Эконометрика

Тема 3

Тема 3. Модель парной линейной регрессии.

1) **Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.**
2) **Линейная парная регрессия и коэффициент корреляции.**
3) **Основные положения регрессионного анализа. Оценка параметров парной регрессионной модели. Теорема Гаусса—Маркова.**
4) **Интервальная оценка функции регрессии и ее параметров.**
5) **Оценка значимости уравнения регрессии. Коэффициент детерминации.**
6) **Геометрическая интерпретация регрессии и коэффициента детерминации.**
7) **Коэффициент ранговой корреляции Спирмена.**

1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.

Виды зависимостей

Функциональная - каждому значению одной переменной соответствует вполне ***определенное значение*** другой

Статистическая (стохастическая, вероятностная) - каждому значению одной переменной соответствует ***определенное (условное) распределение*** другой переменной

Корреляционная - каждому значению одной переменной соответствует ***определенное условное математическое ожидание (среднее значение)*** другой – иначе это функциональная зависимость между значениями одной переменной и условным математическим ожиданием другой

Корреляционная зависимость может быть представлена в виде:

$$M_x(Y) = \varphi(x) \quad , \quad \text{где } \varphi(x) \neq \text{const}$$

В регрессионном анализе рассматриваются *односторонняя зависимость случайной переменной Y от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной X* (Y подвержена случайному разбросу за счет действия ряда *неконтролируемых факторов*)

1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.

При этом:

1) $M_x(Y) = \varphi(x)$ - модельное уравнение регрессии (или просто ***уравнение регрессии***);

2) $\varphi(x)$ - модельная функция регрессии (или просто ***функция регрессии***);

3) график функции $\varphi(x)$ - модельная линия регрессии (или просто ***линия регрессии***);

4) $\hat{y} = \hat{\varphi}(x, b_0, b_1, \ldots, b_p)$

где $\hat{y}$ — *условная (групповая) средняя* переменной Y при фиксированном значении переменной $X = x$, b_0, b_1,..., b_p — параметры кривой.

- оценка (приближенное выражение, аппроксимация) ***по выборке функции регрессии*** – используется на практике, т.к. точный закон условного распределения Y, как правило, ***неизвестен.***

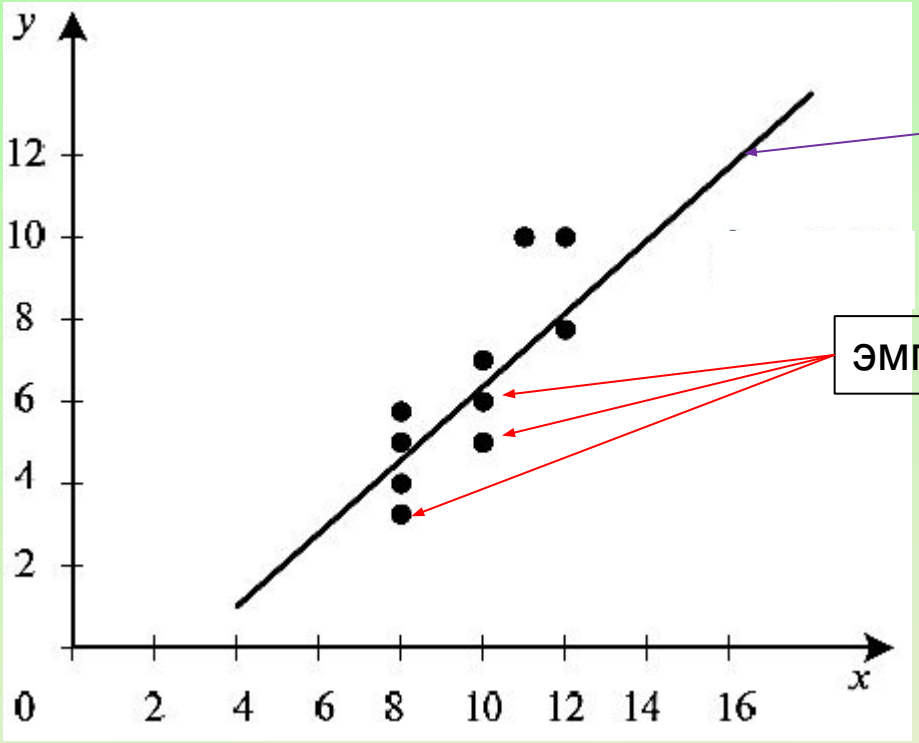
Уравнение 4) – это ***выборочное уравнение регрессии*** или ***выборочная линия (кривая) регрессии.*** При правильно определенной аппроксимирующей функции $\hat{\varphi}(x, b_0, b_1, \ldots, b_p)$ при $n \to \infty$ она будет сходиться по вероятности к функции регрессии $\varphi(x)$.

