Лекция 2.
Элементы дифференциального исчисления

2.1.Производная функции. Дифференциал

2.2. Методы вычисления производных

2.3. Производные и исследование функций

2.1 Производная функции. Дифференциал

Непрерывная функция y=f(x) задана графиком (рис.1) . Отметим на графике точки $M_0(x_0,y_0)$ ($y=f(x_0)$) и M ($x_0+\Delta x$) ($f(x_0+\Delta x)$). Построим : прямую M_0K, <u>касательную</u> к графику функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ и прямую M_0M, <u>секущую</u>, соединяющую точки M_0 и M.

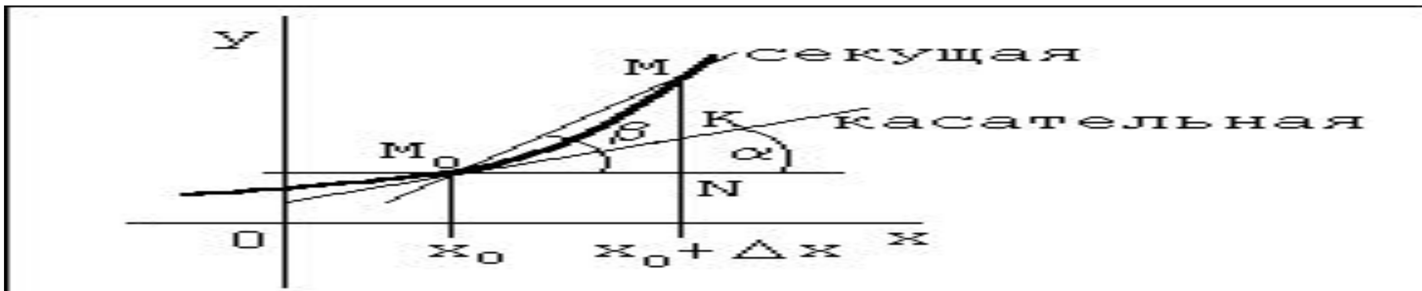


Рис. 1

Тангенс угла наклона секущей

$$K_{\text{ñåê}} = tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{MN}{\Delta x}$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$. При этом секущая M_0M неограниченно приближается к положению M_0K, *к* <u>*касательной*</u> к графику $y = f(x)$ в точке M_0. Угловой коэффициент касательной получим из предельного перехода

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha, \quad K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{KN}{\Delta x}$$

Производная - определение.

Производной функции y = f(x)в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy = f(x_0+Δx)-f(x_0) к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю, если такой предел существует.

Обозначается производная функции *f*(*x*) в точке x_0 символом *f'*(x_0).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Для производной в точке x_0 можно использовать и другие обозначения, например:

$$y'(x_0), \frac{dy}{dx}(x_0), \frac{df}{dx}(x_0), y'|_{x=x_0}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что *геометрический смысл производной – это тангенс угла наклона касательной к функции в точке*

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{KN}{\Delta x}$$

Существование производной

1. Необходимое условие **существования производной:** **функция определена и непрерывна** **в точке (на интервале). Верно и обратное утверждение:** ***если функция дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна***

Примеры функций, когда необходимое условие в точке x_0 не выполняется

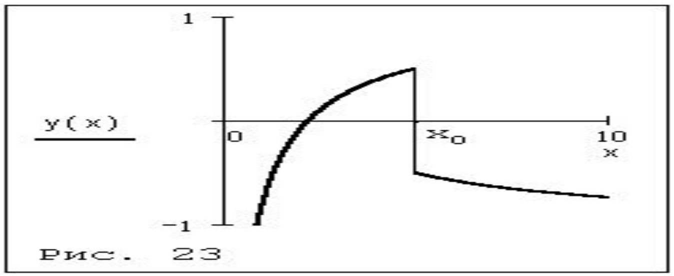


Рис. 23

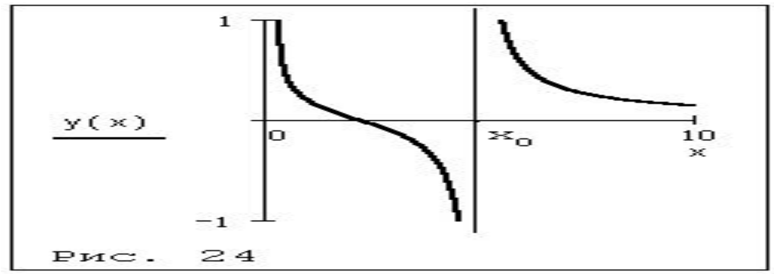


Рис. 24

2. Достаточное условие **существования производной в точке:** **производная определена и непрерывна** **в точке (на интервале)**

