Математика ППИ

Лекция 17.

Числовые и функциональные ряды, их сходимость.

Вопросы лекции

1. 1. **Числовые ряды.**
2. **Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.**
3. **Функциональные ряды, область их сходимости. Степенные ряды. Интервал, радиус и область сходимости степенного ряда. Основные свойства степенных рядов.**

ЛИТЕРАТУРА

[2] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 2. Москва: Интеграл-Пресс, 2005. с. 234-277;

[3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004.. с. 397-427;

Учебный вопрос

Числовые ряды.

Основные определения

Опр. Сумма всех членов последовательности – ***ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Опр. ***Частичная сумма*** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ - сумма первых *n* членов последовательности.

Опр. Ряд ***сходится*** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$,

S – ***сумма ряда.***

Если предел не существует ряд называется ***расходящимся*** (расходится)

Основные определения

Опр. Сумма всех членов последовательности – ***ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Опр. ***Частичная сумма*** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ - сумма первых *n* членов последовательности.

Опр. Ряд ***сходится*** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.
$\lim_{n\to\infty} S_n = S$,
S – ***сумма ряда.***

Если предел не существует ряд называется ***расходящимся*** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

- ***ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Опр. ***Частичная сумма*** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ - сумма первых *n* членов последовательности.

Опр. Ряд ***сходится*** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

S – ***сумма ряда.***

Если предел не существует ряд называется ***расходящимся*** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

Опр. Сумма всех членов последовательности – ***ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Опр. ***Частичная сумма*** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ - сумма первых *n* членов последовательности.

Опр. Ряд ***сходится*** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,

S – ***сумма ряда.***

Если предел не существует ряд называется ***расходящимся*** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

- **Опр**. Сумма всех членов последовательности – ***ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Опр. ***Частичная сумма*** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ - сумма первых *n* членов последовательности.

Опр. Ряд ***сходится*** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,

S – ***сумма ряда.***

Если предел не существует ряд называется ***расходящимся*** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

Опр. Сумма всех членов последовательности – ***ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Опр. ***Частичная сумма*** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ - сумма первых *n* членов последовательности.

Опр. Ряд ***сходится*** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$
S – ***сумма ряда.***

Если предел не существует ряд называется ***расходящимся*** (расходится)

Числовые ряды с неотрицательными членами

- **Опр**. Сумма всех членов последовательности – ***ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Опр. ***Частичная сумма*** ряда $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ - сумма первых *n* членов последовательности.

Опр. Ряд ***сходится*** (сходящийся), если существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

S – ***сумма ряда.***

Если предел не существует ряд называется ***расходящимся*** (расходится)

Учебный вопрос

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница.

Оценка остатка знакочередующегося ряда.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

- Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется **знакопеременным.**

- Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1)

Рассмотрим ряд (2), составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (2)$$

- Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1). Ряд (1) в этом случае называется **абсолютно сходящимся**.

- Возможен случай, когда ряд (1) сходится, а (2) расходится; тогда ряд (1) называется **условно сходящимся.**

- Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

называется **знакочередующимся.**

Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^n \cdot a_n + \ldots \quad (a_n > 0)$$

- 1) монотонно убывают по абсолютной величине:

$$a_{n+1} < a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

- 2)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

то знакочередующийся ряд сходится, сумма его S положительна и не превосходит первого члена ряда:

$$0 < S < a_1$$

- При замене суммы S ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, суммой n его первых членов S_n абсолютная величина ошибки $r_n = S - S_n$
не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов:

$$|r_n| \le |a_{n+1}|$$

- Знак ошибки (знак r_n) совпадает со знаком первого из отброшенных членов.

Пример

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots,$

сходится по признаку Лейбница. В то же время ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

расходится (гармонический ряд). Таким образом, ряд Лейбница – условно сходящийся ряд.

Пример 2.

Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}=\frac{|\sin 1|}{1^3}+\frac{|\sin 2|}{2^3}+\ldots+\frac{|\sin n|}{n^3}+\ldots$$

Так как $|\sin\ n|\ \le\ 1$, то каждый член ряда не превышает соответствующего члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots$$

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится. Согласно признаку сравнения, «меньший» ряд также сходится, тогда данный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Учебный вопрос

Функциональные ряды, область их сходимости. Степенные ряды. Интервал, радиус и область сходимости степенного ряда. Основные свойства степенных рядов.

