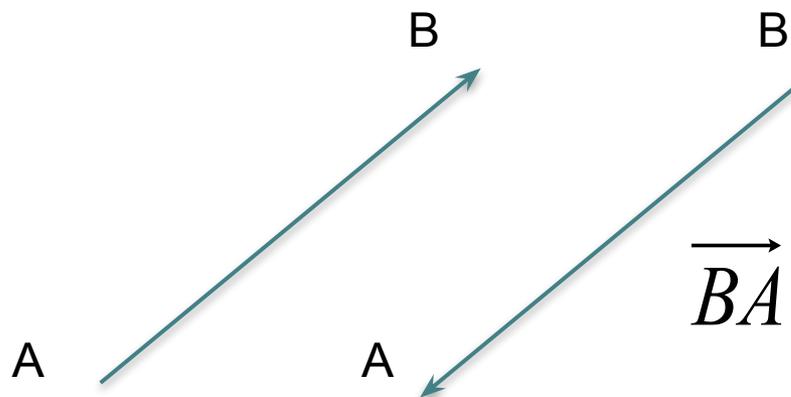


# ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

**ВЕКТОРЫ на плоскости и в пространстве**

**Вектор** (в пространстве, на плоскости, на прямой) – это направленный отрезок, т.е. отрезок  $AB$ , у которого одна из ограничивающих его точек  $A$  принимается за начало, а вторая  $B$  – за конец.

$\overrightarrow{AB}$  или  $\vec{a}$



Ненулевые векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  называются

*равными*, если:

имеют одинаковые длины  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$

и одинаково направлены

Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.

## Характеристики: модуль, направление

Ненулевые векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  называются

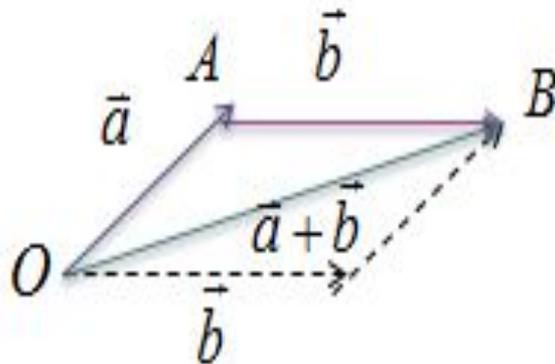
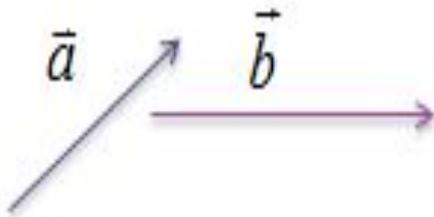
*равными*, если:

имеют одинаковые длины  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$

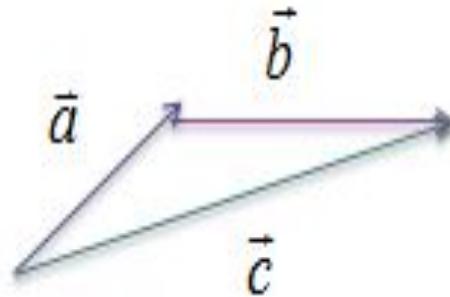
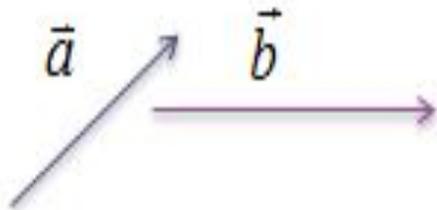
и одинаково направлены

Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.

