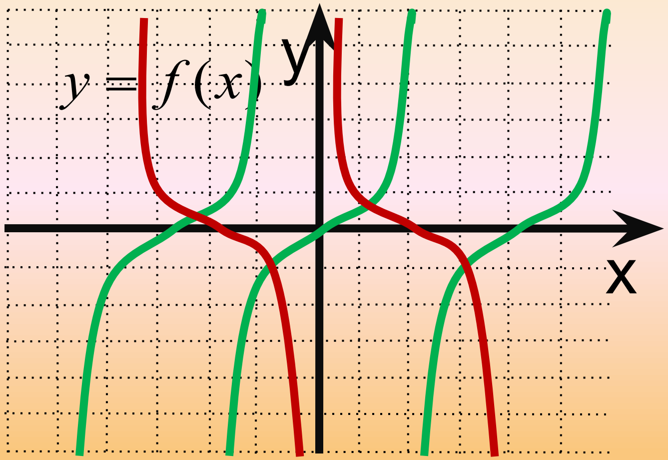
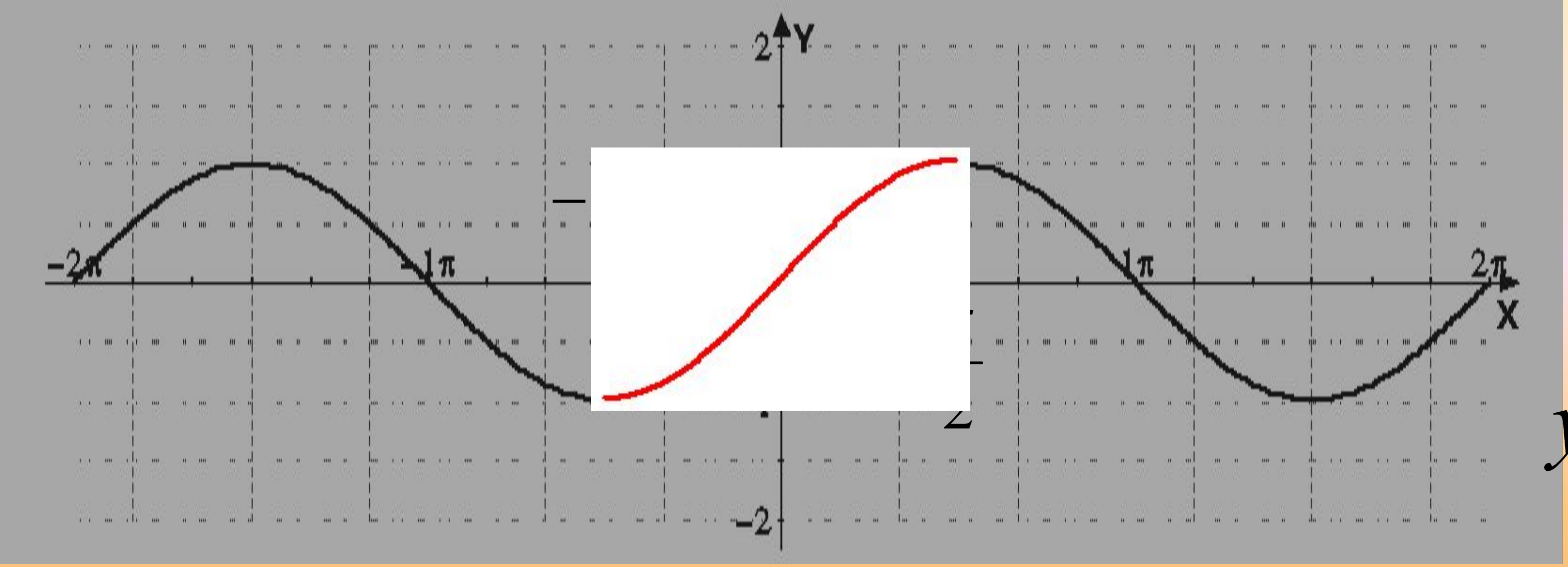


Обратные функции. Свойства взаимно обратных функций.

