Лекция 5. Электрический ток

Вопросы:

- Носители тока в средах.
- Сила и плотность тока.
- Уравнение непрерывности.
- Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы.
- Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах.
- Правила Кирхгофа для разветвленных электрических цепей.

Носители тока в средах

Электрический ток, как известно, представляет собой перенос заряда q через ту или иную поверхность S, например, через сечение проводника. Ток может течь в твердых телах (металлы и полупроводники), в жидкостях (электролиты) и в газах (газовый разряд).

Для протекания тока необходимо наличие в данной среде свободных заряженных частиц, которые принято называть **носителями тока**. Носителями тока в проводящей среде могут быть электроны, ионы, либо макрочастицы, несущие на себе избыточный заряд (например, заряженные пылинки и капельки).

При отсутствии электрического поля носители совершают хаотические (тепловые) движения со скоростью $\boldsymbol{v}$ и через любую поверхность S проходит в обе стороны в среднем одинаковое число носителей того и другого знака, так что ток через эту поверхность равен нулю.

Носители тока в средах

При включении же электрического поля на хаотическое движение носителей накладывается упорядоченное движение со скоростью $\boldsymbol{u}$ (скорость дрейфа), и через поверхность появляется ток. В этом случае скорость носителей будет ($\boldsymbol{v}$ + $\boldsymbol{u}$), но так как средний вектор тепловой скорости $\langle \boldsymbol{v} \rangle = 0$, то получается, что их средняя скорость $\langle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u} \rangle$.

Определение: Электрический ток – это направленное упорядоченное движение электрических зарядов.

Сила и плотность тока

Количественной характеристикой электрического тока является **сила тока** I, т. е. величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность S в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (1)$$

Единицей измерения силы тока в системе СИ является 1[А].

Электрический ток может быть распределен по поверхности неравномерно. Поэтому для более детальной характеристики тока вводят **вектор плотности тока** $\boldsymbol{j}$. Модуль этого вектора равен отношению:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2}\right] \qquad (2)$$

где dI – сила тока через элементарную площадку $dS_{\perp}$, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения носителей.

За направление вектора $\boldsymbol{j}$ принимают направление вектора скорости упорядоченного движения (дрейфа) положительных носителей.

Сила и плотность тока

Перенос отрицательного заряда dq_- в одном направлении ($\boldsymbol{u}_-$) эквивалентен переносу такого же по величине положительного заряда dq_+ в противоположном направлении ($\boldsymbol{u}_+$). Поэтому, если ток создается носителями обоих знаков, то через данную поверхность S за время dt пройдет ток с силой:

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{|dq_-|}{dt} \tag{3}$$

Или этот ток можно трактовать также через плотность тока:

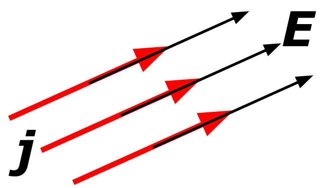
$$\vec{j} = e^+ \cdot n^+ \cdot \vec{u}_+ + e^- \cdot n^- \cdot \vec{u}_- = \rho_+ \cdot \vec{u}_+ + \rho_- \cdot \vec{u}_- \tag{4}$$

где e^+, e^- - элементарные положительные и отрицательные заряды, n^+, n^- - концентрации положительных и отрицательных носителей, $\boldsymbol{u}_+$, $\boldsymbol{u}_-$ - направленные скорости движения положительных и отрицательных носителей (эти вектора – противоположны), ρ_+, ρ_- - объемные плотности зарядов положительных и отрицательных носителей.

Замечание: Из-за разных знаков у ρ_+ и ρ_- оба слагаемых в (4) имеют одно направление, поэтому выражение (4) в скалярном виде выглядит также: $j = \rho_+ \cdot u_+ + |\rho_-| \cdot u_-$.

Сила и плотность тока

Поле вектора ***j*** можно изобразить графически с помощью **линий тока** (линий вектора ***j***), которые проводятся так же, как и линии вектора ***E***.



Зная вектор плотности тока ***j*** в каждой точке пространства (интересующей нас поверхности *S*), можно найти силу тока через поверхность:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_S j_n \cdot ds \qquad (5)$$

Причем, сила тока - величина алгебраическая (может быть $+I$, $-I$), и ее знак зависит от выбора направления нормали ***n*** к поверхности *S*.

Ток, не изменяющийся со временем, называется **постоянным**, для него справедливо равенство:

$$I = \frac{q}{t}$$

где q – заряд, переносимый за конечное время t через рассматриваемую поверхность.

