



Математика ППИ

Лекция 17.

**Числовые и
функциональные ряды, их
сходимость.**

Вопросы лекции

1. Числовые ряды.
2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
3. Функциональные ряды, область их сходимости. Степенные ряды.
Интервал, радиус и область сходимости степенного ряда. Основные свойства степенных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

- [2] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 2. Москва: Интеграл-Пресс, 2005. с. 234-277;
- [3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004.. с. 397-427;



Учебный вопрос

Числовые ряды.

Основные определения

Опр. Сумма всех членов последовательности – **ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Опр. **Частичная сумма** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ - сумма первых n членов последовательности.

Опр. Ряд **сходится** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S – **сумма ряда**.

Если предел не существует ряд называется **расходящимся** (расходится)

Основные определения

Опр. Сумма всех членов последовательности – **ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Опр. **Частичная сумма** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ - сумма первых n членов последовательности.

Опр. Ряд **сходится** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S – **сумма ряда**.

Если предел ~~не~~ существует ряд называется **расходящимся** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Опр. Частичная сумма ряда $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ - сумма первых n членов последовательности.

Опр. Ряд *сходится* (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S - сумма ряда.

Если предел не существует ряд называется ***расходящимся*** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

Опр. Сумма всех членов последовательности – **ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Опр. **Частичная сумма** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ - сумма первых n членов последовательности.

Опр. Ряд **сходится** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S – **сумма ряда**.

Если предел не существует ряд называется **расходящимся** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

Опр. Сумма всех членов последовательности – **ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Опр. **Частичная сумма** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ – сумма первых n членов последовательности.

Опр. Ряд **сходится** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S – **сумма ряда**.

Если предел не существует ряд называется **расходящимся** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

Опр. Сумма всех членов последовательности – **ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Опр. **Частичная сумма** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ - сумма первых n членов последовательности.

Опр. Ряд **сходится** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S – **сумма ряда**.

Если предел не существует ряд называется **расходящимся** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

Опр. Сумма всех членов последовательности – **ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Опр. **Частичная сумма** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ – сумма первых n членов последовательности.

Опр. Ряд **сходится** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S – **сумма ряда**.

Если предел не существует ряд называется **расходящимся** (расходится)

Учебный вопрос

Знакопеременные ряды.

**Абсолютная и условная
сходимость.**

**Знакочередующиеся ряды,
признак Лейбница.**

**Оценка остатка
знакочередующегося ряда.**

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

- Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется **знакопеременным**.

- Пусть дан знакопеременный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

Рассмотрим ряд (2), составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

- Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1). Ряд (1) в этом случае называется **абсолютно сходящимся**.
- Возможен случай, когда ряд (1) сходится, а (2) расходится; тогда ряд (1) называется **условно сходящимся**.

- Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

называется **знакопередающим**.

Признак Лейбница для знакопередающихся рядов.

Если члены знакопередающегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^n \cdot a_n + \dots \quad (a_n > 0)$$

- 1) монотонно убывают по абсолютной величине:

- 2)
$$a_{n+1} < a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ знакопередающийся ряд сходится, сумма его S положительна и не превосходит первого члена ряда:

$$0 < S < a_1$$

- При замене суммы S ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, суммой n его первых членов S_n абсолютная величина ошибки $r_n = S - S_n$ не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов:

$$|r_n| \leq |a_{n+1}|$$

- Знак ошибки (знак r_n) совпадает со знаком первого из отброшенных членов.

■ Пример ■

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \dots,$$

сходится по признаку Лейбница. В то же время ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

расходится (гармонический ряд). Таким образом, ряд Лейбница – условно сходящийся ряд.

Пример 1.

Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3} = \frac{|\sin 1|}{1^3} + \frac{|\sin 2|}{2^3} + \dots + \frac{|\sin n|}{n^3} + \dots$$

Так как $|\sin n| \leq 1$, то каждый член ряда не превышает соответствующего члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$$

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится. Согласно признаку сравнения, «меньший» ряд также сходится, тогда данный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Учебный вопрос

**Функциональные ряды,
область их сходимости.**

**Степенные ряды. Интервал,
радиус и область сходимости
степенного ряда. Основные
свойства степенных рядов.**

Функциональные ряды, область их сходимости.