2. Линейная парная регрессия и коэффициент корреляции.

Рассмотрим зависимость между сменной добычей угля на одного рабочего *Y(т)* и мощностью пласта *X(м)* для *n=10 шахт*:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
y_i	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Изобразим полученную зависимость *графически:*



Предполагаемая *линейная корреляционная (регрессионная) зависимость* между переменными X и Y

эмпирические точки *поля корреляции*

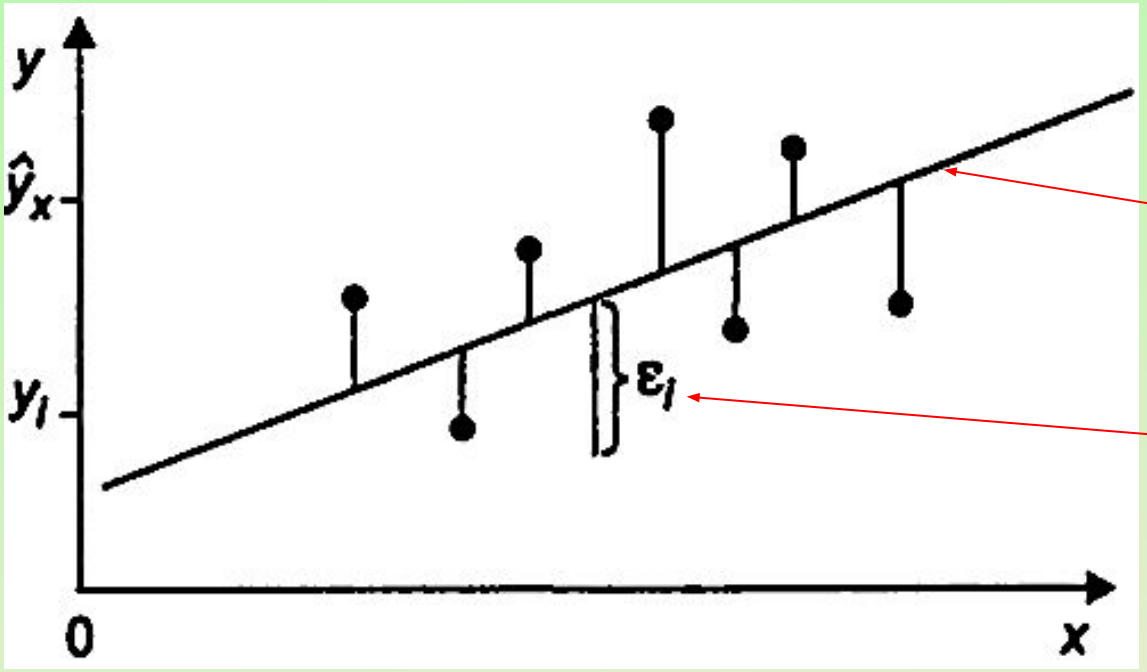
уравнение регрессии будем искать в виде:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

2. Линейная парная регрессия и коэффициент корреляции.

Согласно ***методу наименьших квадратов*** неизвестные параметры b_0 и b_1 выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений эмпирических значений y_i от значений $\hat{y}_i$, найденных по уравнению регрессии, была *минимальной:*

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 \to \min$$



$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

$$\hat{y}_i - y_i$$

2. Линейная парная регрессия и коэффициент корреляции.