# Операции: сложение векторов



*Правило параллелограмма*



*Правило треугольника*

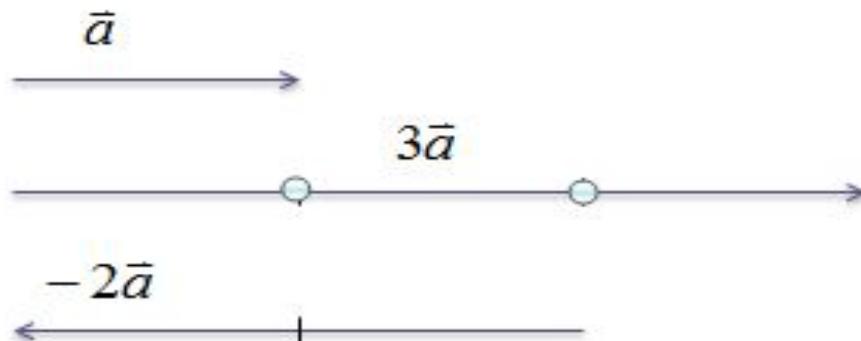
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

# Операции: умножение вектора на число

**Произведением** вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор, модуль которого равен числу  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  и который имеет направление вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположное направление ( $-\vec{a}$ ), если  $\lambda < 0$ .

Обозначается:  $\lambda\vec{a}$ .

Если  $\lambda = 0$  или  $\vec{a} = \vec{0}$ , то  $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ .

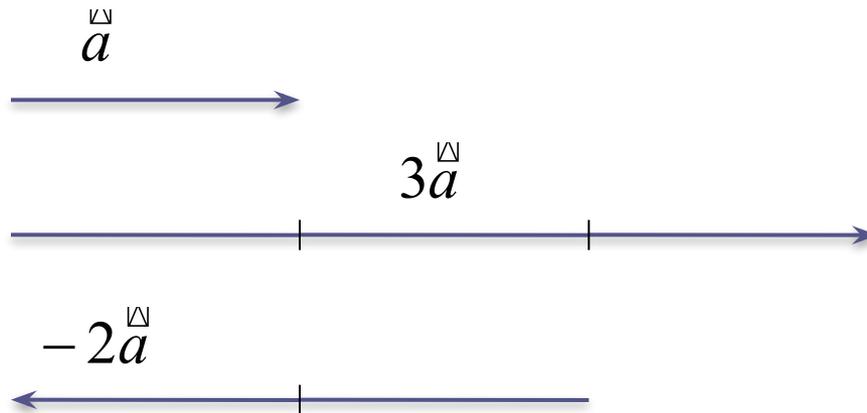


## операции 3. Умножение вектора на число

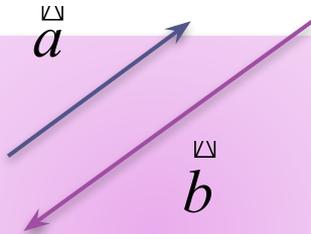
**Произведением** вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор, модуль которого равен числу  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  и который имеет направление вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположное направление  $(-\vec{a})$ , если  $\lambda < 0$ .

Обозначается:  $\lambda \vec{a}$ .

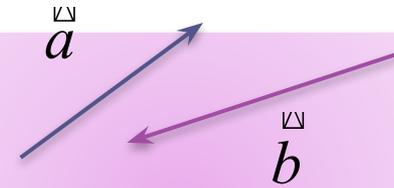
Если  $\lambda = 0$  или  $\vec{a} = \vec{0}$ , то  $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ .



Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В противном случае, они называются **неколлинеарными**.



*Коллинеарные векторы*



*Неколлинеарные векторы*

**Нулевой** вектор **коллинеарен** всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.

Вектор  $\vec{a}$  называется **коллинеарным** прямой  $l$ , если этот вектор лежит на прямой  $l$  **или** на прямой, параллельной  $l$ .