Основные вопросы:

1. Функция $y = \arcsin x$, её свойства и график.
2. Функция $y = \arccos x$, её свойства и график.
3. Функция $y = \mathrm{arctg} x$, её свойства и график.
4. Функция $y = \mathrm{arcctg}\ x$, её свойства и график.



$$y = \sin x$$

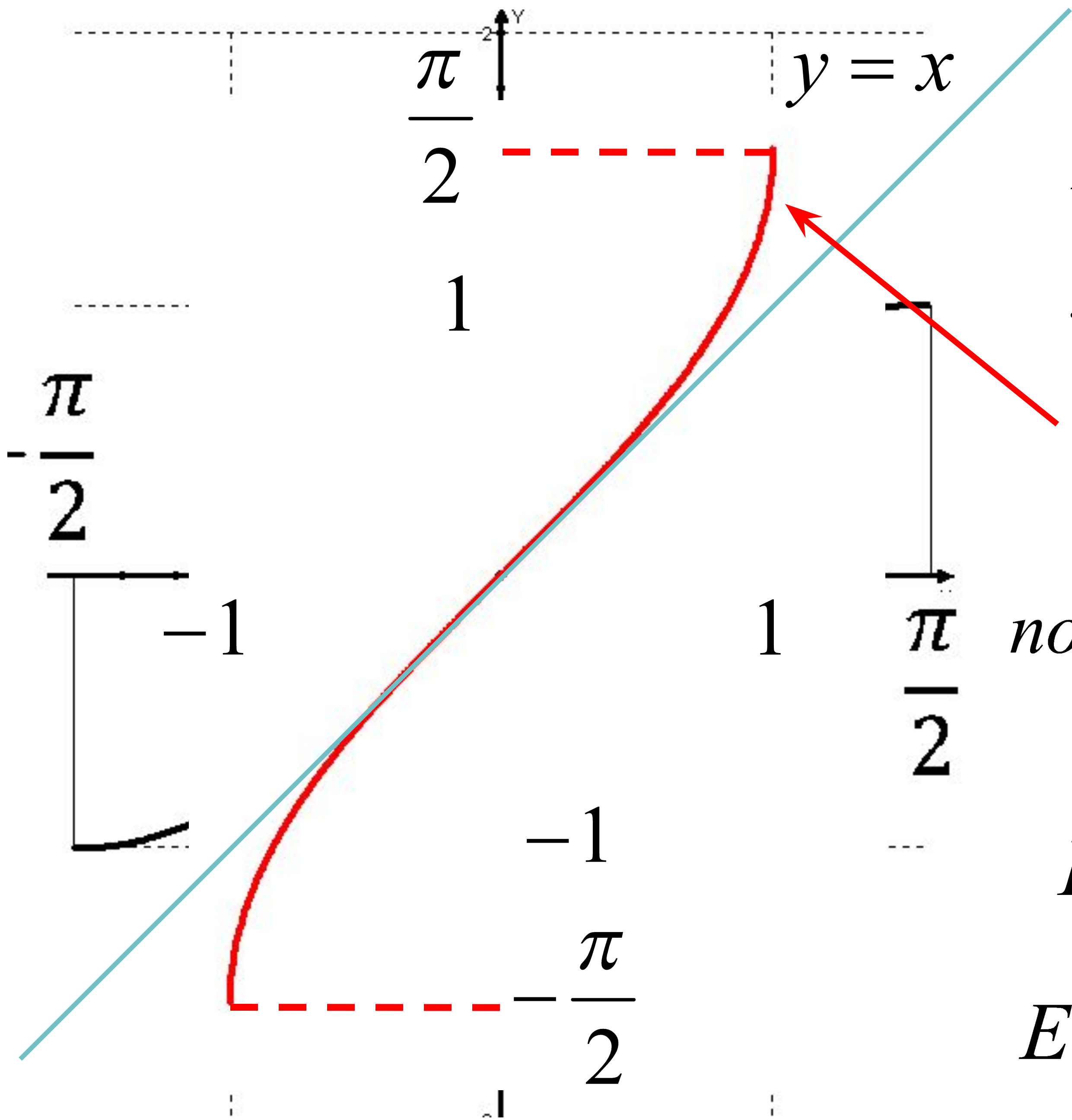
$$D(y) = (-\infty; \infty), \qquad E(y) = [-1;1].$$

Рассмотрим функцию $y = \sin x,$

если $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}],$

тогда функция возрастает,

значит существует ей обратная.