Определение коэффициентов уравнения парной линейной регрессии по методу наименьших квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b_0} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right) = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_1} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right) x_i = 0, \end{cases}$$

(частные производные функции $S(b_0, b_1)$)

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

/n обе части уравнения

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y}; \\ b_0 \bar{x} + b_1 \overline{x^2} = \overline{xy}, \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

(система нормальных уравнений)

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

$$\hat{y} = \bar{y} - b_1 \bar{x} + b_1 x$$

$$\hat{y} - \bar{y} = b_1 \left(x - \bar{x}\right)$$

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\hat{\mathrm{C}}\mathrm{ov}(X,Y)}{s_x^2}$$

$$\hat{\mathrm{C}}\mathrm{ov}(X,Y) = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y}$$

(выборочная ковариация)

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$

(выборочная дисперсия X)

2. Линейная парная регрессия и коэффициент корреляции.

Для рассматриваемого примера (слайд 5):

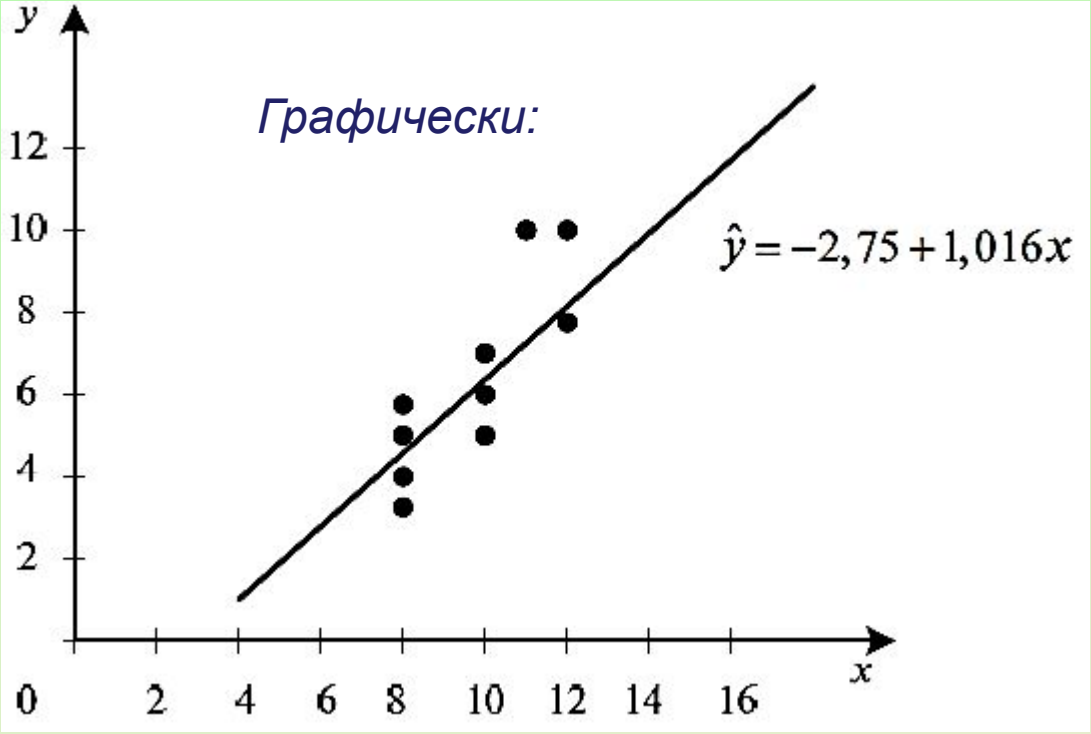
$$\bar{x} = 94/10 = 9{,}4 \text{ (м)}; \quad \bar{y} = 68/10 = 6{,}8 \text{ (т)};$$

$$s_x^2 = 908/10 - 9{,}4^2 = 2{,}44;$$

$$\hat{\mathrm{Cov}}(X,Y) = 664/10 - 9{,}4 \cdot 6{,}8 = 2{,}48; \quad b_1 = 2{,}48/2{,}44 = 1{,}016$$

