

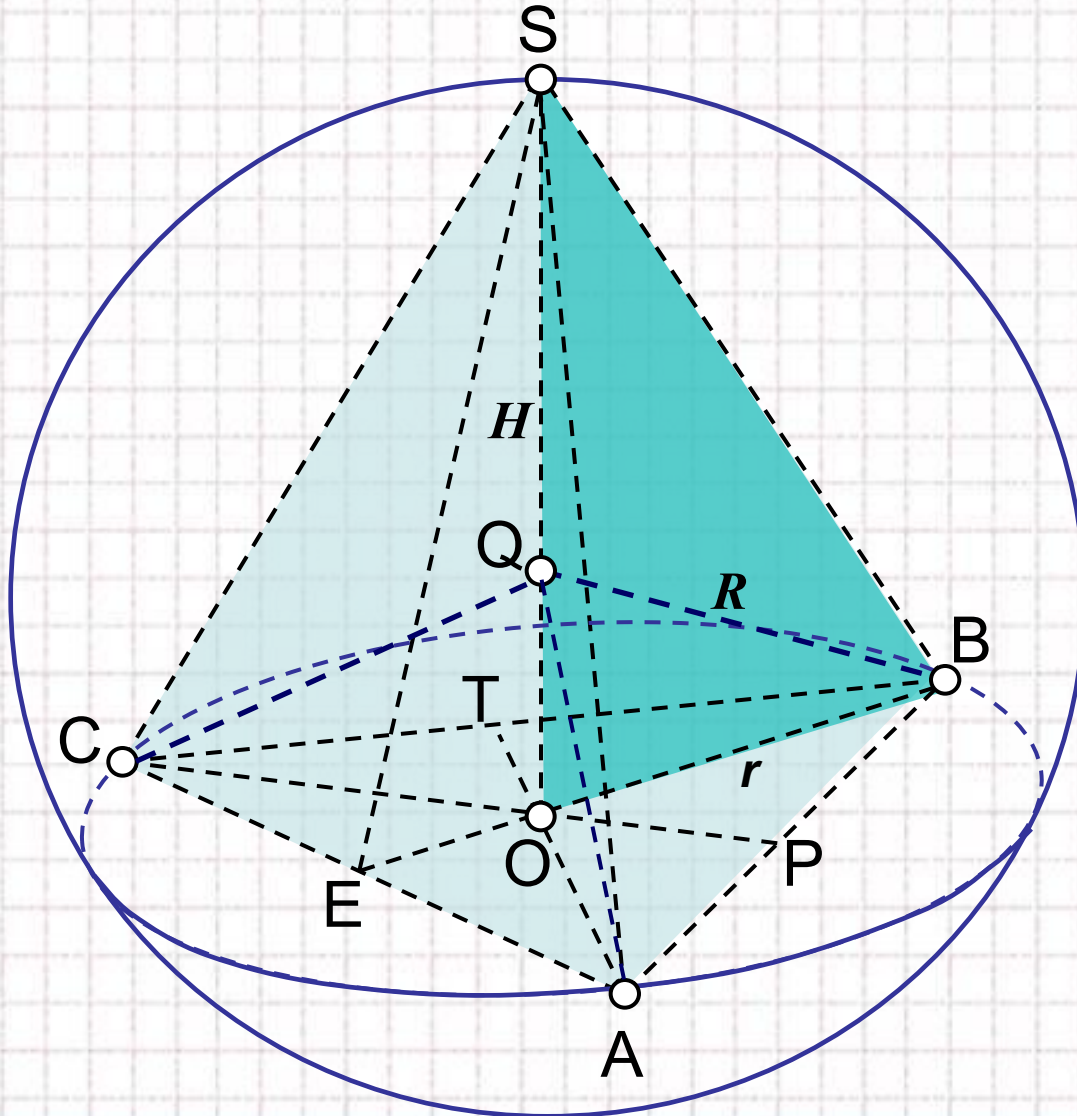


# Решение задач на комбинации многогранников и тел вращения

Урок геометрии, 11 класс

Чудаева Елена Владимировна,

## Правильная треугольная пирамида, вписанная в шар



$AQ = BQ = CQ = SQ = R$  –  
радиус шара.