$y = \sin x$

Выразим x

$x = \arcsin y$

переобозначим

x *и* y.

получим функцию

$y = \arcsin x$

$D(y) = [-1;1]$

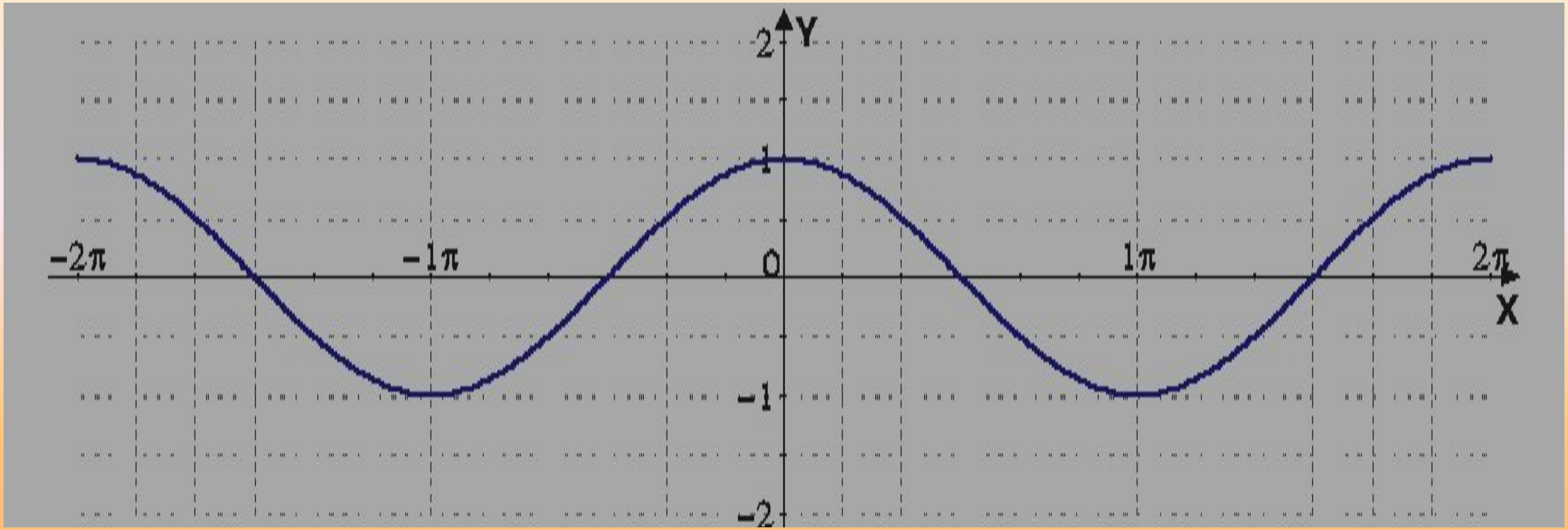
$E(y) = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Функция, обратная функции $sin\ x$

- **Арксинусом** числа *a* называется число *b* из [-**П/2**; **П/2**] такое, что **sin b = a.**