Уравнение неразрывности

Пусть в некоторой проводящей среде течет ток через замкнутую поверхность *S*, для которой определим положительную внешнюю нормаль ***n***. Тогда интеграл $\oint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$ определяет заряд, выходящий в единицу времени из объема *V*, ограниченного рассматриваемой поверхностью.

В силу закона сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда, содержащегося в объеме *V*, т. е. имеет место:

$$\oint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} = -\frac{dq}{dt} \qquad (6)$$

Выражение (6) – это <u>интегральная форма</u> **уравнения непрерывности**, является, по существу, аналитическим выражением закона сохранения заряда в изолированной системе.

Уравнение неразрывности

Для преобразования уравнения (6) к дифференциальной форме представим заряд как $q = \int\limits_V \rho \cdot dV$, а поток $\oint\limits_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ согласно теореме Остроградского-Гаусса как $\oint\limits_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int\limits_V \nabla \vec{j} \cdot dV,$

тогда получаем: $\int\limits_V \nabla \vec{j} \cdot dV = -\frac{d}{dt} \int\limits_V \rho \cdot dV = -\int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV,$

так как плотность заряда зависит от времени и от координат, а интеграл $\int\limits_V \rho \cdot dV$ зависит только от времени. Последнее равенство должно выполняться при произвольном выборе объема *dV*, а это возможно лишь тогда, когда в каждой точке пространства будет выполняться условие:

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (7)$$

Это <u>дифференциальная форма</u> записи уравнения непрерывности.

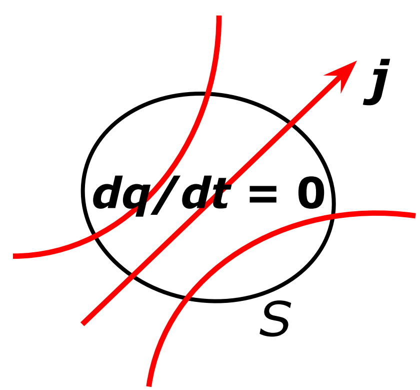
Уравнение неразрывности

Согласно (7) в точках, для которых дивергенция $\boldsymbol{j}$ имеет место (т. е. $\nabla\vec{j} \neq 0$), существуют источники вектора $\boldsymbol{j}$ (источники тока) и происходит убывание заряда.

В случае стационарного тока, когда $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (ρ = const), получаем:

$$\nabla\vec{j} = 0 \qquad (8)$$

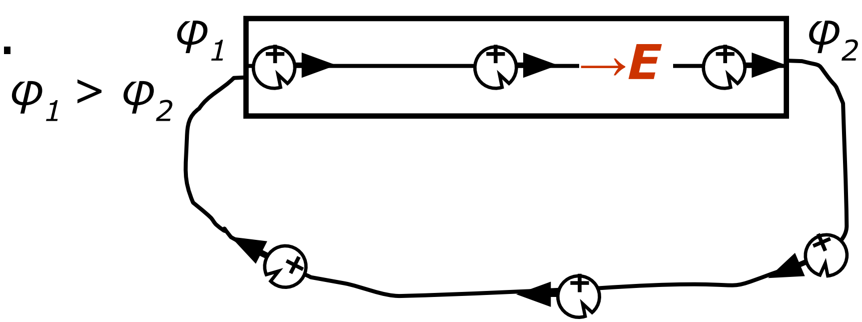
Последнее часто называют **условием стационарности тока**, т. е. в этом случае вектор $\boldsymbol{j}$ не имеет источников, а линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются (они – замкнуты сами на себя внешним образом) и, соответственно, $\oint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = 0.$



Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы

Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей тока приведет очень быстро к тому, что поле внутри проводника исчезнет (потенциал – выравнится) и ток прекратится.

Для того, чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом φ_2 (сами носители – положительные) непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу с большим потенциалом φ_1 – непрерывно их подводить (см. рис.). Иными словами, необходимо осуществлять круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути. Это согласуется с тем, что линии постоянного тока – замкнуты.



Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы

Циркуляция вектора ***E*** электростатического поля равна 0, т. е. $\oint_L \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=0.$

Поэтому в замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные носители движутся в направлении ***E*** (т. е. в сторону убывания потенциала), должны быть участки, где перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против кулоновских сил электростатического поля.