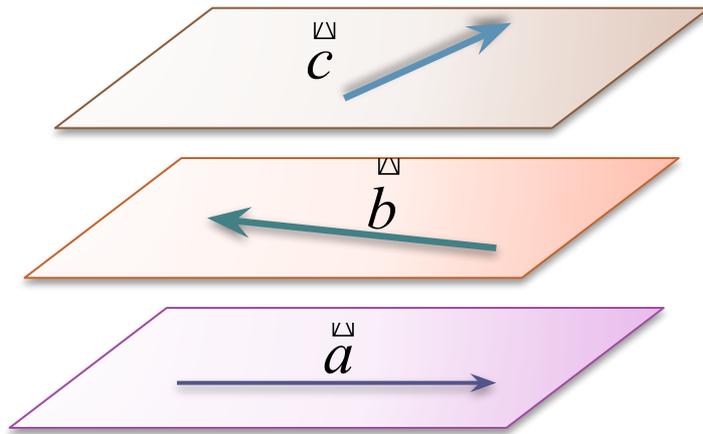
## Признак коллинеарности двух ненулевых векторов

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \mu \cdot \vec{b}, \quad \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a},$$

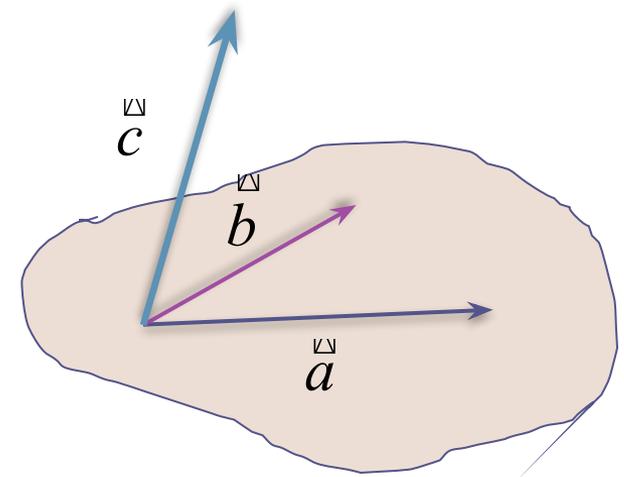
где  $\lambda$  и  $\mu$  - некоторые числа.

Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях. В противном случае, они называются **некомпланарными**.

Если хоть один из векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  нулевой вектор, то эти векторы компланарны.



*Компланарные векторы*



*Некомпланарные векторы*

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке.

3) **Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - базис в пространстве и  $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$ ,  
то числа  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  - называются **координатами** вектора в этом базисе.

### Свойства:

- 1) равные векторы в одном и том же базисе имеют одинаковые координаты
- 2) при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda\alpha) \vec{e}_1 + (\lambda\beta) \vec{e}_2 + (\lambda\gamma) \vec{e}_3$$

- 3) при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

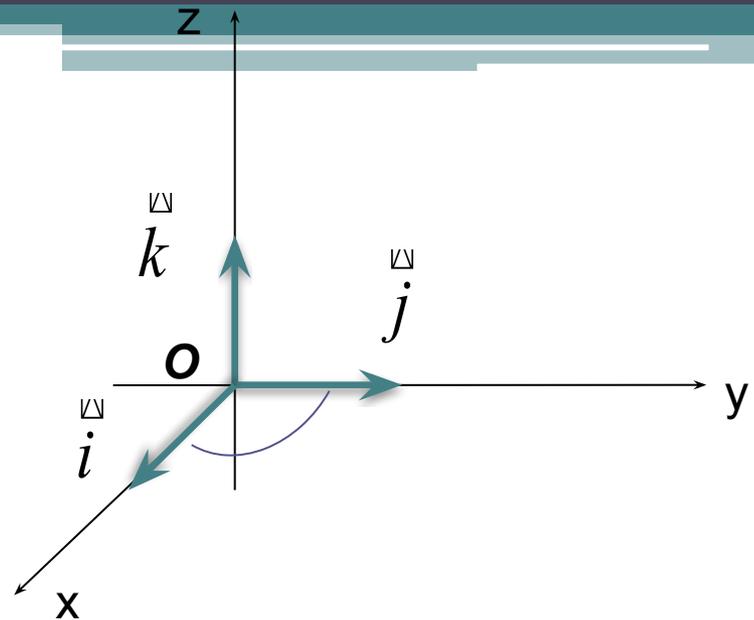
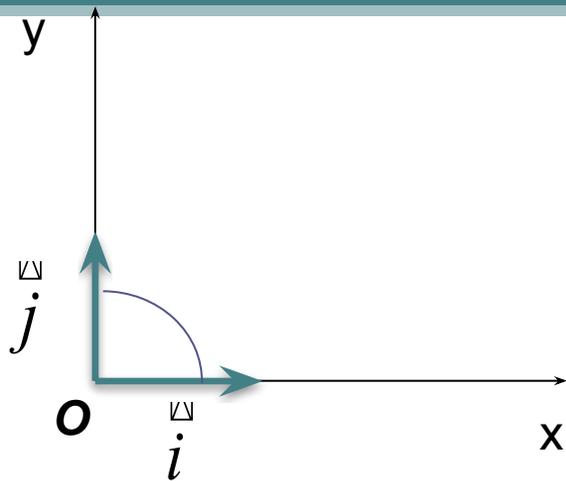
$$(\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3$$

