# *Средние величины и показатели вариации*

- ***Определение средних величин, их формы и виды***
- ***Понятие вариационного ряда, его виды и графическое изображение***
- ***Показатели вариации. Порядок их построения***

# ФОРМЫ И ВИДЫ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

| Формы средних величин | Виды средних величин | |
|---|---|---|
| | Простая | Взвешенная |
| Средняя арифметическая | $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ | $\bar{x} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f}$ |
| Средняя гармоническая | $\bar{x} = \frac{n}{\Sigma \frac{1}{x}}$ | $\bar{x} = \frac{\Sigma f}{\Sigma \frac{f}{x}}$ |
| Средняя квадратическая | $\bar{x} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$ | $\bar{x} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f}}$ |
| Средняя геометрическая | $\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ | $\bar{x} = \sqrt[\Sigma f]{x_1 f_1 x_2 f_2 \dots x_n f_n}$ |

# *Рекомендации при использовании средних величин*

- Совокупность, по которой производится обобщение, должна быть однородной
- Необходимо обеспечить исчерпывающий учет единиц совокупности
- При расчете средних необходимо учитывать своеобразие и взаимосвязь признаков и использовать их в совокупности с другими статистическими показателями
- Порядок расчета средних сохраняется независимо от уровня обобщения

# *Простые и взвешенные средние*

- Для расчета средних первичных признаков используется ***простая средняя***
- Для расчета средних вторичных признаков используется ***взвешенная средняя***
- Взвешенная средняя может быть рассчитана для первичных признаков, если они представлены в сгруппированном виде
- Несгруппированные данные осредняются по простой средней

# *Простые и взвешенные средние*

- Простые и взвешенные средние различаются:
  - по величине (не всегда)
  - по способу вычисления
  - по своей роли в решении различных статистических задач

- Взвешенная средняя равна простой в трех случаях:
  - если изучаемый признак не варьирует
  - если не варьирует признак-вес
  - если между осредняемым признаком и признаком-весом нет линейной зависимости

# Задача

| Район | Численность безработных, тыс. чел. | Уровень безработицы, % | Доля женщин среди безработных |
|---|---|---|---|
| 1 | 12,60 | 4,5 | 0,73 |
| 2 | 19,22 | 6,2 | 0,68 |
| 3 | 20,80 | 6,4 | 0,75 |

# Решение

$$\overline{A} = \frac{\sum A}{n} = \frac{52,62}{3} = 17,54$$

$$\overline{B} = \frac{\sum A}{\sum \frac{A}{B}} = \frac{52,62}{\frac{12,6}{0,045} + \frac{19,22}{0,062} + \frac{20,80}{0,064}} = 0,058$$

$$\overline{C} = \frac{\sum CA}{\sum A} = \frac{12,6 \cdot 0,73 + 19,22 \cdot 0,68 + 20,80 \cdot 0,75}{52,62} = 0,72$$

# Правило мажорантности средних

$$\bar{x}_{гарм} \le \bar{x}_{геом} \le \bar{x}_{арифм} \le \bar{x}_{квадр}$$

# *СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВАРИАЦИИ*

- **Вариация** – это различие значений признака у отдельных единиц изучаемой совокупности в один и тот же период или момент времени
- **Вариация** отражает колеблемость индивидуальных значений признака
- **Вариация** отражает неравномерность развития единиц совокупности

- ***Ряд распределения*** – упорядоченное распределение единиц совокупности по возрастающим или убывающим значениям признака

- Ряд распределения, построенный по качественному признаку – ***атрибутивный ряд***

- Ряд распределения, построенный по количественному признаку – ***вариационный ряд***

# *Виды вариационных рядов*

- ***Дискретные***, в которых значения варьирующего признака выражены в виде вполне определенных величин (обычно целых).

- ***Интервальные***, в которых значения варьирующего признака представлены в виде интервалов.