Функциональные ряды, область их сходимости.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$

членами которого являются функции от $u_i(x)$, называется функциональным.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд становится числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$

Если этот ряд сходится, то x_0 называется точкой сходимости функционального ряда. Совокупность всех точек сходимости x функционального ряда называется его областью сходимости, а функция

$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ **суммой данного ряда.**

Степенные ряды.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots,$$

где a_n – числа, которые называются **коэффициентами** ряда.

При c=0 ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ **(1)**

Теорема Абеля.

1) Если ряд (1) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при любом значении x, удовлетворяющем неравенству $|x| < |x_0|$.

2) Если ряд (1) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при любом значении x, для которого $|x| > |x_1|$.

Область сходимости степенного ряда (1) есть интервал $(-R, R)$, называемый **интервалом сходимости ряда**. Число R называется **радиусом** сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости может быть вычислен по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Степенной ряд (1) внутри интервала $(-R, R)$ сходится абсолютно, вне интервала – расходится. При $x = -R$ или $x = R$ ряд может оказаться расходящимся, сходящимся условно или абсолютно.

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ сходится абсолютно на $(a - R, a + R)$.

- **На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда есть непрерывная функция.**

- **Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать, причем интеграл от суммы ряда будет равен сумме интегралов от слагаемых.**

- **Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать, причем производная от суммы ряда будет равен сумме производных от слагаемых.**

- **Пример 1.**

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Применим формулу $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n!} : \dfrac{1}{(n+1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$

$R = \infty$, **значит, ряд сходится при всех** x, **т. е. в интервале** $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2.

Найти интервал сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 2^n}(x+1)^n$$

Решение

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле $\mathbf{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$$\mathbf{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 2^n} : \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!\cdot 2^{n+1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^2\cdot(2n)!(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot 2\cdot 2^n}{(2n)!\cdot 2^n\cdot(n+1)^2\cdot(n!)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2+12n+4}{n^2+2n+1}\right) = \mathbf{8}.$$

Итак, радиус сходимости данного ряда R=8.

Таким образом, интервал сходимости ряда имеет вид $|x+1|<8$ **или** $-9<x<7$. **Установим сходимость ряда при x= -9 и x =7.**

При x=-9 имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 2^n}(-8)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 4^n}{(2n)!}(-1)^n$.

Поскольку $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\cdot 4^n}{(2n)!}\neq 0$**, то данный ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда. Значит, точка x = -9 не принадлежит области сходимости ряда.**

При x=7 имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 2^n}8^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 4^n}{(2n)!}$.

Аналогично, $\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$ **и ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости. Значит, точка x = 7 не принадлежит области сходимости ряда.**

Итак, радиус сходимости R=8 и интервал сходимости (-9; 7).

Пусть функция $f(x)$ имеет на некотором отрезке непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, а точка a находится внутри этого отрезка. Тогда для любого x из этого отрезка имеет место формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

где остаточный член $R_n(x)$ может быть записан в виде

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(форма Лагранжа), причём ξ лежит между a и x.
Очевидно, число ξ можно записать также в виде $a+\theta(x-a)$, где $0<\theta<1$.
В случае $a=0$ формула Тейлора принимает вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \qquad (*)$$

где

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta\cdot x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

Формула (*) носит название формулы Маклорена.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков на некотором отрезке, содержащем внутри себя точку a, и выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

для всех x из указанного отрезка, то функция на этом отрезке является суммой степенного ряда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (**)$$

Этот ряд называется рядом Тейлора для данной функции.
В случае $a = 0$ ряд Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Этот ряд называется рядом Маклорена для данной функции.

При разложении функций в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1)$$

Задание на самоподготовку

Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 2. Москва: Интеграл-Пресс, 2004. с. 237-240;

Выучить изученный материал.