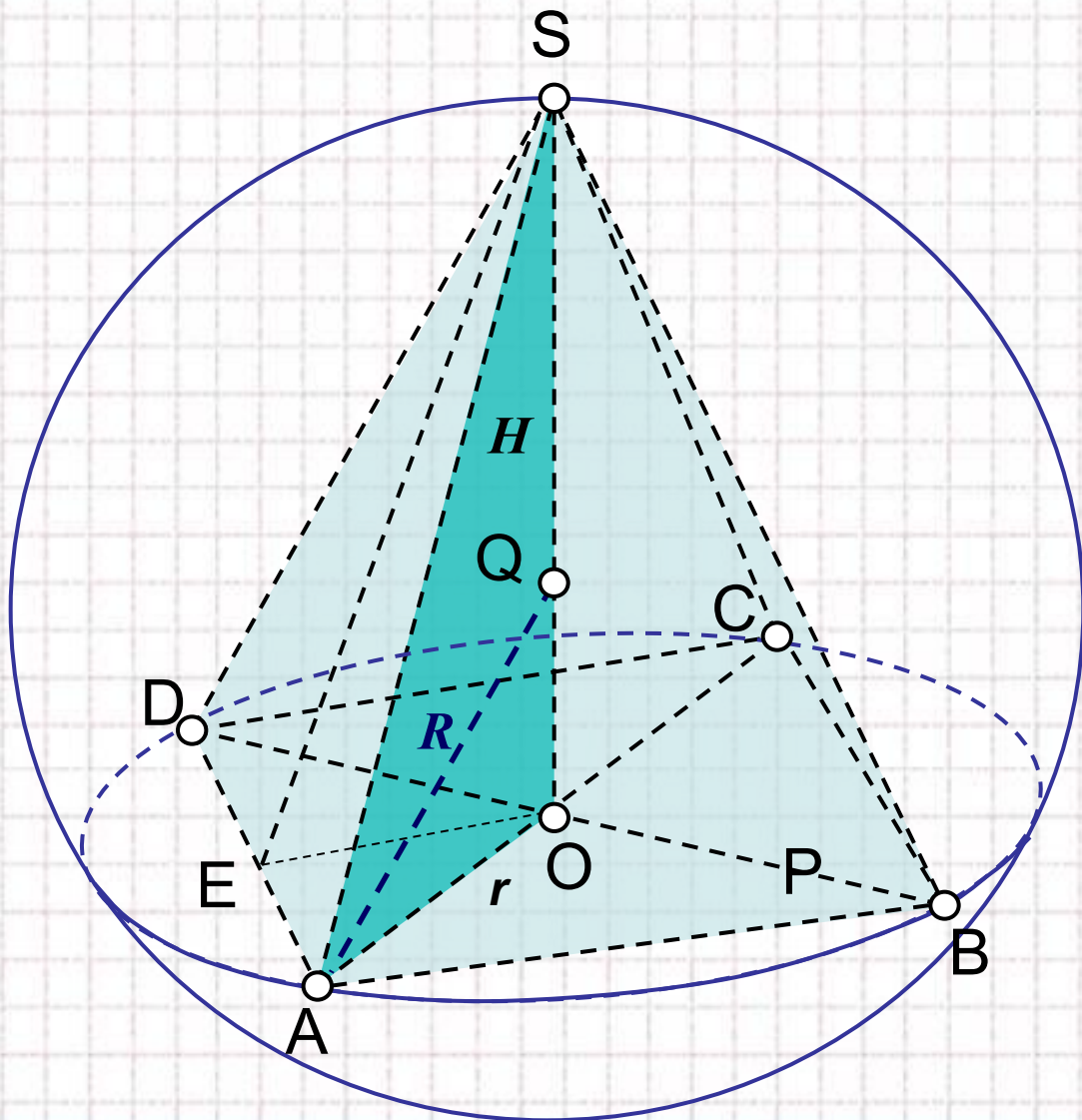
$AO = BO = CO = r$  –  
радиус круга,  
описанного около  
основания пирамиды.

$SO = H$  – высота  
пирамиды.

$SE = h$  – апофема  
пирамиды.

$$R^2 = r^2 + (H - R)^2$$

## Правильная четырехугольная пирамида, вписанная в шар



$AQ = BQ = CQ = DQ =$   
 $= SQ = R$  – радиус шара.

$AO = BO = CO = DO = r$   
радиус круга,  
описанного около  
основания пирамиды.

$SO = H$  – высота  
пирамиды.

$SE = h$  – апофема  
пирамиды.