# *Распределение частных домохозяйств РФ по размеру (по данным переписи 2010 г.)*

| Домохозяйства, состоящие: | Число домохозяйств, миллионов | | В % к итогу | |
|---|---|---|---|---|
| | 2002 г. | 2010 г. | 2002 г. | 2010 г. |
| из 1 человека | 11,8 | 14,0 | 22,3 | 25,7 |
| из 2 человек | 14,5 | 15,6 | 27,6 | 28,5 |
| из 3 человек | 12,5 | 12,3 | 23,8 | 22,5 |
| из 4 человек | 9,0 | 7,9 | 17,0 | 14,5 |
| из 5 человек | 3,0 | 2,9 | 5,7 | 5,4 |
| из 6 и более человек | 1,9 | 1,9 | 3,6 | 3,4 |
| Всего домохозяйств | 52,7 | 54,6 | 100 | 100 |

**Таблица**

## *Распределение населения РФ в 2013 г. по размеру среднедушевого денежного дохода*

| Все население | 100 |
|---|---|
| в том числе со среднедушевыми денежными доходами, руб. в месяц: | |
| до 5000,0 | 4,2 |
| 5000,1–7000,0 | 5,6 |
| 7000,1–10000,0 | 10,4 |
| 10000,1–14000,0 | 14,2 |
| 14000,1–19000,0 | 15,2 |
| 19000,1–27000,0 | 17,5 |
| 27000,1–45000,0 | 19,3 |
| свыше 45000,0 | 13,6 |

# *Элементы вариационного ряда*

- ***Варианты*** – значения, которые принимает исследуемый признак
- ***Частоты*** – абсолютная численность отдельных групп с различными значениями признака
- ***Частости*** – удельные веса (доли) отдельных групп в общей численности совокупности

# *Порядок построения интервальных вариационных рядов*

- Определяется число групп (число интервалов)
- При определении числа групп учитывается объем совокупности с тем, чтобы обеспечить заполненность интервалов
- Определяется величина интервала

# Расчет числа интервалов

- Формула Стерджесса: $k \approx 1 + 3{,}32 \lg n$
- или $k \approx 1 + 1{,}44 \ln n$
- где: *k* -число интервалов; *n* - объем совокупности.

# *Расчет величины интервалов*

- $$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

- Где: $x_{\max}, x_{\min}$ - максимальное и минимальное значения признака в вариационном ряду.

# *Плотность распределения*

- Если в интервальном вариационном ряду ширина интервала отлична от единицы, то определяют абсолютную и относительную плотности распределения

- Отношение частоты интервала к ширине этого интервала называют **абсолютной плотностью распределения** для *i*-го интервала
-
- **Относительной плотностью распределения** для *i*-го интервала называют отношение относительной частоты интервала к его ширине

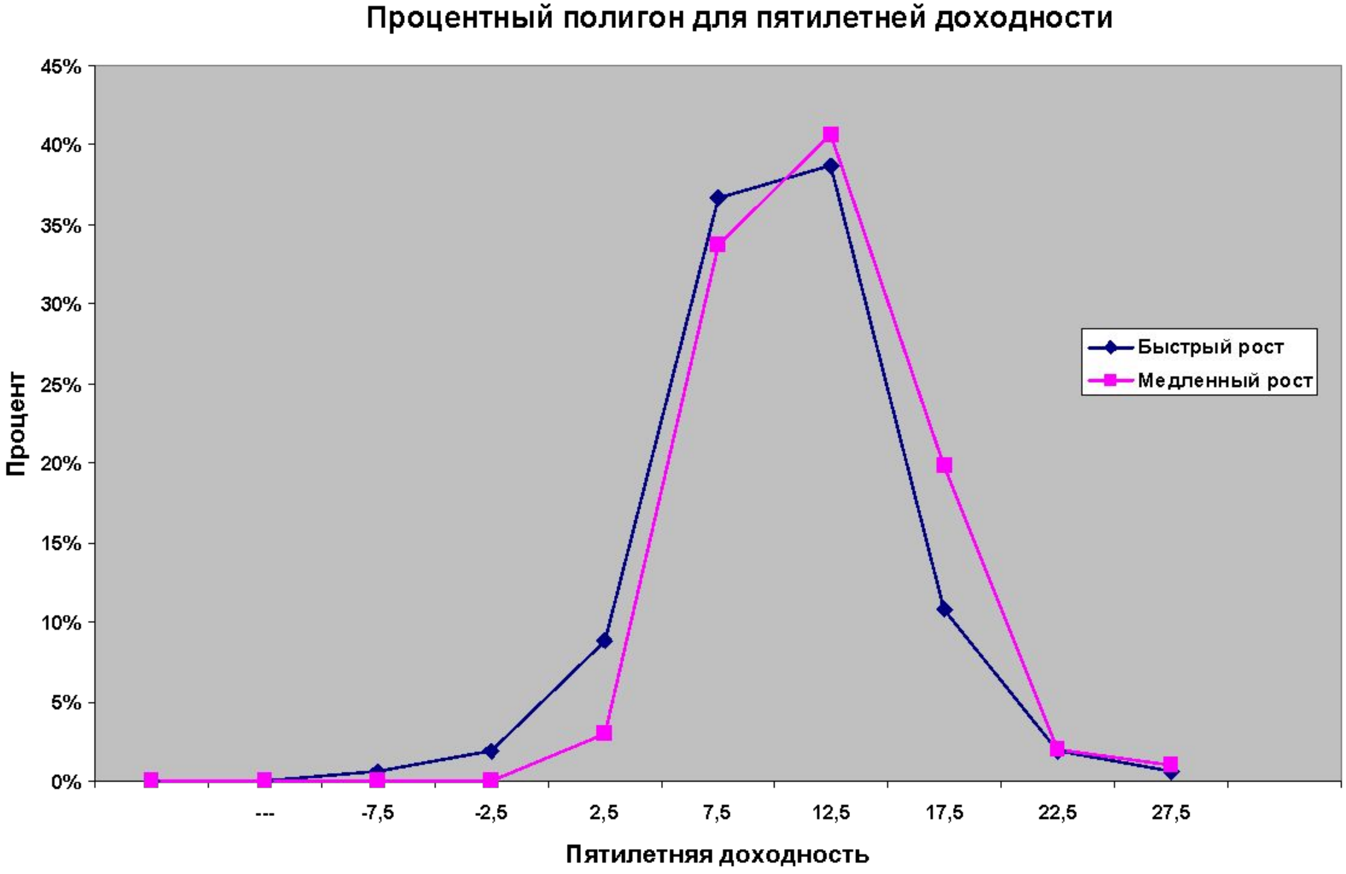
# *Графическое изображение вариационного ряда*

