

Розділ 3. Алгебраїчні структури

3.1. Алгебраїчні операції та їх властивості

- *унарна операція, бінарна операція*
- *записи infix, prefix, postfix*
- *таблиця Келі*
- *комутативність, асоціативність, дистрибутивність*
- *одиниця, обернений елемент*
- *операції додавання та множення за модулем*

□ **Операцією** на множині S називається функція f , яка є відображенням виду $S^n \rightarrow S$, $n \in N$, де S^n — декартів добуток $S \times S \times \dots \times S$, в який S входить n разів.

Важливо: 1) оскільки операція є функцією, то результат застосування операції визначено однозначно;

2) операція замкнена на S .

□ Стверджують, що операція $S^n \rightarrow S$ має **порядок n** або є **n -арною операцією**. Частіше зустрічається ситуація, коли порядок дорівнює 1 або 2.

□ Операції виду $S \rightarrow S$ називають **унарними**, а операції $S^2 \rightarrow S$ називають **бінарними**.

□ Елементи упорядкованого набору з n елементів в області визначення S^n називають **операндами**.

□ Операції звичайно позначають символами, що називають **операторами**.

Способи запису операцій

✓ *infix* - оператор між операндами

$$a + b$$

✓ *prefix* - оператор перед операндами

$$+ a b$$

✓ *postfix* - оператор після операндів

$$a b +$$

Алгоритм обчислення значень виразу, що записаний у формі *postfix*:

1. При перегляді запису зліва направо виконується перша знайдена операція, якій безпосередньо передує достатня для неї кількість операндів.
2. На місці виконаної операції і використаних для цього операндів у рядок записується результат виконання операції.
3. Якщо у виразі ще є знаки операцій, то повертаємося до кроку 1, якщо немає – отримано результат.

Приклад.

Вираз у *infix*-формі:

$$1 + 2 * 3 + (4 + 5 * (6 + 7)).$$

Результат переведення його до *postfix* буде таким:

$$1\ 2\ 3\ * +\ 4\ 5\ 6\ 7 + * + +.$$

Обчислення значення виразу:

$$\begin{aligned} 1\ \underline{2\ 3\ *}\ +\ 4\ 5\ 6\ 7 + * + + &= \underline{1\ 6}\ +\ 4\ 5\ 6\ 7 + * + + = \\ = 7\ 4\ 5\ \underline{6\ 7}\ + * + + &= 7\ 4\ \underline{5\ 13}\ * + + = 7\ \underline{4\ 65}\ + + = \\ = \underline{7\ 69}\ + &= 76. \end{aligned}$$

Таблиця Келлі

Символи \otimes і \oplus використовуються як змінні для позначення будь-яких операцій.

- Таблиця, що задає деяку бінарну операцію \otimes на деякій множині A , називається *таблицею Келі*, її рядки та стовпці нумеруються елементами множини A , а елементом таблиці, що стоїть на перетині рядку a_i і стовпця a_j є елемент $a_k = a_i \otimes a_j$.

\otimes	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$$a \otimes b = b,$$

$$b \otimes b = a,$$

$$c \otimes b = d, \dots$$

Властивості операцій

Нехай дано множину A , на якій визначено деяку бінарну операцію \otimes .

- Якщо $a \otimes b = b \otimes a$ для всіх $a, b \in A$, то стверджують, що бінарна операція \otimes на множині A **комутативна**.
- Якщо $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ для всіх $a, b, c \in A$, то стверджують, що бінарна операція \otimes на множині A **асоціативна**.
- Нехай на множині A визначено дві бінарні операції \otimes і \oplus . Якщо для всіх $a, b, c \in A$ виконується $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$, то стверджують, що операція \otimes **дистрибутивна** відносно операції \oplus .

Приклад.

На множині дійсних чисел R :

додавання $1+2=2+1$; $(1+2)+3=1+(2+3)$

комутативне, асоціативне

віднімання $1-2 \neq 2-1$; $(3-2)-1 \neq 3-(2-1)$

не комутативне, не асоціативне

додавання відносно множення **не дистрибутивне**

$$2+(2*3) \neq (2+2)*(2+3)$$

множення відносно додавання **дистрибутивне**

$$2*(2+3) = (2*2)+(2*3)$$

множення відносно віднімання **дистрибутивне**

$$2*(3-2) = (2*3)-(2*2)$$

Для розв'язання рівнянь відносно кожної операції у множині-носії алгебраїчної структури виділяється особливий елемент, що називається одиничним елементом.