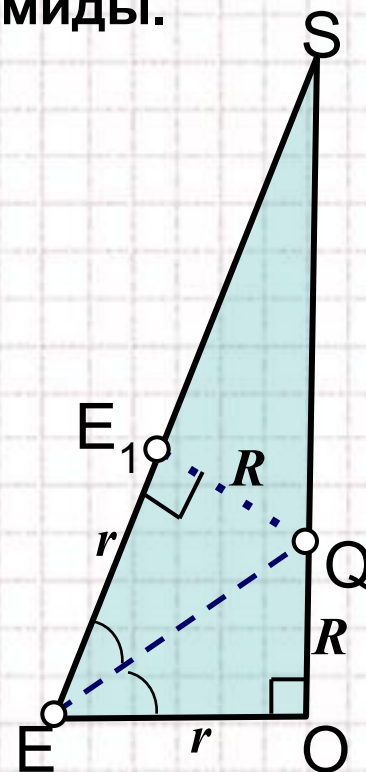
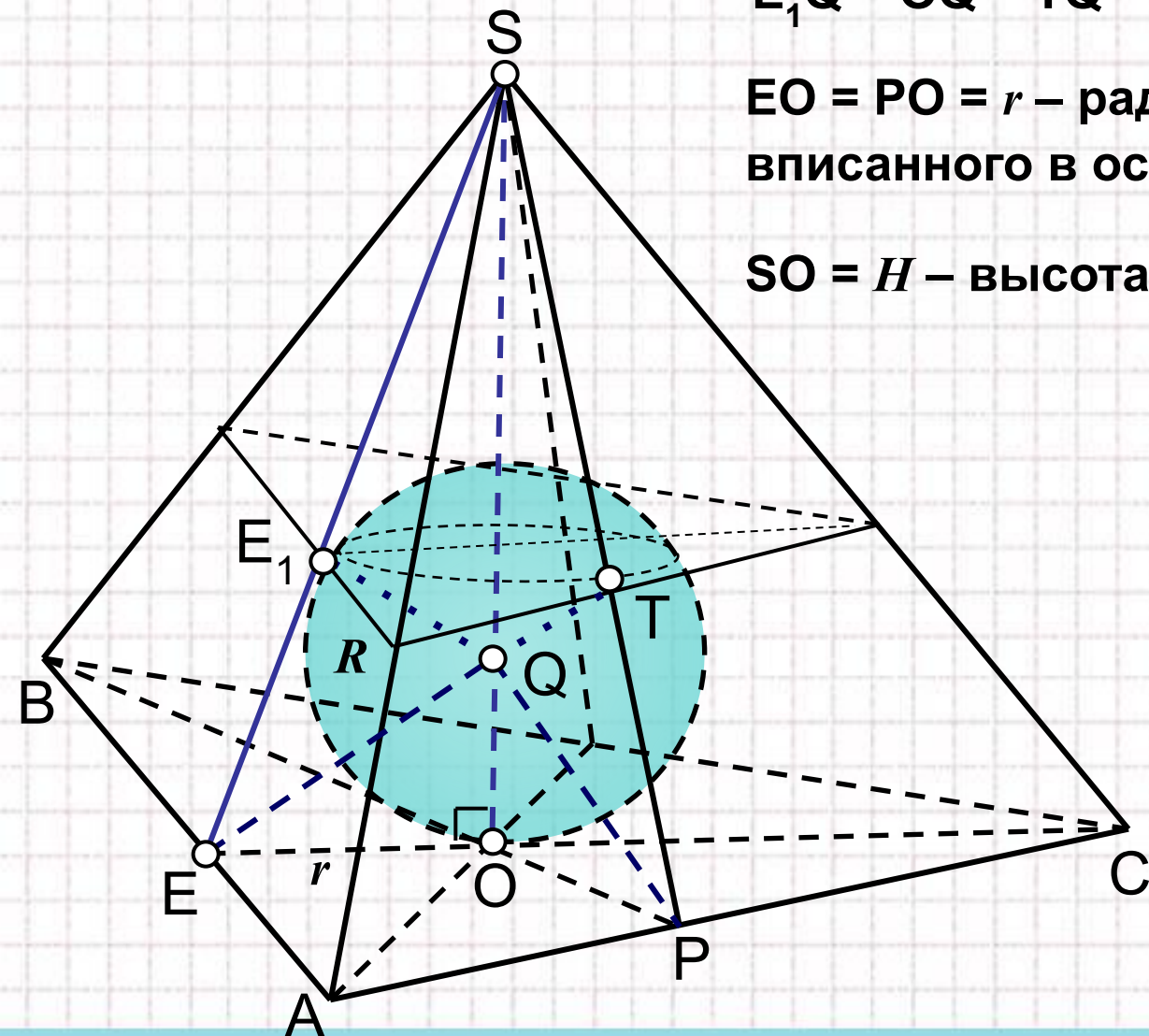
$$R^2 = r^2 + (H - R)^2$$

## Треугольная пирамида описана около шара

$E_1Q = OQ = TQ = R$  – радиус шара.