- ***Полигон распределения***
- ***Гистограмма*** – столбиковая диаграмма, для построения которой на оси абсцисс откладывают отрезки, равные величине интервалов вариационного ряда
- ***Кумулята распределения*** строится по накопленным частотам (частостям). Накопленные частоты (частости) определяются последовательным суммированием частот (частостей)

# Полигон распределения

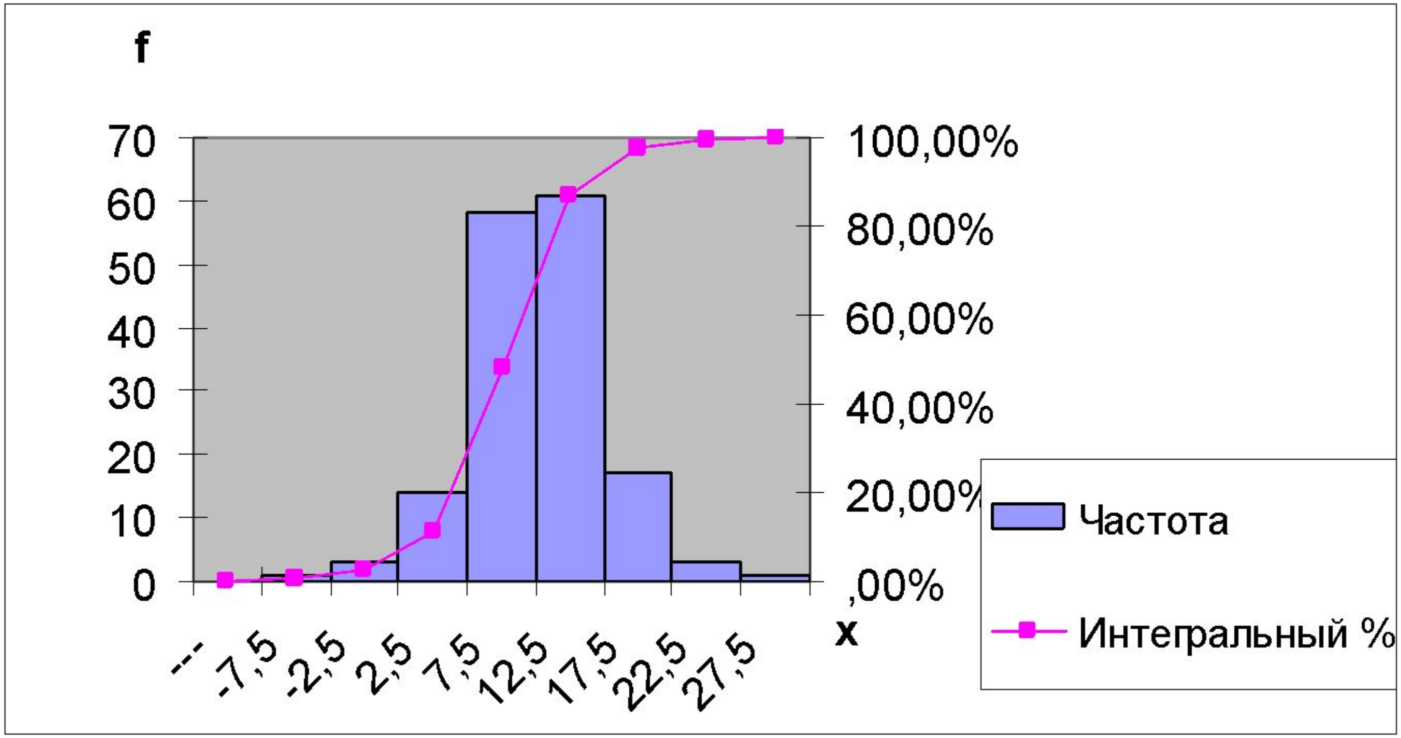

Распределение домохозяйств по размеру

# Полигон распределения



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Гистограмма, кумулята



# Показатели вариации

- ***Размах вариации*** $R = x_{\max} - x_{\min}$

- ***Среднее линейное отклонение***

а) для несгруппированных данных

$$\overline{d} = \frac{\Sigma\left|x - \overline{x}\right|}{n}$$

б) для сгруппированных данных

$$\overline{d} = \frac{\Sigma\left|x - \overline{x}\right| f}{\Sigma f}$$

# Показатели вариации

***Дисперсия:***

- а) для несгруппированных данных

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}$$

- б) для сгруппированных данных

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2 \cdot f}{\Sigma f}$$

# Показатели вариации

## Среднее квадратическое отклонение

а) для несгруппированных данных

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{n}}$$

б) для сгруппированных данных

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2 f}{\Sigma f}}$$

# Показатели вариации

## Коэффициент вариации

$$v = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100$$

## Среднее значение признака

- для несгруппированных данных $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$
- для сгруппированных данных $\overline{x} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f}$

# *Шкала значений коэффициента вариации*

| Коэффициент вариации, % | Степень однородности совокупности |
|---|---|
| До 30 | однородная |
| 30-60 | средняя |