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

членами которого являются функции от x , называется **функциональным**.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд

становится числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$

Если этот ряд сходится, то x_0 называется **точкой сходимости функционального ряда**. Совокупность всех точек сходимости x функционального ряда называется его областью сходимости, а функция

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) \text{ суммой данного ряда.}$$

Степенные ряды.



Степенным рядом называется функциональный ряд вида


$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots,$$

где a_n – числа, которые называются **коэффициентами** ряда.

При $c=0$ ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ (1)

Теорема Абеля.

- 1) Если ряд  сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при любом значении x , удовлетворяющем неравенству $|x| < |x_0|$.
- 2) Если ряд  расходится при $x = x_1$, то он расходится и при любом значении x , для которого $|x| > |x_1|$.

Область сходимости степенного ряда  есть интервал $(-R, R)$, называемый **интервалом сходимости ряда**. Число R называется **радиусом** сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости может быть вычислен по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Степенной ряд (1) внутри интервала $(-R, R)$ сходится абсолютно, вне интервала – расходится. При $x = -R$ или $x = R$ ряд может оказаться расходящимся, сходящимся условно или абсолютно.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ сходится абсолютно на $(a-R, a+R)$.

- На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда есть непрерывная функция.
- Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать, причем интеграл от суммы ряда будет равен сумме интегралов от слагаемых.
- Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать, причем производная от суммы ряда будет равен сумме производных от слагаемых.

■ Пример 1.

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Применим формулу $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$

$R = \infty$, значит, ряд сходится при всех x , т. е. в интервале $(-\infty, +\infty)$.

■ Пример 2.

Найти интервал сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 2^n} (x+1)^n$$

Решение

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 2^n} : \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)! \cdot 2^{n+1}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n!)^2 \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot 2 \cdot 2^n}{(2n)! \cdot 2^n \cdot (n+1)^2 \cdot (n!)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^2 + 12n + 4}{n^2 + 2n + 1} \right) = 8. \end{aligned}$$

Итак, радиус сходимости данного ряда $R=8$.

Таким образом, интервал сходимости ряда имеет вид $|x + 1| < 8$ или $-9 < x < 7$. Установим сходимость ряда при $x = -9$ и $x = 7$.

$$\text{При } x = -9 \text{ имеем ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! 2^n} (-8)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!} (-1)^n.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!} \neq 0$, то данный ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда. Значит, точка $x = -9$ не принадлежит области сходимости ряда.

$$\text{При } x = 7 \text{ имеем ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! 2^n} 8^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}.$$

Аналогично, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ и ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости. Значит, точка $x = 7$ не принадлежит области сходимости ряда.

Итак, радиус сходимости $R = 8$ и интервал сходимости $(-9; 7)$.

Пусть функция $f(x)$ имеет на некотором отрезке непрерывные производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно, а точка a находится внутри этого отрезка. Тогда для любого x из этого отрезка имеет место **формула Тейлора**:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_n(x),$$

где остаточный член $R_n(x)$ может быть записан в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

(форма Лагранжа), причём ξ лежит между a и x .

Очевидно, число ξ можно записать также в виде $a + \theta(x - a)$, где $0 < \theta < 1$.

В случае $a = 0$ формула Тейлора принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x), \quad (*)$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Формула (*) носит название **формулы Маклорена**.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков на некотором отрезке, содержащем внутри себя точку a , и выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

для всех x из указанного отрезка, то функция на этом отрезке является суммой степенного ряда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \dots \quad (**)$$

Этот ряд называется рядом Тейлора для данной функции.

В случае $a = 0$ ряд Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Этот ряд называется рядом Маклорена для данной функции.

При разложении функций в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

Задание на самоподготовку

Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 2. Москва: Интеграл-Пресс, 2004. с. 237-240;

Выучить изученный материал.