$EO = PO = r$  – радиус круга,  
вписанного в основание пирамиды.

$SO = H$  – высота пирамиды.

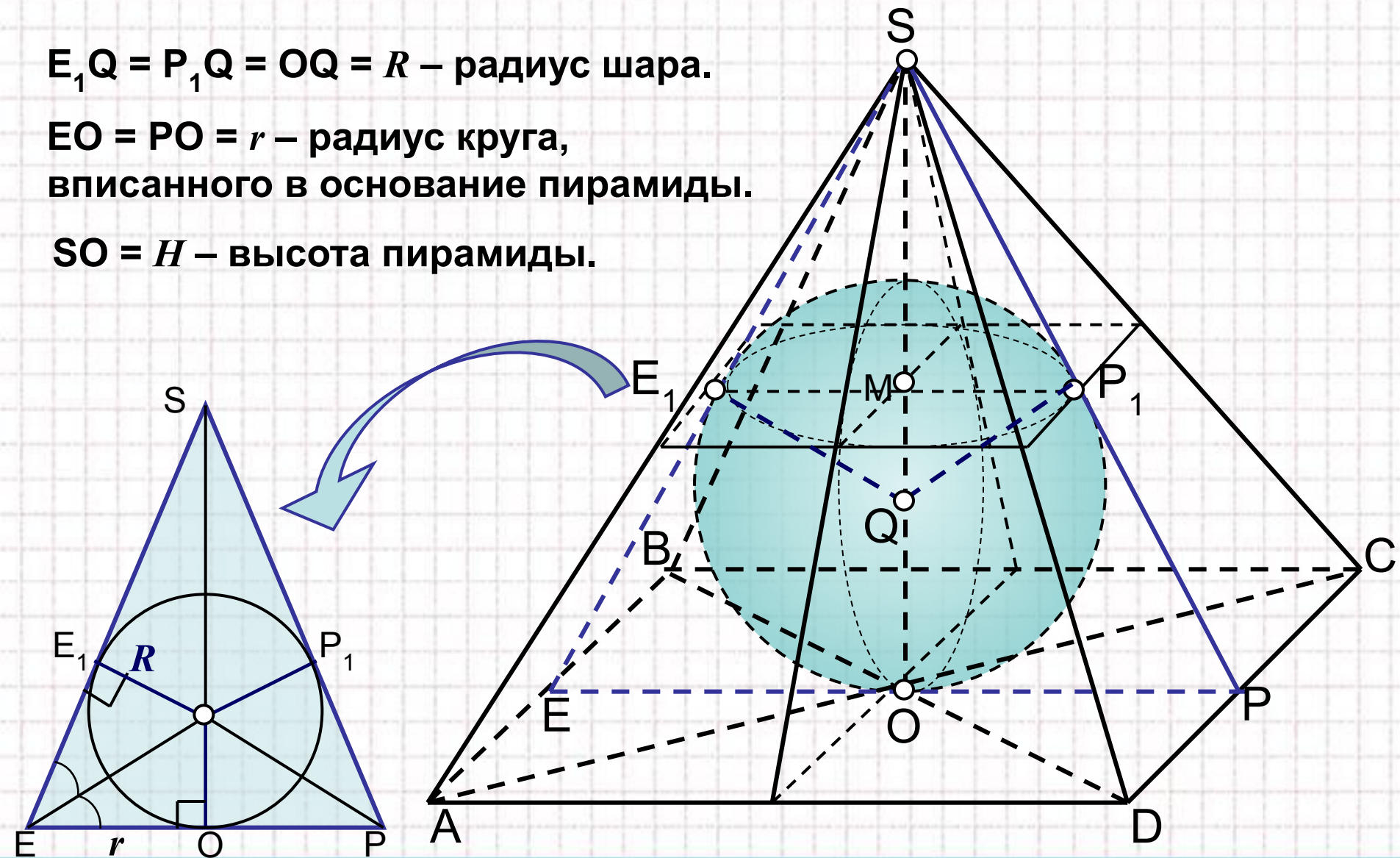


# Четырехугольная пирамида описана около шара

$E_1Q = P_1Q = OQ = R$  – радиус шара.