Обозначение: **arcsin b = a.**

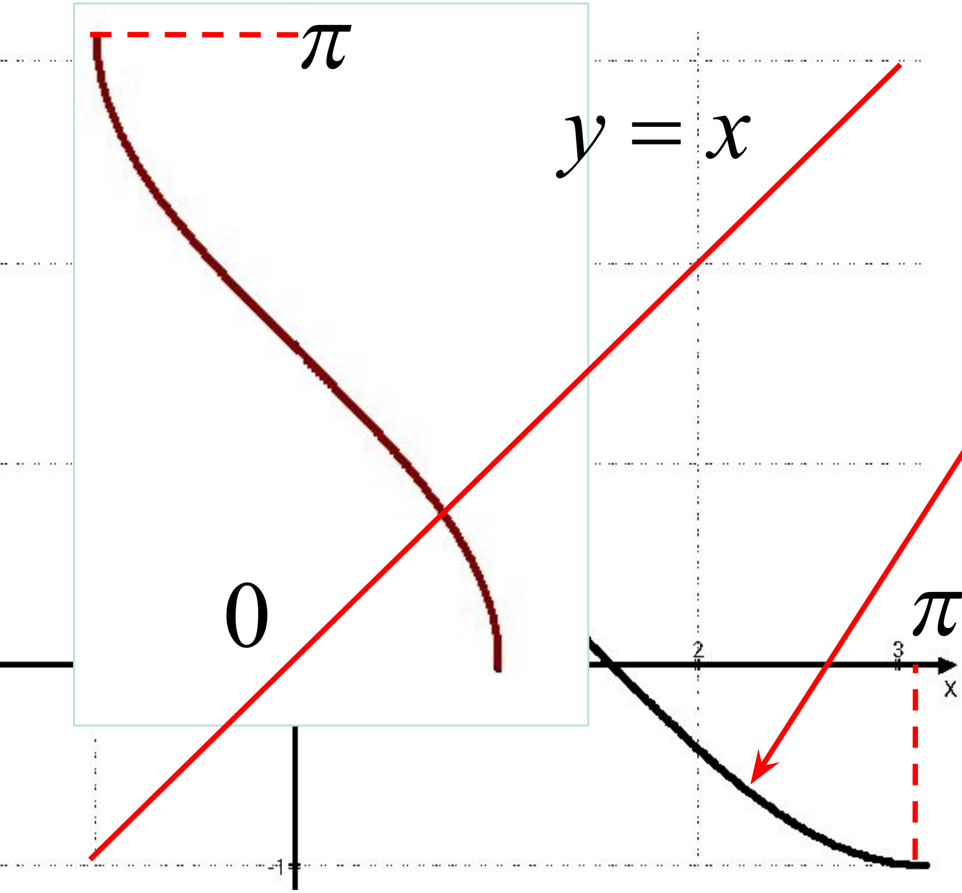
- D (arcsin x) = [-1;1]
- E (arcsin x) = [-**П/2**; **П/2**]
- Функция y = arcsin x ***нечетная*** arcsin (-x) = - arcsin x
- Функция y = arcsin x непрерывная на [-1;1]
- Функция y= arcsinx ***возрастает*** на области определения
- График функции y= arcsin x ***симметричен*** части графика y= sin x при xЄ [-**П/2**; **П/2**] относительно прямой y = x



$$y = \cos x$$

$$D(y) = (-\infty; \infty)$$

$$E(y) = [-1; 1]$$



Рассмотрим

$y = \cos x$

на промежутке $[0; \pi]$

$E(y) = [-1;1]$

Выразим x

$x = \arccos y$

переобозначим x *и* y.