| 60 более | неоднородная |

# *Показатели вариации*

***Мода*** – наиболее часто встречающееся в данной совокупности значение признака

- ***В дискретном ряду*** мода – вариант с наибольшей частотой
- ***В интервальном ряду*** мода определяется по формуле:

$$Mo = x_0 + i\frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})}$$

# *Показатели вариации*

- ***Медиана*** – то значение признака, которое находится в середине упорядоченного ряда и делит совокупность на две равные части

- ***В дискретном*** ряду медиана определяется по сумме накопленных частот, которая должна превышать половину всей численности совокупности

# Показатели вариации

- ***В интервальном*** ряду медиана определяется по формуле:

$$Me = x_0 + i\frac{\frac{1}{2}\sum f - S_{me-1}}{f_{me}}$$

# *Пример*

- Имеются данные о численности работников по 6 магазинам: 7 4 9 7 3 12

- Необходимо рассчитать показатели вариации и описать форму распределения этих данных.

# Решение

| № п/п | $x$ | $\lvert x-\bar{x}\rvert$ | $(x-\bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 16 |
| 2 | 4 | 3 | 9 |
| 3 | 7 | 0 | 0 |
| 4 | 7 | 0 | 0 |
| 5 | 9 | 2 | 4 |
| 6 | 12 | 5 | 25 |
| Итого | 42 | 14 | 54 |

$R = 12 - 3 = 9$ $\qquad \bar{x} = \frac{42}{6} = 7$ $\qquad \bar{d} = \frac{14}{6} = 2{,}3$

$\sigma^2 = \frac{54}{6} = 9$ $\qquad \sigma = \sqrt{9} = 3$

$v = \frac{3}{7} \cdot 100 = 43\%.$ $\qquad Mo = 7$ $\qquad Me = 7$

# Пример

| Возраст, лет | Численность сотрудников |
|---|---|
| 20-30 | 8 |
| 30-40 | 17 |
| 40-50 | 11 |
| 50-60 | 8 |
| 60-70 | 2 |

# Решение

| Возраст, лет | $f$ | $x$ | $xf$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20-30 | 8 | 25 | 200 | | | | | |
| 30-40 | 17 | 35 | 595 | | | | | |
| 40-50 | 11 | 45 | 495 | | | | | |
| 50-60 | 8 | 55 | 440 | | | | | |
| 60-70 | 2 | 65 | 130 | | | | | |
| Итого | 46 | X | 1860 | | | | | |