- Якщо для бінарної операції \otimes на множині A існує елемент $e \in A$ такий, що для всіх $a \in A$: $e \otimes a = a \otimes e = a$, тоді e називається **одиницею** відносно операції \otimes .
- Нехай \otimes — операція на A з одиницею e і елементи $x, y \in A$ задовольняють рівності $x \otimes y = e = y \otimes x$. Тоді y називається **оберненим елементом** до x відносно операції \otimes .

Іноді розрізняють ліві та праві одиниці ($e_{\text{лів}} \otimes a = a$ або $a \otimes e_{\text{прав}} = a$ для будь-якого $a \in A$) і ліві та праві обернені елементи, однак у більшості випадків одиниці є двосторонніми.

Приклад.

На множині дійсних чисел R :

0 для додавання

двостороння одиниця

$$x + 0 = x = 0 + x$$

0 для віднімання

права одиниця

$$x - 0 = x, 0 - x \neq x$$

В алгебрі множин одиниця для:

операції об'єднання \cup

порожня множина \emptyset

операції перетину \cap

універсальна множина U

Додавання за модулем

Нехай n — довільне натурально число.

□ *Додавання за модулем n* цілих чисел a і b називається алгебраїчна операція \oplus_n , результатом якої є решта від ділення суми $a + b$ на n .

$$a \oplus_n b = c, \text{ так, що } a+b = k*n+c, 0 \leq c < n; a, b, k \in \mathbb{Z}^+$$

Областю значень операції є множина цілих невід'ємних чисел, менших за n .

Приклад.

$$\begin{array}{l} 2 \oplus_3 2 = \text{Зал.}(4/3) = 1 \\ 2 \oplus_4 2 = \text{Зал.}(4/4) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \oplus_{10} 8 = \text{Зал.}(15/10) = 5 \\ 7 \oplus_{12} 8 = \text{Зал.}(15/12) = 3 \end{array}$$

Множення за модулем

Нехай n — довільне натурально число.

□ *Множенням за модулем n* чисел a і b називається алгебраїчна операція \otimes_n , результатом якої є решта від ділення добутку $a * b$ на n .

$$a \otimes_n b = d, \text{ так, що } a * b = f * n + d, 0 \leq d < n; a, b, f \in \mathbb{Z}^+$$

Областю значень операції є множина цілих невід'ємних чисел, менших за n .

Приклад.

$$2 \otimes_3 2 = \text{Зал.}(4/3) = 1$$

$$2 \otimes_4 2 = \text{Зал.}(4/4) = 0$$

$$7 \otimes_{10} 8 = \text{Зал.}(56/10) = 6$$

$$7 \otimes_{12} 8 = \text{Зал.}(56/12) = 8$$

3.2. Поняття алгебраїчної структури

- *алгебраїчна структура*
- *підструктура*
- *гомоморфізм*
- *ізоморфізм*

□ **Алгебраїчною структурою** називається множина разом із заданими операціями, визначеними і замкненими на цій множині. Ця множина називається **носієм алгебраїчної структури**.

Приклад. Алгебраїчна структура з операцією додавання на множині N натуральних чисел позначається $(N, +)$.

Приклад. Множина $Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ разом із звичайною операцією додавання $(+)$ не буде алгебраїчною структурою, оскільки результат виконання операції може не належати множині Z_7 , наприклад, $6 + 3 = 9$, $9 \notin Z_7$. Але (Z_7, \oplus_7) є алгебраїчною структурою, оскільки область значень операції \oplus_7 лежить у Z_7 .

Відношення між алгебраїчними структурами

- Структура $S' = (A', \oplus')$ є *підструктурою* алгебраїчної структури $S = (A, \oplus)$, якщо:
1. $A' \subseteq A$
 2. \oplus' і \oplus операції одного порядку і звуження операції \oplus на підмножині A' співпадає з операцією \oplus' (наприклад, для бінарних операцій $a \oplus b = a \oplus' b$ для всіх $a, b \in A'$).

Найбільшою підструктурою структури S є сама структура S . У деяких випадках інших підструктур може не бути.