**Опр.** Если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — некоторая система векторов пространства  $R$  ( $R_1, R_2$  или  $R_3$ ), тогда любой вектор вида  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$  называется **линейной комбинацией векторов**

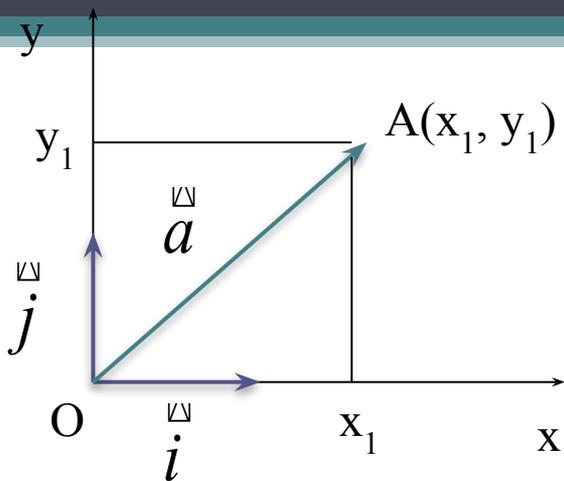
$$a_1, a_2, \dots, a_n, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n —$$

некоторые действительные числа, называемые **коэффициентами линейной комбинации**.

Если какой-либо вектор представляется в виде линейной комбинации некоторых векторов, то говорят, что он **разложен** по этим векторам.



- $O$  – произвольная точка
- $\vec{i}, \vec{j}$  ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) единичные взаимно-перпендикулярные векторы плоскости (пространства) – орты
- $Oxy$  – прямоугольная система координат на плоскости
- $Oxyz$  – декартова система координат в пространстве
- $x$  – абсцисса
- $y$  – ордината
- $z$  – аппликата



Вектор  $\vec{a}$  на плоскости  $Oxy$ , может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

где  $x_1, y_1$  – проекции конца вектора на соответствующие оси координат называются **прямоугольными координатами вектора**.

Вектор  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  с координатами  $x_1$  и  $y_1$  обозначается:  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  и называется **радиус-вектором** точки A.

**Задача :** найти координаты вектора, если даны координаты его начала и конца.

**Решение.**

Пусть  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ . Имеем  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .

Но  $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

## Условие коллинеарности двух векторов

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Векторы

***коллинеарны*** тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. когда справедливо равенство

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

*Длина вектора*  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  в прямоугольных координатах :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

*Длина вектора*  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  в декартовых координатах:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

## Линейные операции над векторами в координатной форме

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

Направление вектора определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , образованными с осями координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

*Косинусы этих углов* определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{|a|} \quad \cos \beta = \frac{y_1}{|a|} \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{|a|}$$

**Скалярным произведением** двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется **число**, обозначаемое  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  и равное

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Если  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

**Задача.** Даны векторы

$$\vec{a} = (15; -6; -5) \quad \vec{b} = (20; 3; 16)$$

Найти: 1)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Разность двух векторов:

$$\vec{b} - \vec{a} = (20 - 15; 3 - (-6); 16 - (-5)) = (5; 9; 21)$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 15 \cdot 5 + (-6) \cdot 9 + (-5) \cdot 21 = -84$$

**Задача.** Даны векторы  $\vec{a} = (15; -6; -5)$   $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 3)  $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$  если  $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(15; -6; -5) + (20; 3; 16) = (50; -9; 6)$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \frac{15 \cdot 50 + (-6) \cdot (-9) + (-5) \cdot 6}{\sqrt{15^2 + (-6)^2 + (-5)^2} \sqrt{50^2 + (-9)^2 + 6^2}} =$$

$$\frac{750 + 54 - 30}{\sqrt{286} \cdot \sqrt{2617}} = \frac{774}{\sqrt{748462}}$$

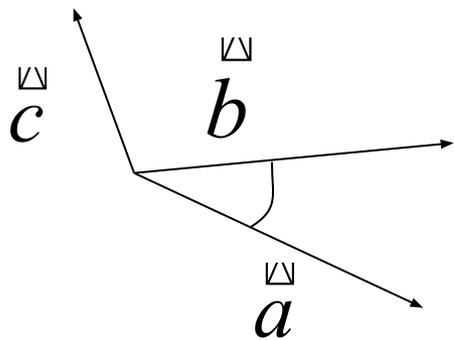
**Задача.** Даны векторы  $\vec{a} = (15; -6; -5)$   $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 4)  $|\vec{a} + \vec{b}|$

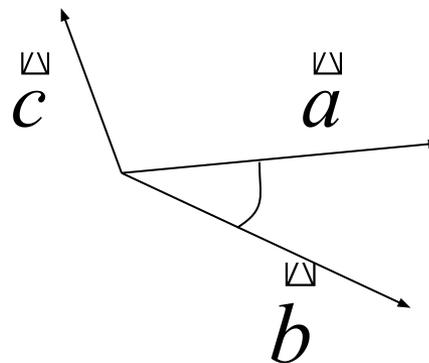
$$\vec{a} + \vec{b} = (35; -3; 9)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{35^2 + (-3)^2 + 9^2} = \sqrt{1225 + 9 + 81} = \sqrt{1315}$$

Три некопланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют **правую тройку** (**левую тройку**) или **положительно ориентированы** (**отрицательно ориентированы**), если с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора  $\vec{a}$  ко второму  $\vec{b}$  виден против часовой стрелки (по часовой стрелке).



*Правая тройка*

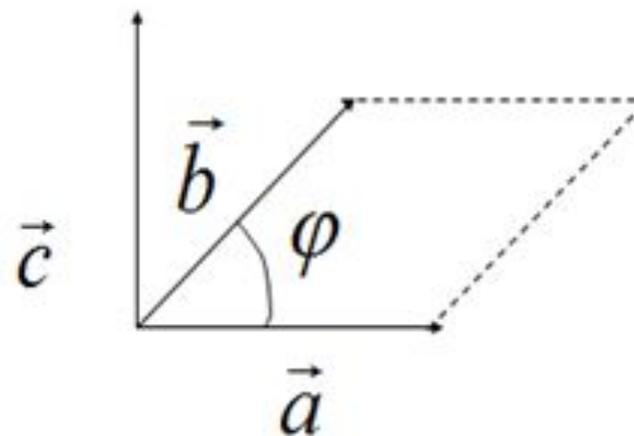


*Левая тройка*

# Векторное произведение

**Векторным произведением** двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой третий **вектор**  $\vec{c}$ , который удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1)  $\vec{c} \perp \vec{a}$  и  $\vec{c} \perp \vec{b}$
- 2)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$
- 3)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - правая тройка