$y = \arccos x$

$D(y) = [-1;1]$

$E(y) = [0; \pi]$

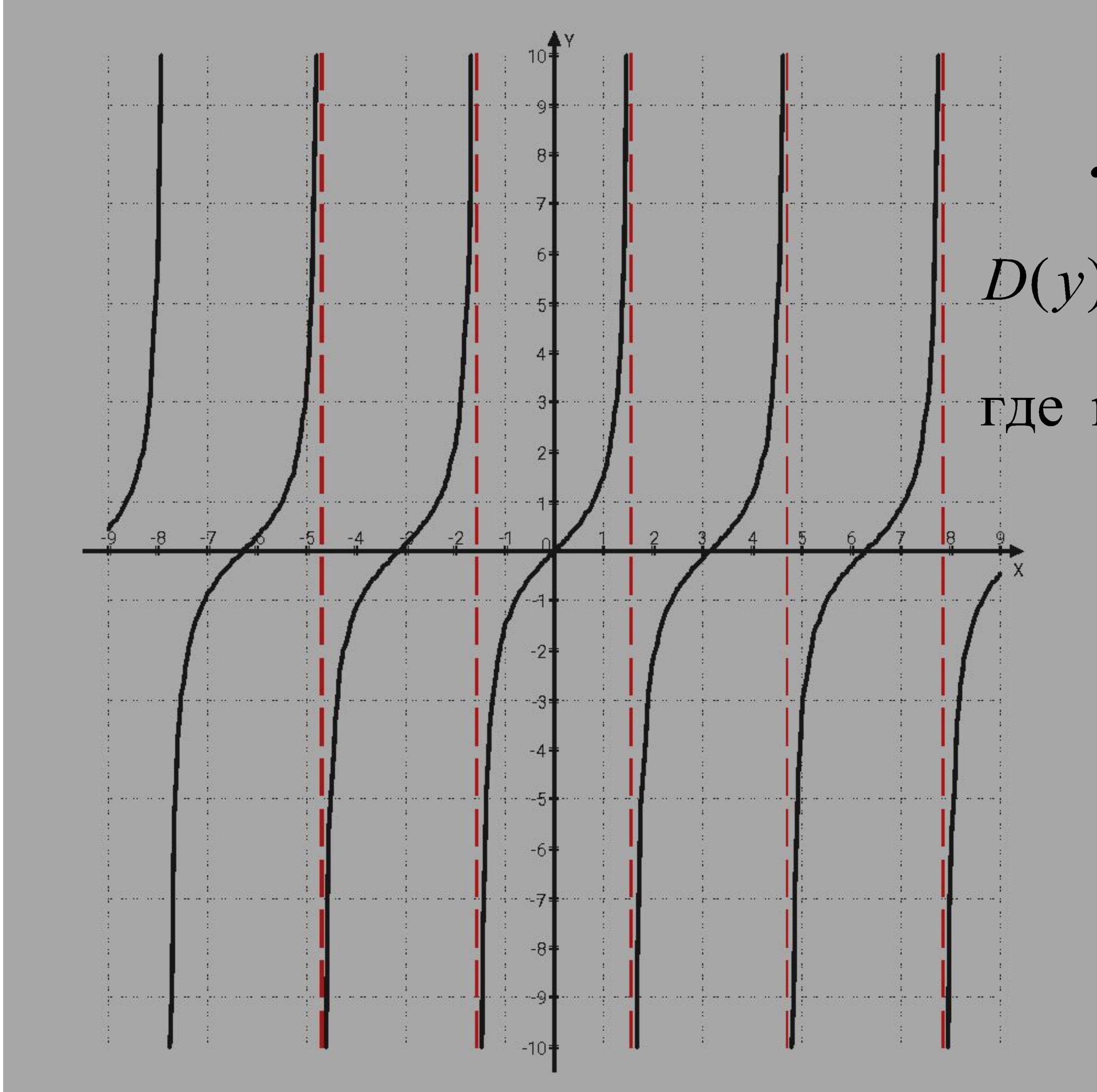
Выберем промежуток,

на котором функция

$y = \cos x$ *монотонна.*

Функция, обратная функции $\cos x$

- **Арккосинусом** числа *a* называется число *b* из [-**1**; **1**] такое, что **cos b = a**
- Обозначение: **arccos b = a**
- D (arccos x)=[-1; 1]
- E (arccos x)= [0; ***П***]
- Функция y = arccos x **не является четной и нечетной** arccos (-x)= ***П*** -arccos x
- Функция y = arccos x **непрерывная** на [-1;1]
- Функция y = arccos x **убывает** на области определения
- График функции y = arccos x **симметричен** части графика y = cos x при xЄ [0; ***П***] относительно прямой y = x



$$y = tgx$$

$$D(y):\quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

где n - целое.