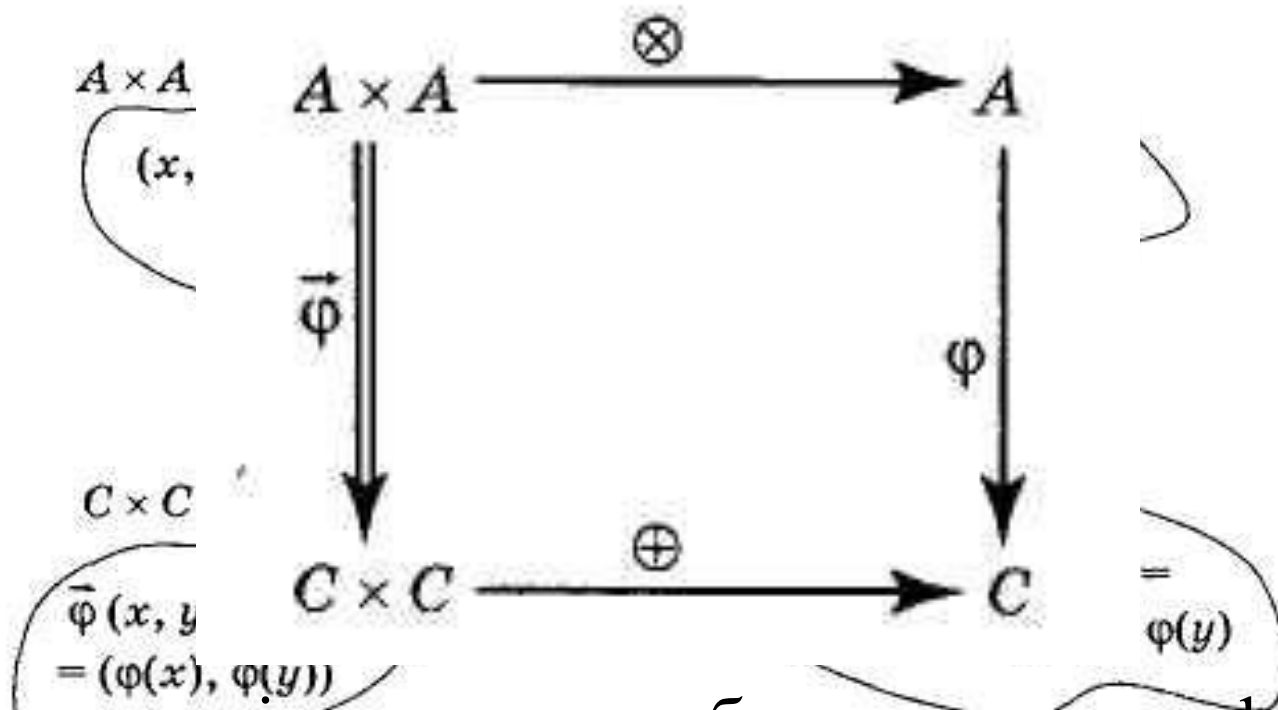
Приклад. Нехай E — множина парних натуральних чисел, тоді $(E, +)$ буде підструктурою структури $(N, +)$, де N — множина натуральних чисел.

Гомоморфізм

Нехай задано дві структури (A, \otimes) , (C, \oplus) з операціями \otimes , \oplus одного порядку n .

- Відображення $\phi: A \rightarrow C$ називається *гомоморфізмом* із структури (A, \otimes) у структуру (C, \oplus) , якщо воно переставлене з операціями у такому розумінні: $\phi \cdot \otimes = \oplus \cdot \square \phi$, де відображення $\square \phi: A^n \rightarrow C^n$ діє за правилом
- $\phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\phi(a_1), \phi(a_2), \dots, \phi(a_n))$, $\forall a_i \in A$
- Для бінарних операцій ($n = 2$), зокрема, $\phi(x \otimes y) = \phi(x) \oplus \phi(y)$, для будь-яких $x, y \in A$.

Графічне визначення гомоморфізму для випадку бінарних операцій.



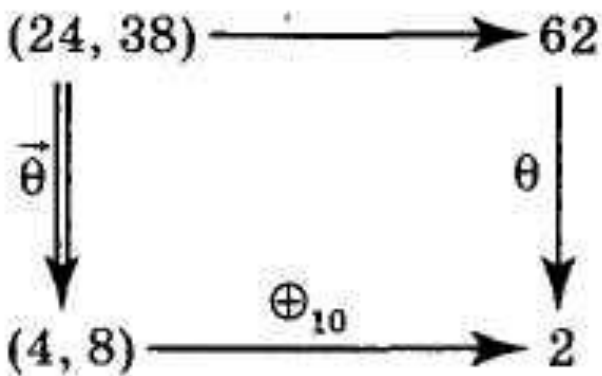
Комутативна діаграма, що зображує гомоморфізм ϕ

Приклад.