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$

# Свойства

$$1. \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

$$2. \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0},$$

$$3. \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

$$4. (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

5. *Критерий коллинеарности векторов*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},$$

## Векторное произведение в координатах

Если  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

# Смешанное произведение векторов

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

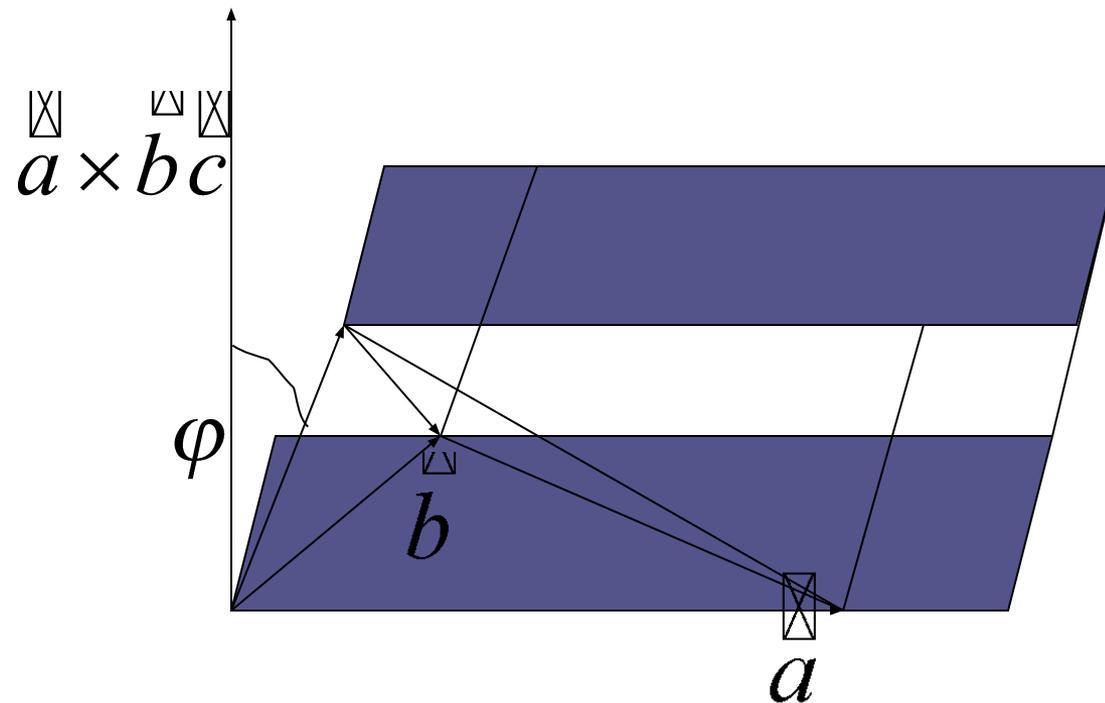
**Опр.** Смешанным произведением трех векторов называется *число*, обозначаемое  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  и определяемое следующим образом

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$$

Другие обозначения :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \quad \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

# Геометрический смысл



$$V_{\text{парал.}} = \left| (a \times b) \cdot c \right|$$



## Свойства

$$5. \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$$

(не нарушается круговой порядок)

$$6. \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$$

(нарушается круговой порядок)

# Смешанное произведение в координатах

Если

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (x_1, y_1, z_1), \\ \vec{b} &= (x_2, y_2, z_2), \\ \vec{c} &= (x_3, y_3, z_3),\end{aligned}$$

тогда

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

## Признак компланарности трех векторов (линейной зависимости трех векторов)

Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны  
тогда и только тогда, когда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

# Вычисление объема параллелепипеда, пирамиды

Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах

$$\vec{a} = (2; 3; 5) \quad \vec{b} = (1; 4; 4) \quad \vec{c} = (3; 5; 7)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3 -$$

$$- 3 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 7 = -4$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} \text{ (куб. ед.)}$$