$$E(y) = R.$$

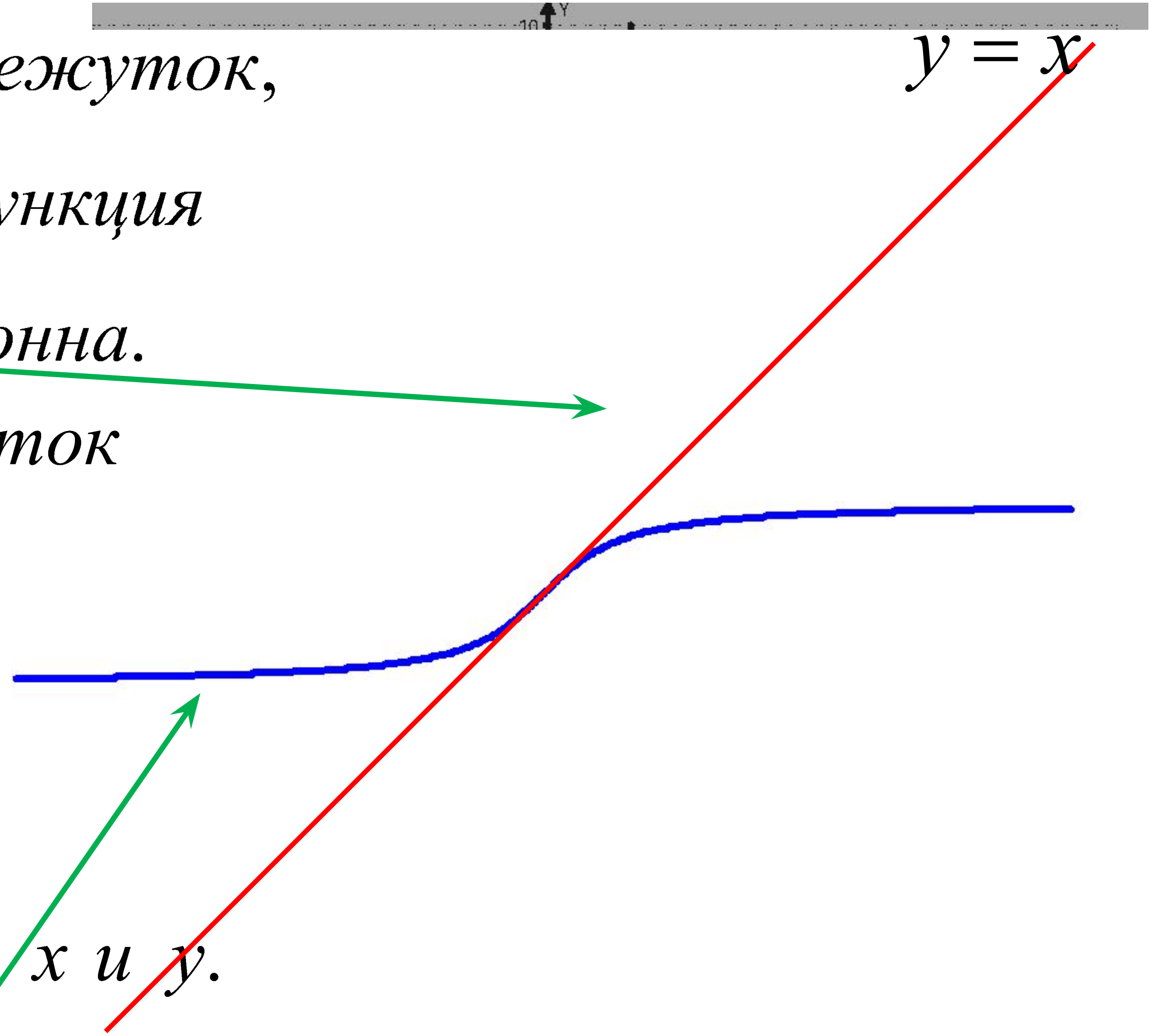
Выберем промежуток,

на котором функция

y = tgx *монотонна.*

это промежуток

$$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$



Выразим x

$$x = arctgy$$

переобозначим x и y.

$$y = arctgx$$

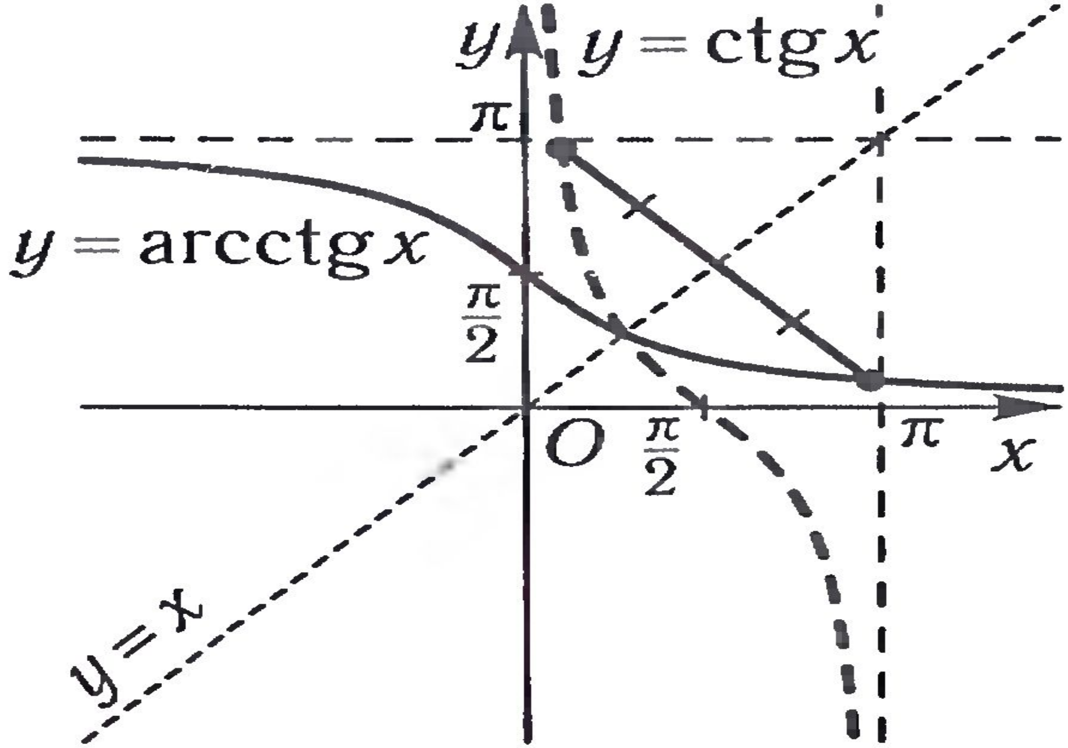
$$D(y) = \left(-\infty;+\infty\right),\quad E(y):|y|<\frac{\pi}{2}$$