$EO = PO = r$  – радиус круга,  
вписанного в основание пирамиды.

$SO = H$  – высота пирамиды.



# Задачи



1

Шар вписан в пирамиду.

2

Пирамида вписана в шар.

3

Сфера вписана в конус.

4

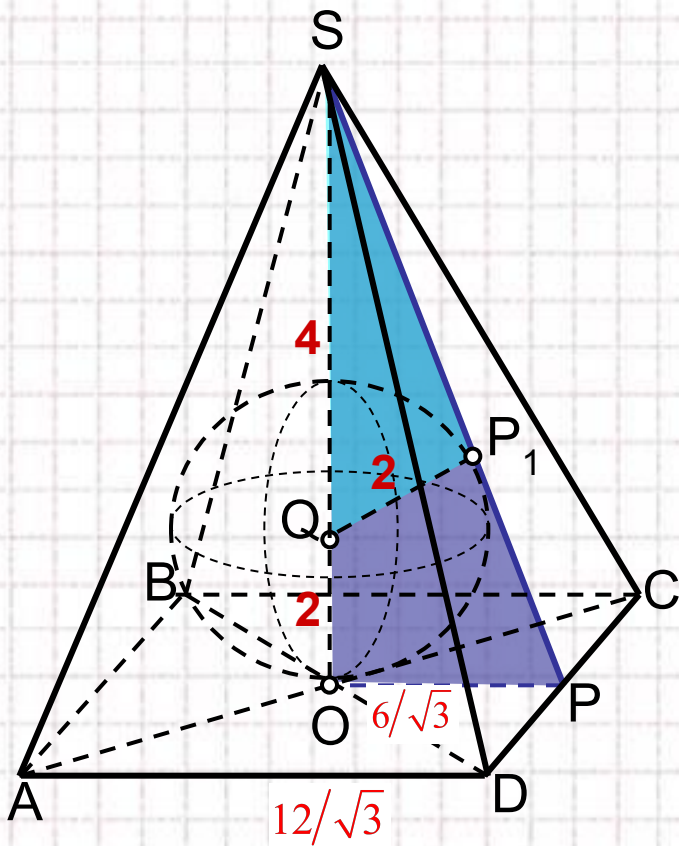
Куб вписан в конус.

5

Шар вписан в конус.

1

В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар, объем которого  $32\pi/3$ . Найдите объем пирамиды, если её высота равна 6.



Ответ: 96.

Решение.

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot H$$

$$1) V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32}{3} \pi, \text{ тогда } R^3 = 8, R_{ш} = 2.$$

$$2) SQ = SO - OQ, SQ = 6 - 2 = 4.$$

$$3) \triangle SP_1Q \text{ — прямоугольный, } SP_1 = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}.$$

$$4) \triangle SP_1Q \sim \triangle SOP \text{ (} \angle P_1 = \angle O = 90^\circ, \angle S \text{ — общий)},$$

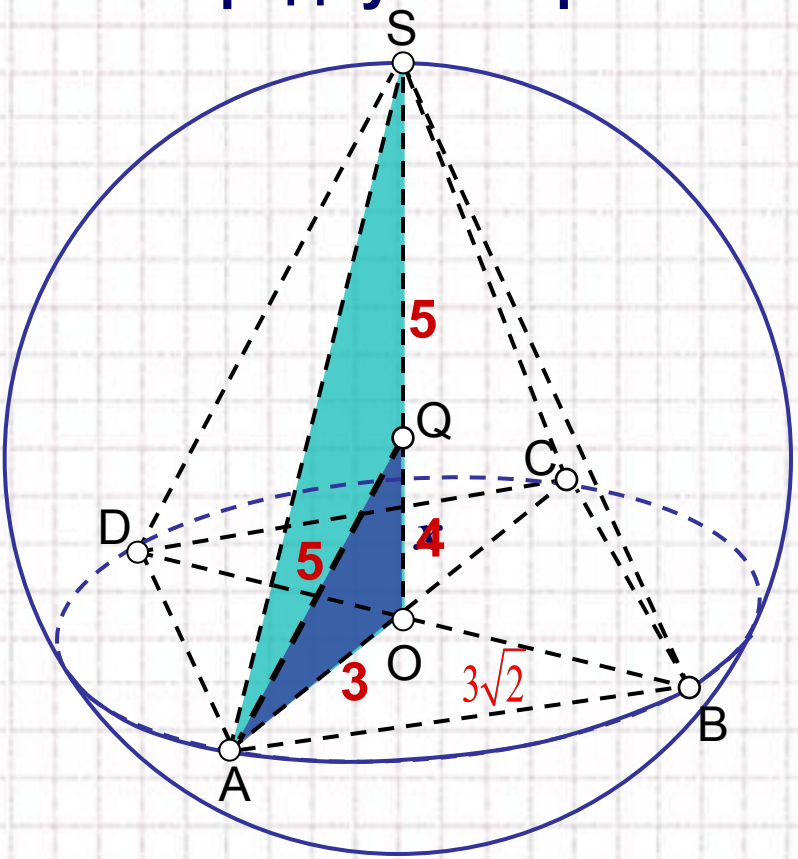
$$\frac{QP_1}{OP} = \frac{SP_1}{SO}, \text{ откуда } OP = \frac{QP_1 \cdot SO}{SP_1} = \frac{2 \cdot 6}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