Нехай задано відображення $\theta: Z_+ \rightarrow Z_{10}$, що переводить будь-яке ціле невід'ємне число у решту від ділення цього числа на 10.

Тоді $\theta(20) = 0$, $\theta(17) = 7, \dots$

Якщо $(Z_+, +)$ і (Z_{10}, \oplus_{10}) структури з операцією звичайного додавання $+$, що визначена на Z_+ і додаванням за модулем 10 на Z_{10} , то θ є гомоморфізмом з першої структури у другу.



Комутативна діаграма
 $\theta(24 + 38) = \theta(62) = 2$
гомоморфізму θ
 $\theta(24) \oplus_{10} \theta(38) = 4 \oplus_{10} 8 = 2$
з $(Z_+, +)$ в (Z_{10}, \oplus_{10})

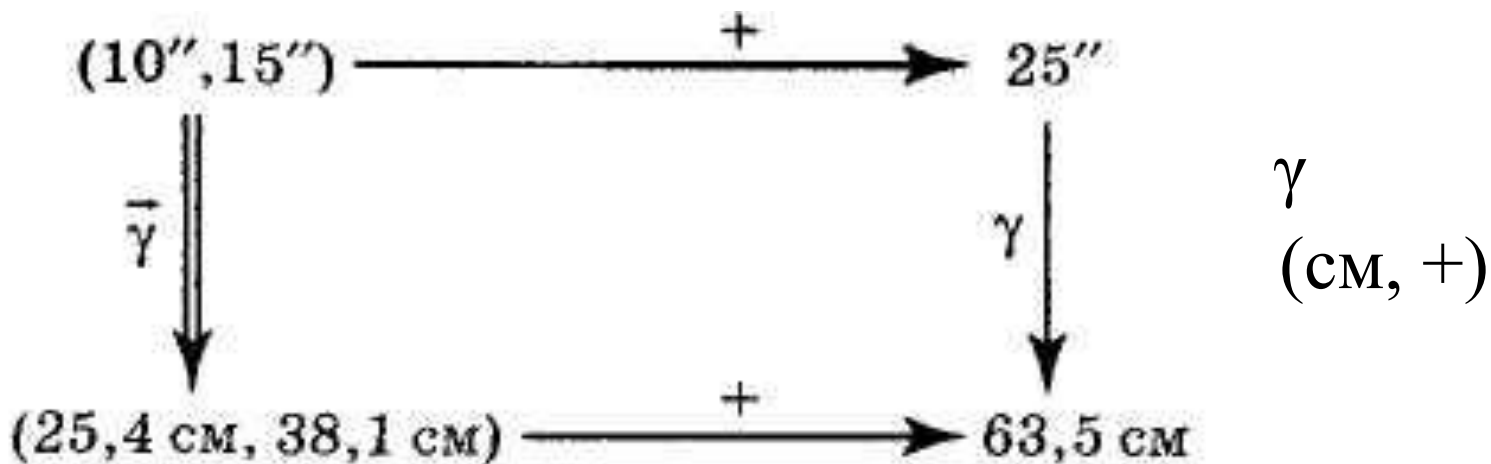
Ізоморфізм

- Гомоморфізм, який є бієкцією, називають *ізоморфізмом*. Якщо існує ізоморфізм між двома структурами, то говорять, що вони *ізоморфні одна одній*.

Відношення ізоморфізму — це відношення еквівалентності на множині алгебраїчних структур, тому ізоморфізм розбиває множину всіх алгебраїчних структур на класи еквівалентності. Використовуючи ізоморфізм, можна здійснювати еквівалентні перетворення алгебраїчних структур. Будь-яке співвідношення у структурі S зберігається у будь-якій ізоморфній їй структурі Q . Це дозволяє, одержавши певні співвідношення у структурі S , автоматично поширити їх на всі структури, що ізоморфні S .

Приклад.