Функция, обратная функции $tg\,x$

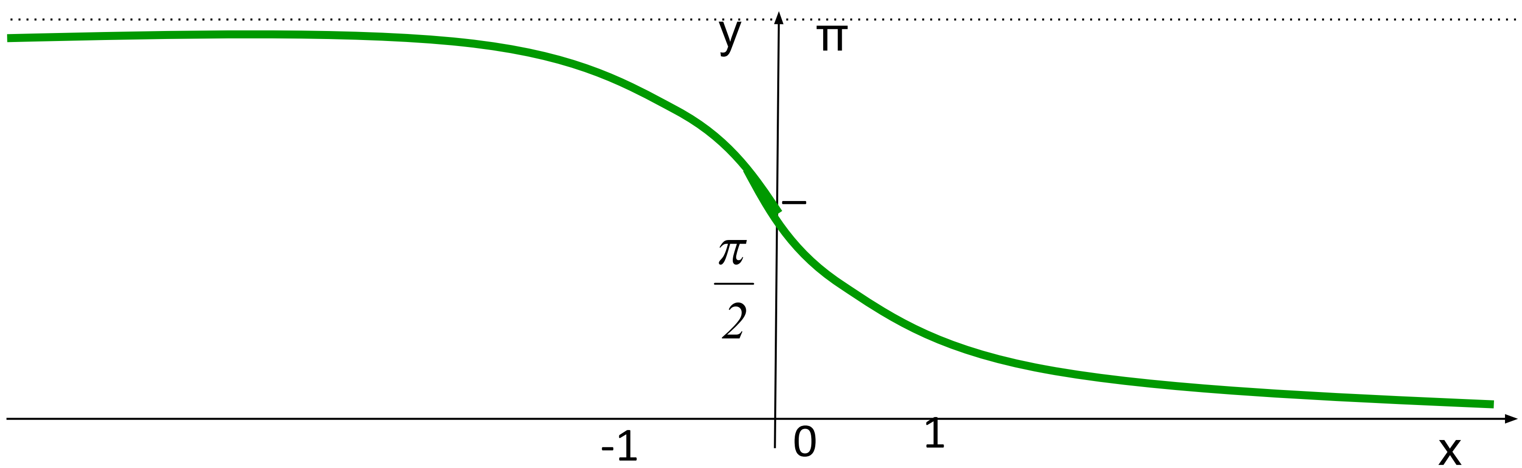
- **Арктангенсом** числа *a* называется число *b* из (-**П/2**; **П/2**) такое, что tg b = a

Обозначение: **arctg b = a.**

- D (arctg x) = R
- E (arctg x) = (-**П/2**; **П/2**)
- Функция y = arctg x ***нечетная*** arctg (-x) = - arctg x
- Функция y = arctg x ***возрастает*** на области определения
- График функции y = arctg x ***симметричен*** части графика y= tg x при xЄ (-**П/2**; **П/2**) относительно прямой y = x



y
y = ctg x
π
y = arcctg x
π/2
O
π/2
π
x
y = x



y
π
π/2
-1
0
1
x

Функция, обратная функции $ctg\ x$

- **Арккотангенсом** числа *a* называется число *b* из (0;**П**) такое, что **ctg b = a**