5) Тогда сторона основания пирамиды вдвое больше, и равна  $\frac{12}{\sqrt{3}}$ .

$$6) V = \frac{1}{3} S_o \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{12}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot 6 = 96.$$

2

В шар, объём которого  $\frac{500}{3}\pi$ , вписана правильная четырёхугольная пирамида. Найдите объём пирамиды, если её боковое ребро равно  $3\sqrt{10}$ , а высота больше радиуса шара.



Решение.

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot H$$

1)  $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi$ , тогда  $R^3 = 125$ ,  $R_{ш} = 5$ .

2) Пусть  $OQ = x$ , тогда из  $\Delta AOQ$  выразим сторону  $AO$ :  $AO = \sqrt{25 - x^2}$ .

3) Составим теорему Пифагора для  $\Delta ASO$ :  
 $AS^2 = AO^2 + SO^2$ ,  $(3\sqrt{10})^2 = (25 - x^2) + (5 + x)^2$ .  
 Откуда находим  $OQ = 4$ .

4) Тогда  $SO = 5 + 4 = 9$ , и  $AO = 3$ .

5) В основании пирамиды квадрат, со стороной  $a$ , равной  $AO\sqrt{2}$ , е.  $a = 2\sqrt{2}$ .

6)  $V = \frac{1}{3} S_o \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 9 = 54$ .

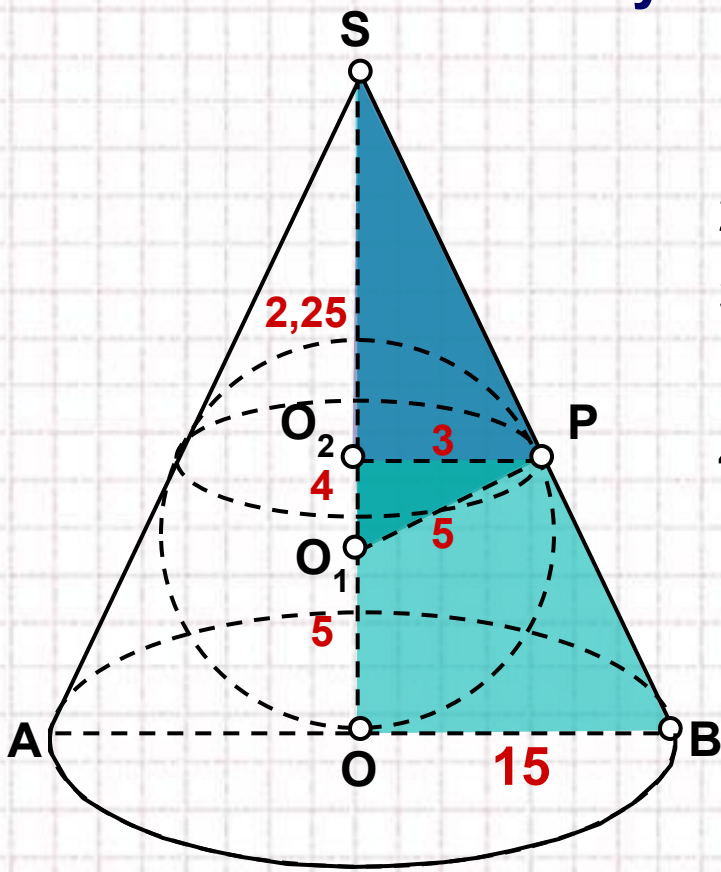
**Ответ: 54.**





3

Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна  $100\pi$ . Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна  $6\pi$ . Найдите радиус основания конуса.