Перемещение зарядов на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатической природы, называемых **сторонними силами**. Сторонние силы могут иметь химическую, фотоэлектрическую, электромагнитную и прочую природу (эти силы реализуются в гальванических элементах, аккумуляторах, солнечных элементах, динамо-машине).

Таким образом, для поддержания тока постоянным необходимы сторонние силы, действующие либо на всей цепи, либо на ее отдельных участках.

Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы

Сторонние силы принято характеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами.

Определение: Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется **электродвижущей силой** (**э. д. с.**) действующей в цепи (или на ее участке): $E = \dfrac{A}{q}$ (9)

Размерность э. д. с. в СИ – [В], как у потенциала.

По аналогии с электростатическим полем ***E***, проявляющим себя в кулоновском силовом взаимодействии зарядов, вводят поле сторонних сил и его напряженность ***E****, как: $\vec{E}^* = \dfrac{\vec{F}^*}{q}$ (10)

где ***F****- вектор сторонней силы, q – единичный положительный заряд.

Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы

По определению работа сторонних сил над зарядом q на участке цепи 1-2: $A_{12} = \int_1^2 \vec{F}^* \cdot \vec{dl} = q \cdot \int_1^2 \vec{E}^* \cdot \vec{dl}$, а разделив на q, получаем э. д. с., действующую на этом участке:

$$E_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* \cdot \vec{dl} \qquad (11)$$

А взяв циркуляцию вектора напряженности поля сторонних сил, получаем э. д. с., действующую во всей цепи:

$$E = \oint \vec{E}^* \cdot \vec{dl} \qquad (12)$$

Таким образом, в электрической цепи, состоящей из системы проводников и источников тока, в общем случае, действует как кулоновское поле с напряженностью ***E***, так и поле сторонних сил с напряженностью ***E****, т.е. – результирующее поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{кул} + \boldsymbol{E}^*$, которое воздействует на заряд q с силой:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{кул} + \boldsymbol{F}^* = q \cdot (\boldsymbol{E}_{кул} + \boldsymbol{E}^*) \qquad (13)$$

Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы

Работа, совершаемая этой силой над зарядом на участке цепи 1-2:

$$A_{12} = q\cdot\int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dl} + q\cdot\int_1^2 \vec{E}^*\cdot\vec{dl} = q\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) + q\cdot\mathcal{E}_{12} \quad (14)$$

Определение: Величина, численно равная работе, совершаемой кулоновскими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется **падением напряжения** (или просто н**апряжением**) на данном участке цепи 1-2:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12} \quad (15)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется <u>однородным</u>, для такого участка: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Участок цепи, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется <u>неоднородным</u>, для него: $U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$.

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- *Закон Ома в интегральной форме*

Немецкий физик Г. Ом в 1826 г. экспериментально установил закон, согласно которому:

<u>сила тока, протекающего по однородному проводнику (в смысле отсутствия сторонних сил), пропорциональна разности потенциалов на его концах, т. е. напряжению на проводнике</u>:

$$I = \frac{1}{R} \cdot U \qquad (16)$$

Здесь $U = \varphi_1 - \varphi_2$, R – электрическое сопротивление проводника. Выражение (16) принято рассматривать как интегральную форму закона Ома.

Единицей измерения сопротивления в СИ является 1[Ом] = 1[В] / 1[А]. Сопротивление *R* зависит от формы и размеров проводника, свойств материала, температу-ры, распределения тока по объему проводника.

Так для однородного цилиндрического проводника имеем:

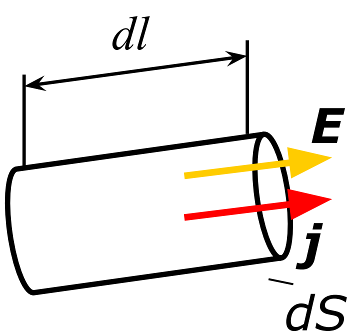
$$R = \rho \cdot l / S,$$

где ρ - удельное электрическое сопротивление материала проводника в [Ом.м], l – его длина, а S – сечение проводника.

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- *Закон Ома в дифференциальной форме*

Рассмотрим изотропный проводник, в котором упорядоченное движение носителей тока происходит в направлении вектора ***E*** или иначе: вектора ***j*** и ***E*** сонаправлены. Выделим мысленно в окрестности некоторой точки проводящей среды элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам ***j*** и ***E***, основанием *dS* и длиной *dl*.