Т.о., уравнение регрессии Y по X:

$$\hat{y} - 6{,}8 = 1{,}016(x - 9{,}4) \text{ или } \hat{y} = 2{,}75 + 1{,}016x$$

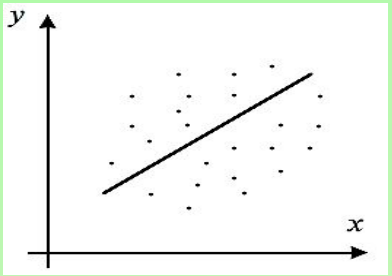


при увеличении мощности пласта X на 1 м добыча угля на одного рабочего Y увеличивается в среднем на 1,016 т (свободный член в уравнении регрессии не имеет реального смысла)

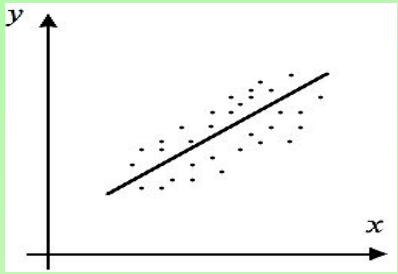
2. Линейная парная регрессия и коэффициент корреляции.

Выборочный коэффициент корреляции - показатель тесноты линейной связи переменных X и Y: $r = b_1 \frac{s_x}{s_y}$, s_x, s_y – *средние квадратные отклонения X и Y*

корреляционная связь слабее:



корреляционная связь сильнее:



r - непосредственная *оценка* генерального коэффициента корреляции ρ между X и Y *лишь в случае двумерного нормального закона распределения* случайных величин X и Y

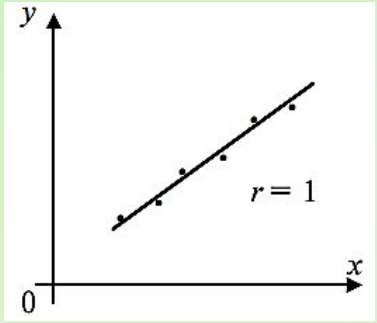
Для примера слайда 5:

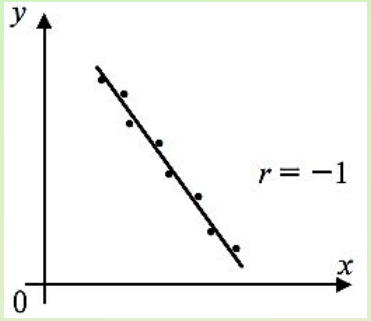
$$r = \frac{10 \cdot 664 - 94 \cdot 68}{\sqrt{10 \cdot 908 - 94^2}\sqrt{10 \cdot 496 - 68^2}} = 0{,}866$$

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

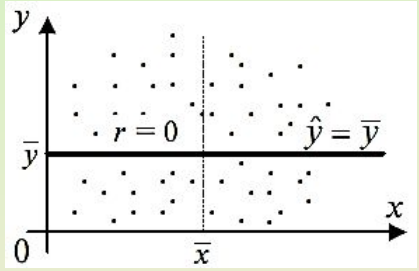
1) $-1 \le r \le 1$ - диапазон значений r;

2) Чем ближе $|r|$ к единице, тем *теснее связь*. При r = ±1 корреляционная связь - *линейная функциональная зависимость* (все наблюдаемые значения располагаются на прямой линии):





3) При r = 0 линейная корреляционная связь *отсутствует* (линия регрессии параллельна оси Ox):



3. Основные положения регрессионного анализа. Оценка параметров парной регрессионной модели. Теорема Гаусса—Маркова.

Парная регрессионная модель: $Y = \varphi(X) + \varepsilon$

где ε - случайная переменная (случайный член), характеризующая отклонение от функции регрессии - возмущение, ошибка.