**Решение.**

- 1)  $C = 2\pi r = 6\pi$ , тогда  $r = O_2P = 3$ .
- 2)  $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 100\pi$ , тогда  $R = O_1P = 5$ .
- 3) Из  $\Delta O_1O_2P$  по теореме Пифагора находим:  
 $O_1O_2 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ .
- 4) В  $\Delta O_1PS$  отрезок  $PO_2$  высота, проведенная из вершины прямого угла, значит  
 $O_2P = \sqrt{SO_2 \cdot O_1O_2}$  т.е.  $3 = \sqrt{SO_2 \cdot 4}$ ,  $SO_2 = \frac{9}{4} = 2,25$ .
- 5) Найдем высоту конуса  
 $SO = SO_2 + O_2O_1 + O_1O = 2,25 + 4 + 5 = 11,25$ .
- 6)  $\Delta SO_2P \sim \Delta SOB$  ( $\angle O_2 = \angle O = 90^\circ$ ,  $\angle S$  –

$\frac{SO_2}{SO} = \frac{O_2P}{OB}$ , откуда  $OB = \frac{O_2P \cdot SO}{SO_2} = \frac{3 \cdot 11,25}{2,25} = 15$ .

**Ответ: 15.**



4

В конус с образующей  $6\sqrt{6}$  и высотой 12 вписан куб. Найдите объём куба.

Решение.

1) Из прямоугольного  $\Delta SOP$  находим:

$$OP = \sqrt{SP^2 - SO^2} = \sqrt{216 - 144} = 6\sqrt{2}.$$

2)  $a$  – сторона куба, тогда  $a = R\sqrt{2}$ .

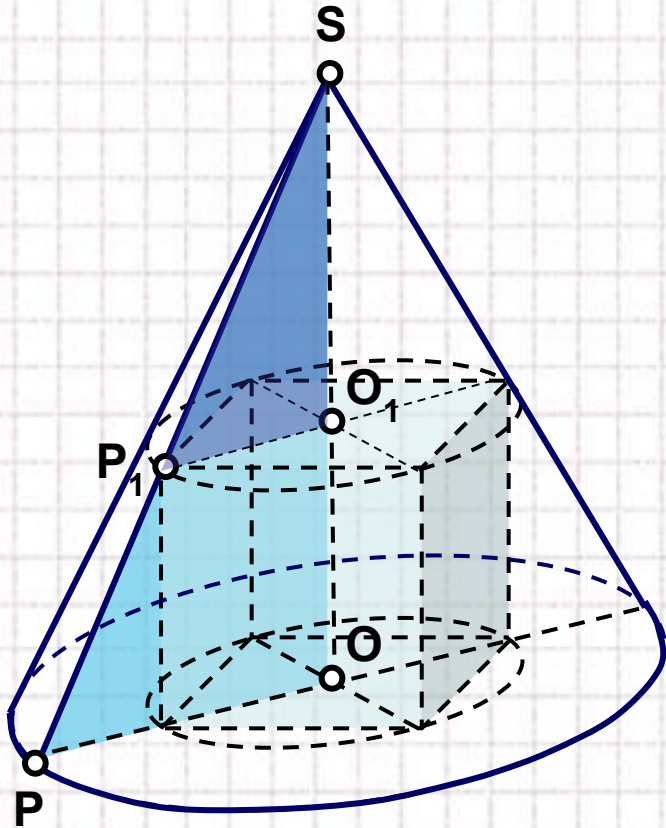
3) Выразим через  $a$ :  $O_1P_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ,

$$OO_1 = a, \quad SO_1 = SO - SO_1 = 12 - a.$$

4)  $\Delta SO_1P_1 \sim \Delta SOP$  ( $\angle O_1 = \angle O = 90^\circ$ ,  $\angle S$  – общий)  
 $\frac{SO_1}{P_1O_1} = \frac{SO}{PO}$ ,  $\frac{12 - a}{a/\sqrt{2}} = \frac{12}{6\sqrt{2}}$ , откуда  $a = 6$ .