На основании интегрального закона Ома $I = U/R$, подставляя выражение для тока, текущего через сечение dS с плотностью j, как $I = j \cdot dS$, напряжение на цилиндрическом элементе $U = E \cdot dl$ и его сопротивление $R = \rho \cdot dl/dS$, имеем: $j \cdot dS = \dfrac{E \cdot dl}{\rho \cdot dl} \cdot dS;$

отсюда получаем плотность тока $j = \dfrac{1}{\rho} \cdot E.$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

Таким образом, получаем дифференциальную форму закона Ома в векторном виде:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E} \qquad (17)$$

где $\sigma = 1/\rho$ - электропроводность материала проводника (размерность σ в СИ: 1 [См/м]).

Замечание: Если электроток обусловлен носителями одного знака, то можно записать $\boldsymbol{j} = e \cdot n \cdot \boldsymbol{u}$ и, сравнивая с (17), заключаем: скорость дрейфа $\boldsymbol{u}$ пропорциональна напряженности поля $\boldsymbol{E}$, т. е. силе, сообщающей носителям это движение. А из механики известно, что пропорциональность скорости приложенной к телу силе наблюдается в тех случаях, когда кроме силы, вызвавшей само движение, на тело также действует сила сопротивления среды. В нашем случае протекания тока в среде эта сила определяется взаимодействием носителей тока с частицами среды (проводника) и обусловливает электросопротивление проводника. В связи с этим дополнительно носители характеризуются **подвижностью** b, которая определяется как отношение $b = u / E$.

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- *Закон Ома для неоднородного участка цепи*

На неоднородном участке электроцепи на носители тока действуют, кроме кулоновских сил $\boldsymbol{F}_{\text{кул}} = e \cdot \boldsymbol{E}$, еще и сторонние силы $\boldsymbol{F}^* = e \cdot \boldsymbol{E}^*$, которые также вызывают направленное движение зарядов. Очевидно, что средняя скорость $\boldsymbol{u}$ в этом случае пропорциональна суммарной силе $e \cdot (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)$. Соответственно и плотность тока на таком участке будет пропорциональна сумме $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)$:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \cdot (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*) \qquad (18)$$

Выражение (18) является дифференциальной формой закона Ома для неоднородной цепи.

Для случая тонких проводников (или контура тока в объемном проводнике) и совпадения направления тока с осью проводника плотность тока j можно считать постоянной во всех точках сечения провода S. Разделив (18) на σ и умножив скалярно на элемент провода $\boldsymbol{dl}$, взятый по направлению от сечения 1 к сечению 2, получаем при последующем интегрировании по длине 1-2:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} \cdot \overrightarrow{dl}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_1^2 \vec{E}^* \cdot \overrightarrow{dl}$$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

Далее записав сумму двух интегралов в последнем выражении как $(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}$ и заменив $\sigma = 1/\rho$, $\vec{j}\cdot\vec{dl} = j_l \cdot dl$, где $j_l = I / S$, причем $I = \text{const}$ (по условию); получаем левый интеграл $\int_1^2 \frac{\vec{j}\cdot\vec{dl}}{\sigma} = I\cdot\int_1^2 \rho\cdot\frac{dl}{S}$, где $\int_1^2 \rho\cdot\frac{dl}{S} = R$ - полное сопротивление участка цепи между сечением 1 и сечением 2.

Таким образом, интегральное уравнение преобразуется к виду:

$$I\cdot R = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12} \qquad (19)$$

или

$$I = \frac{1}{R}\cdot[(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}] \qquad (20)$$

Выражения (19) и (20) являются интегральными формами закона Ома для неоднородного участка цепи.

Замечание: Э. д. с. E_{12}, как и ток I, - алгебраическая величина: если э. д. с. способствует движению положительных носителей в выбранном направлении (1-2), $E_{12} > 0$, а если – препятствует, то $E_{12} < 0$. R – это полное сопротивление цепи (с учетом $r_{источ}$).

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- *Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме*

  В случае, когда проводник с током неподвижен в пространстве и в нем не происходит химических превращений, работа постоянного тока, определяется как: $A = U \cdot I \cdot t$ (21)

  где $I \cdot t = q$ – заряд, прошедший за время t через каждое сечение проводника, U – напряжение, приложенное к концам проводника. Причем для однородного участка цепи эта работа равна $A = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot q$, а для неоднородного участка цепи - $A = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot q + E_{12} \cdot q$.