Розглянемо спосіб вимірювання довжини у дюймах та сантиметрах. Якщо додати бінарну операцію додавання, то одержимо дві структури: $(\text{inch}, +)$, $(\text{cm}, +)$. Визначимо ізоморфізм $\gamma: x (\text{cm}) = 2,54 * x (\text{inch})$.



$$d = 10'' + 15'' = 25'', 2,54 * 25'' = 63,5 \text{ cm};$$

$$d = 10'' * 2,54 + 15'' * 2,54 = 25,4 \text{ cm} + 38,1 \text{ cm} = 63,5 \text{ cm}.$$

3.3. Найпростіші алгебраїчні структури

- *півгрупа*
- *моноїд*
- *група*
- *абелева група*
- *кільце*
- *поле*

Структури з однією операцією

□ *Півгрупою* називається алгебраїчна структура з множиною-носієм A і бінарною операцією $\otimes: A^2 \rightarrow A$, яка задовольняє властивості асоціативності:

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z; \quad x, y, z \in A.$$

Приклад.

При обробці рядків символів використовується операція конкатенації $\alpha \bullet \beta = \alpha\beta$. Візьмемо рядки: «пар», «о», «воз». Застосувавши операції конкатенації, одержуємо такі рядки: «пар»•«о» = «паро»; «паро»•«воз» = «паровоз».

Очевидно, що ця операція асоціативна, оскільки

$$(\text{«пар»} \bullet \text{«о»}) \bullet \text{«воз»} = \text{«пар»} \bullet (\text{«о»} \bullet \text{«воз»}) = \text{«паровоз»}.$$

Отже (A^+, \bullet) є півгрупою, де A^+ — множина різних рядків, що складаються з букв українського алфавіту.

□ *Моноїдом* називають алгебраїчну структуру з множиною-носієм M і бінарною операцією $\otimes: M^2 \rightarrow M$ такою, що

1. \otimes асоціативна:

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z, \text{ для всіх } x, y, z \in M.$$

2. Існує $e \in M$ — одиниця відносно \otimes :

$$e \otimes x = x = x \otimes e \text{ для всіх } x \in M.$$

Таким чином, моноїд — це півгрупа з одиницею.

Приклад.

Якщо позначимо через A^* множину всіляких рядків, що складаються з букв українського алфавіту і порожнього рядку $\varepsilon = \langle \rangle$, то одержимо структуру (A^*, \cdot) , яка є моноїдом з одиничним елементом ε .

$$\langle \text{паровоз} \rangle \cdot \langle \rangle = \langle \rangle \cdot \langle \text{паровоз} \rangle = \langle \text{паровоз} \rangle$$

□ **Групою** називають множину G з бінарною операцією \otimes , що замкнена в G , такою, що

1. \otimes асоціативна:

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z, \text{ для всіх } x, y, z \in M.$$

2. Існує $e \in M$ — одиниця відносно \otimes :

$$e \otimes x = x = x \otimes e \text{ для всіх } x \in M.$$

3. Кожному елементу $x \in G$ відповідає обернений елемент $x' \in G$ відносно \otimes :

$$x' \otimes x = x \otimes x' = e \text{ для всіх } x \in G.$$

Часто до слів «група» і «моноїд» приписують термін «комутативний». Це означає, що операція у розглянутій структурі задовольняє властивість комутативності, тобто

$$y \otimes x = x \otimes y \text{ для всіх } x, y \in M \text{ або } G.$$

□ Комутативна група називається **абелевою групою**.

Структури з двома операціями

□ **Кільцем** (R, \oplus, \otimes) називається множина R з визначеними на неї бінарними операціями \oplus і \otimes :

1. \otimes асоціативна:

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z, \text{ для всіх } x, y, z \in M.$$

2. \oplus комутативна:

$$x \oplus y = y \oplus x \text{ для всіх } x, y \in R.$$

3. \oplus має одиницю, яка називається нулем і позначається 0 :

$$0 \oplus x = x \text{ для всіх } x \in R.$$

4. Існує обернений елемент відносно \oplus для кожного $x \in R$:

$$(-x) \oplus x = x \oplus (-x) = 0 \text{ для всіх } x \in R.$$

5. \otimes асоціативна:

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \text{ для всіх } x, y, z \in R.$$

6. \otimes дистрибутивна відносно \oplus зліва і справа:

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z),$$

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z) \text{ для всіх } x, y, z \in R.$$

- Будемо вважати, що *кільце комутативне*, якщо множення \otimes комутативне і є *кільцем з одиницею*, якщо існує одиниця відносно множення.
- Кільце з одиницею називається *алгеброю*.

Поле (R, \oplus, \otimes) — це комутативне кільце з одиницею 1 (що відрізняється від 0), в якому кожний елемент a (що відрізняється від 0) обернений за множенням.

- Структуру $(R, *, +)$ називають *полем дійсних чисел*.