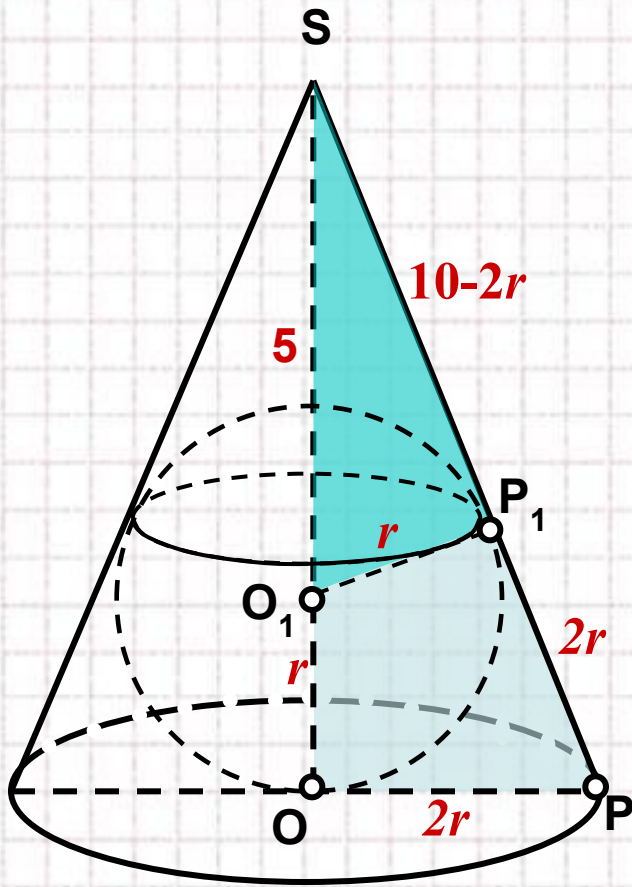
5)  $V_{\text{куба}} = a^3 = 6^3 = 216.$

Ответ: 216.



5

Площадь основания конуса равна площади поверхности вписанного в него шара. Найдите радиус шара, если образующая конуса равна 10.



Ответ: 3.

**Решение.**

1) Обозначим радиус шара  $r$ , а радиус основания конуса  $R$ .

2) По условию  $S_{\text{осн.конуса}} = S_{\text{шара}}$ , т.е.  
 $\pi R^2 = 4\pi r^2$ ,  $R = 2r$ .

3)  $\triangle SP_1O_1 \sim \triangle SOP$  ( $\angle P_1 = \angle O = 90^\circ$ ,  $\angle S$  – общий)  
 $\frac{O_1P_1}{OP} = \frac{SO_1}{SP}$ ,  $\frac{r}{2r} = \frac{SO_1}{10}$ , откуда  $SO_1 = 5$ ,  
 коэффициент подобия треугольников  $k = \frac{1}{2}$ .

4) Заметим, что  $PP_1 = 2r$ ,  $SP_1 = 10 - 2r$ ,  $SO = 5 + r$ .

5) Тогда  $\frac{SP_1}{SO} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{10 - 2r}{5 + r} = \frac{1}{2}$ , откуда  $r = 3$ .



## *Реши самостоятельно*

1

Высота конуса равна 6, а объём равен  $144\pi$ .  
Найдите площадь полной поверхности куба,  
вписанного в конус.

**Ответ: 96**

2

Шар объём которого равен  $32\pi/3$ , вписан в конус.  
Найдите высоту конуса, если радиус его  
основания равен  $2\sqrt{3}$ .

**Ответ: 6**



*Желаю удачи!*

## Домашнее задание



Реши задачу и оформи решение либо на альбомном листе, либо в виде электронного документа (PowerPoint, Paint, Word и т.д.)

## Рефлексия

Что нового вы узнали на уроке?

Чему вы научились?

Какое у вас настроение в конце урока?

Можете ли вы объяснить решение данных задач однокласснику, пропустившему урок сегодня?



## Использованные ресурсы

1. Готман Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения. М.: МЦНМО, 2006.— 160 с.
2. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Геометрия. М.: Просвещение, 1992.
3. Комплект таблиц по стереометрии:  
[http://www.varson.ru/geometr\\_9.html](http://www.varson.ru/geometr_9.html)
4. Единый государственный экзамен 2001: Тестовые задания: Математика/С.В. Климин, Т.В. Стрункина, Е.И. Пантелеева и др.; М-во образования РФ. – М.: Просвещение, 2001
5. Для создания шаблона презентации использовалась картинка [http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029\\_1.jpg](http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029_1.jpg) и шаблон с сайта <http://aida.ucoz.ru>
6. Рисунки на слайдах №6, №12, №13 взяты с сайта:  
<http://office.microsoft.com/ru-ru/images/results.aspx?qu=%D1%81%D0%BC%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D1%8B>