# Решение

$$\bar{x} = \frac{1860}{46} = 40{,}4\,лет;$$

| Возраст, лет | $f$ | $x$ | $xf$ | $\lvert x-\bar{x}\rvert$ | $\lvert x-\bar{x}\rvert f$ | $(x-\bar{x})^2$ | $(x-\bar{x})^2 f$ | Накопленные часты |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20-30 | 8 | 25 | 200 | 15,4 | 123,2 | 237,16 | 1897,28 | 8 |
| 30-40 | 17 | 35 | 595 | 5,4 | 91,8 | 29,16 | 495,72 | 25 |
| 40-50 | 11 | 45 | 495 | 4,6 | 50,6 | 21,16 | 232,76 | 36 |
| 50-60 | 8 | 55 | 440 | 14,6 | 116,8 | 213,16 | 1705,28 | 44 |
| 60-70 | 2 | 65 | 130 | 24,6 | 49,2 | 605,16 | 1210,32 | 46 |
| Итого | 46 | Х | 1860 | Х | 431,6 | Х | 5541,36 | Х |

$$\bar{d} = \frac{431{,}6}{46} = 9{,}38\,лет;$$

$$\sigma^2 = \frac{5541{,}36}{46} = 120{,}46;$$

$$\sigma = \sqrt{120{,}46} = 11{,}0\,лет;$$

$$v = \frac{11{,}0}{40{,}4} \cdot 100 = 27{,}2\%;$$

$$Mo = 30 + 10\frac{17-8}{(17-8)+(17-11)} = 36\,лет;$$

$$Me = 30 + 10\frac{23-8}{17} = 38{,}8\,лет.$$

- ***Квартили*** – делят совокупность на 4 равные части

$$Q_k = x_0 + i\frac{k\dfrac{\Sigma f}{4} - S_{Q_k - 1}}{f_{Q_k}}$$

***Децили*** – делят совокупность на 10 равных частей

$$D_k = x_0 + i\frac{k\frac{\Sigma f}{10} - S_{D_k - 1}}{f_{D_k}}$$

# Показатели асимметрии

Коэффициент асимметрии

$$As = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

$M_3$ - центральный момент 3-го порядка.

$$M_3 = \frac{\sum (x - \bar{x})^3 f}{\sum f}$$

# Показатели асимметрии

Для нормального распределения $As = 0$

Если $As < 0$, асимметрия – ***левосторонняя***

Если $As > 0$, асимметрия – ***правосторонняя***.

Если $|As| < 0{,}25$, асимметрия – ***незначительная***.

Если $|As| > 0{,}5$, асимметрия – ***значительная***.

# Средняя квадратическая ошибка коэффициента асимметрии

$$\sigma_{As} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}$$

Если отношение $|As| : \sigma_{As} \rangle 3$, то асимметрия существенная.

Если отношение $|As| : \sigma_{As} \langle 3$, то асимметрия не существенная, вызванная влиянием случайных факторов

# Структурный коэффициент асимметрии (формула Пирсона)

$$As = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

Если $\bar{x} < Mo$, то асимметрия левосторонняя

Если $\bar{x} > Mo$, то асимметрия – правосторонняя.

# ЭКСЦЕСС

$$Ex = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3$$

$M_3$ - центральный момент 4-го порядка.

$$M_4 = \frac{\sum (x - \bar{x})^4 f}{\sum f}$$

# ЭКСЦЕСС

Для нормального распределения $M_4 : \sigma^4 = 3$, следовательно $Ex = 0$.

При $Ex > 0$ (положительный эксцесс) распределение является более островершинным, чем нормальное распределение.

При $Ex < 0$ (отрицательный эксцесс) распределение является более пологим, чем нормальное распределение.

# Средняя квадратическая ошибка коэффициента эксцесса

$$\sigma_{Ex} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}$$

Если отношение $|Ex| : \sigma_{Ex} > 3$, то отклонение от нормального распределения можно считать существенным.

# ЭКСЦЕСС

- ***Положительный эксцесс*** свидетельствует о том, что в совокупности есть слабо варьирующее по данному признаку «ядро»
- ***Чем круче распределение, тем ярче проявляется закономерность в формировании значений показателей***

# ЭКСЦЕСС

- ***В плосковершинном распределении*** единицы рассеяны по всем значениям признака более равномерно.
- **При существенном отрицательном эксцессе результаты анализа не надежны.**
- **Значительный отрицательный эксцесс** может указывать на качественную неоднородность совокупности.