Обозначение: **arcctg b = a.**

- D (arcctg x) = R
- E (arcctg x) = (0; **П**)
- Функция y = arcctg x **не является четной и нечетной** arcctg (-x)= = **П** - arcctg x
- Функция y = arcctg x **убывает** на области определения
- График функции y = arcctg x **симметричен** части графика y= ctg x при xЄ (0; **П**) относительно прямой y = x

Вычислим: а) $\arcsin\left(\sin\frac{31\pi}{6}\right)$;

а) Равенство $\arcsin(\sin x) = x$ верно только для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому, чтобы воспользоваться данной формулой, сначала приведем аргумент в промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, вычитая или прибавляя целое число, кратное 2π:

$$\arcsin\left(\sin\frac{31\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{31\pi}{6} - 4\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

а затем, воспользовавшись формулой $\sin(\pi - x) = \sin x$, «загоним» аргумент в нужный промежуток. Итак, получаем

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6},$$

так как $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вычислим: б) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{25\pi}{3}\right)\right)$.

б) Действуем аналогично, только сначала будем приводить аргумент в промежуток $[0;\pi]$:

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{3}+8\pi\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3},$$

так как $\dfrac{\pi}{3}\in[0;\pi]$.

Задача 1 Сравнить числа:

1) $\arcsin\frac{1}{3}$ и $\arcsin\frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

▶ 1) Так как $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ и функция $y = \arcsin x$ возрастает, то $\arcsin\frac{1}{3} > \arcsin\frac{1}{4}$.

2) Так как $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает, то $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\arccos(2x+1)=\frac{3\pi}{4}$.

▶ Так как $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$, то по определению арккосинуса числа данное уравнение равносильно уравнению $2x+1=\cos\frac{3\pi}{4}$, откуда $2x+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. ◁

Задача 3 Найти область определения функции

$$y = \arcsin\frac{x-1}{3}.$$

▶ Так как функция $y = \arcsin x$ определена при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то функция $y = \arcsin\frac{x-1}{3}$ определена для тех значений x, для которых выполняются неравенства $-1 \leqslant \frac{x-1}{3} \leqslant 1$. Отсюда

$$-3 \leqslant x - 1 \leqslant 3, \ -2 \leqslant x \leqslant 4. \ \triangleleft$$

Преобразование выражений

Вычислить :

1) $24\sqrt{3}tg(\arcsin 0{,}5)$; 2) $4\sqrt{2}\cos(arcctg 1)$;

3) $12\sqrt{7}ctg\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

Решение :

1) $24\sqrt{3}tg\,\frac{\pi}{6} = 24\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 24.$

2) $4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$

3) $\sin\alpha = -\frac{3}{4}, \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4},$

$ctg\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3},$

$$12\sqrt{7}ctg\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = -12\sqrt{7}ctg\left(\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right) =$$

$$= -12\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = 28.$$

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1.Решить уравнение $\arccos(2x+1)=\frac{3\pi}{4}$.

Так как $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$, тт по определени ю арккосинус а числа данное уравнение равносильн о уравнению

$2x+1=\cos\frac{3\pi}{4}$, откуда $2x+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

2.Решить уравнение $2(\arcsin x)^2-5\arcsin x+2=0$.

Пусть $\arcsin x=t$, причем $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, тогда

$2t^2-5t+2=0$.

$t_1=2, t_2=\frac{1}{2}$, но $2\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,

$\arcsin x=\frac{1}{2}$, $x=\sin\frac{1}{2}$.

Домашнее задание:

1) $\arcsin 1 + \arccos 1 + \mathrm{arctg}\, 1 + \mathrm{arcctg}\, 1$;

2) $\arcsin 0 + \arcsin 1 + \arcsin(-1)$;

3) $\arccos 0 + \arccos 1 + \arccos(-1)$;

4) $\mathrm{arctg}(-1) + \mathrm{arcctg}(-1)$;

5) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\, 0$;

6) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathrm{arctg}\, 0$;

7) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{arcctg}\, 1$;

8) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

1) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos 1 + 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$;

4) $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos\frac{1}{2}\right)$.