Для линейного регрессионного анализа: $M_x(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$

Пусть для оценки параметров линейной функции регрессии есть выборка, содержащая n пар значений переменных (x_i, y_i), где i=1,2,…, n. Тогда *линейная парная регрессионная модель:*

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (*)$$

Основные предпосылки регрессионного анализа:

1) В модели (*) возмущение ε_i (или y_i) – величина *случайная*, а x_i - величина *неслучайная;*
2) Математическое ожидание возмущения равно нулю: $M(\varepsilon_i) = 0$;
3) Дисперсия возмущения (или y_i) постоянна для любого i: $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$ или $D(y_i) = \sigma^2$;
4) Возмущения ε_i и ε_j (или переменные y_i и y_j) не коррелированы: $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \ (i \neq j)$;
5) Возмущение ε_i (или зависимая переменная y_i) есть *нормально распределенная* случайная величина – это требование необходимо для оценки *точности уравнения регрессии и его параметров*

Модель (*) - ***классическая нормальная линейная регрессионная модель*** *(Classical Normal Linear Regression model)*

3. Основные положения регрессионного анализа. Оценка параметров парной регрессионной модели. Теорема Гаусса—Маркова.

- *Оценка параметров парной регрессионной модели*
  - **1) Метод наименьших квадратов (ММК)**
  - **2) Метод максимального правдоподобия**

Оценка по ММК:

1) Оценка модели (*) слайда 10 – уравнение $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ *(b_0 и b_1 определяются на основе ММК);*
2) Воздействие неучтенных случайных факторов и ошибок наблюдений в модели (*) слайда 10 определяется с помощью дисперсии возмущений (ошибок) или *остаточной дисперсии* σ^2 .

Несмещенная оценка этой дисперсии - *выборочная остаточная дисперсия* s^2 :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}$$

где $\hat{y}_i$ — *групповая средняя*, найденная по уравнению регрессии; $e_i = \hat{y}_i - y_i$ — *выборочная оценка возмущения*[2] ε_i или *остаток регрессии.*

3) **Теорема Гаусса—Маркова.** Если регрессионная модель (*) удовлетворяет предпосылкам 1)-4), то оценки b_0, b_1 имеют *наименьшую дисперсию* в классе всех линейных несмещенных оценок (Best Linear Unbiased Estimator, или **BLUE**).
Т.о., оценки b_0 и b_1 в определенном смысле являются *наиболее эффективными линейными оценками* параметров β_0 и β_1 .

3. Основные положения регрессионного анализа. Оценка параметров парной регрессионной модели. Теорема Гаусса—Маркова.

Оценка по методу максимального правдоподобия:

1) Для его применения *должен быть известен вид закона распределения вероятностей имеющихся выборочных данных*;
2) Если выполняется предпосылка 5) модели (*) слайда 10 (*нормальная классическая регрессионная модель*) и y_i – независимые нормально распределенные случайные величины с мат. ожиданием $M(y_i)=\beta_0+\beta_1 x_i$ и постоянной дисперсией σ^2 то *плотность* нормально распределенной случайной величины y_i:

$$\varphi_N(y_i)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}}$$

3) ***Функция правдоподобия***, выражающая плотность вероятности *совместного* появления результатов выборки:

$$L(y_i x_i;\ldots;y_n,x_n;\beta_0,\beta_1;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}}$$

4) В качестве оценок параметров β_0, β_1 и σ^2 принимаются такие значения $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}^2$, которые *максимизируют* функцию правдоподобия L;
5) Функция L достигает максимума при *минимизации функции* $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2$, поэтому оценки ММК параметров уравнения (*) *совпадают* с оценками метода максимального правдоподобия.

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_i)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n}$$

- оценка остаточной дисперсии модели (*), является *смещенной* в отличии оценки ММК

4. Интервальная оценка функции регрессии и ее параметров.

4. Интервальная оценка функции регрессии и ее параметров.

Вопросы изученные в Теме 3:

1) Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
2) Линейная парная регрессия и коэффициент корреляции.
3) Основные положения регрессионного анализа. Оценка параметров парной регрессионной модели. Теорема Гаусса—Маркова.
4) Интервальная оценка функции регрессии и ее параметров.
5) Оценка значимости уравнения регрессии. Коэффициент детерминации.
6) Геометрическая интерпретация регрессии и коэффициента детерминации.
7) Коэффициент ранговой корреляции Спирмена.