  Работа (21) затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего он – нагревается. Принято говорить, что при протекании тока в проводнике выделяется тепло в количестве $Q = U \cdot I \cdot t$, а заменив по закону Ома напряжение $U = I \cdot R$, приходим к <u>интегральной форме закона Джоуля-Ленца</u>:

  $$Q = R \cdot I^2 \cdot t \qquad (22)$$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

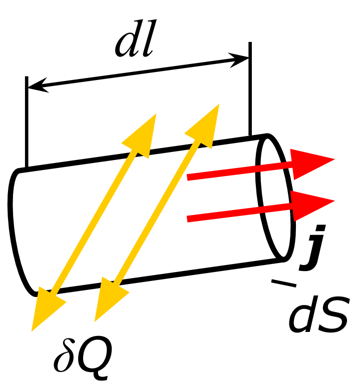
- *Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме*

  В случае переменной во времени силы тока джоулево тепло рассчитывается по формуле:

$$Q = \int_0^t R\cdot I^2 \cdot dt \qquad (23)$$

- *Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме*

  Для характеристики локального тепловыделения используется понятие удельной тепловой мощности тока $\dot{Q}_{уд}$ ([Дж/м3.с]). Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем.



Согласно закону Джоуля-Ленца в форме (23) за время *dt* выделяется элементарное тепло $\delta Q = R\cdot I^2\cdot dt =$

$$= \frac{\rho\cdot dl}{dS}\cdot (j\cdot dS)^2 \cdot dt = \rho\cdot j^2 \cdot dV\cdot dt,$$

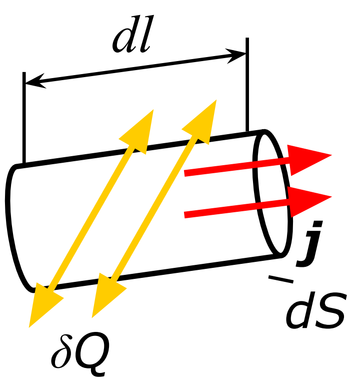
где $dV = dS\cdot dl.$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- *Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме*

Разделив последнее выражение на ($dV \cdot dt$), определим количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени: $\dot{Q}_{уд} = \rho \cdot j^2$ или $\dot{Q}_{уд} = j^2/\sigma$ (24)

Выражения (24) являются дифференциальной формой закона Джоуля-Ленца. Это наиболее общая форма записи данного закона – работает для любых проводников вне зависимости от их формы, однородности и природы сил, возбуждающих электрический ток.



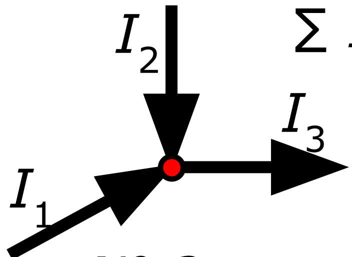
Если на носители тока действуют только электрические силы, то (24) можно переписать как $\dot{Q}_{уд} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma \cdot E^2$.

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Определение. Узлом электрической цепи называется точка, в которой сходятся более чем два проводника.

- *Правило № 1*

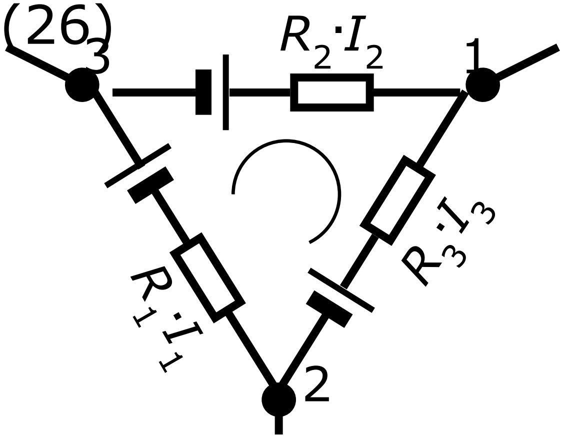
Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю: $\sum I_i = 0$ (25)



Замечание. Правило вытекает из уравнения непрерывности.

- *Правило № 2*

Алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме э.д.с., действующих в этом контуре: $\sum I_i \cdot R_i = \sum E_i$ (26)



Замечание. Уравнение (26) является следствием закона Ома для неоднородного участка цепи.

Задавшись направлением обхода контура, составляют систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
I_1 \cdot R_1 &= \varphi_2 - \varphi_3 + E_1 \\
I_2 \cdot R_2 &= \varphi_3 - \varphi_1 + E_2 \\
I_3 \cdot R_3 &= \varphi_1 - \varphi_2 - E_3 \\
\hline
\sum I_i \cdot R_i &= \sum E_i
\end{aligned}
$$