Примеры функций, когда достаточное условие не выполняется

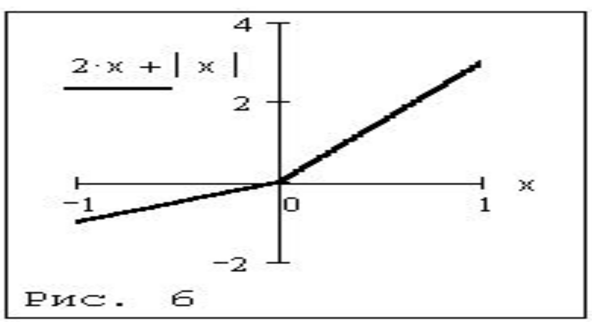


Рис. 6

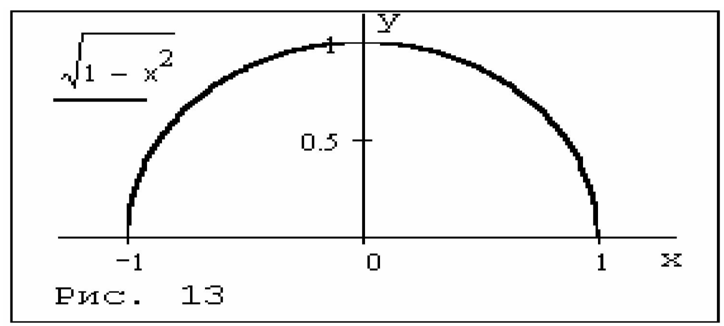


Рис. 13

Геометрический смысл производной, дифференциала

Геометрический смысл производной функции в точке x_0, $f'(x_0)$ - угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.(слайд 3)

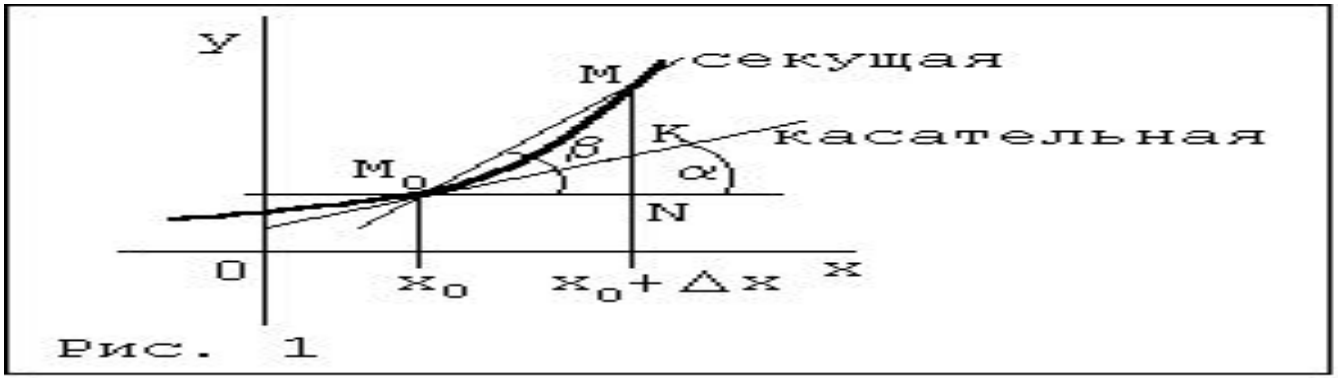


Рис. 1

Дифференциал – определение. Рассмотрим рис.1. Приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x)- f(x_0)$ при перемещении по секущей равно отрезку *NM, при перемещении по касательной* равно отрезку *KN*. Из треугольника M_0KN следует, что $KN=M_0N \cdot tg\alpha$. Так как $M_0N=\Delta x$, *а* $tg\alpha=f'(x_0)$, то $KN = f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Произведение $f'(x0)\cdot\Delta x$ называется дифференциалом функции *y=f(x)* *в точке x_0 и обозначается dy(x), df(x). Учитывая, что Δx=dx, получаем*

$$dy=df= f'(x0)\cdot\Delta x =f'(x)dx$$

Геометрический смысл дифференциала (отрезок KN) – это первое линейное приращение функции в точке $x_0 + \Delta x$

Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется в заданном направлении.
Пусть $S=S(t)$ – закон движения материальной точки в зависимости от времени t, t_0 – время начала движения, $S(t_0)$ – путь в момент t_0.
В момент времени $t= t_0+\Delta t$ путь равен $S(t_0+\Delta t)$, *приращение пути за отрезок времени Δt равно $\Delta S=S(t_0+\Delta t) - S(t_0)$.*
Тогда <u>средняя скорость за время Δt</u> равна $V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

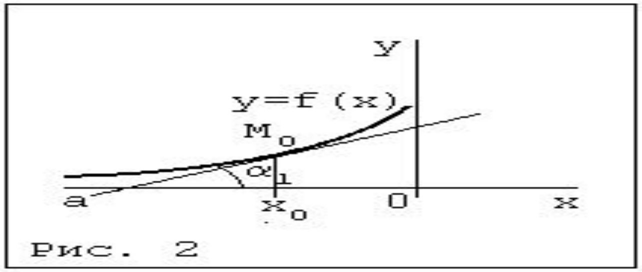
а *<u>скорость</u> прямолинейного движения материальной точки <u>в момент времени t_0</u>* <u>(мгновенная скорость)</u> *есть производная от пути по времени.*
Это – «механический смысл» производной.

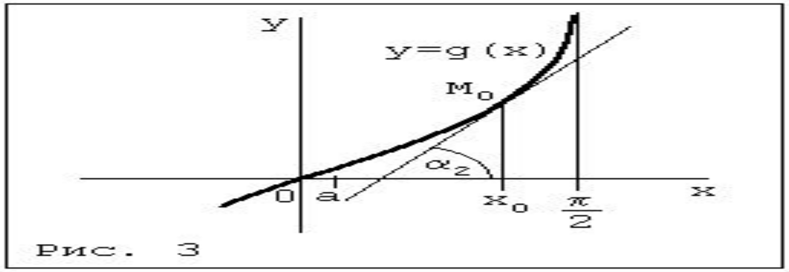
$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$$

<u>В каком-то смысле – производная функции – это скорость ее изменения – чем круче график, тем больше производная (по абсолютной величине)</u>

Производная и характер графика

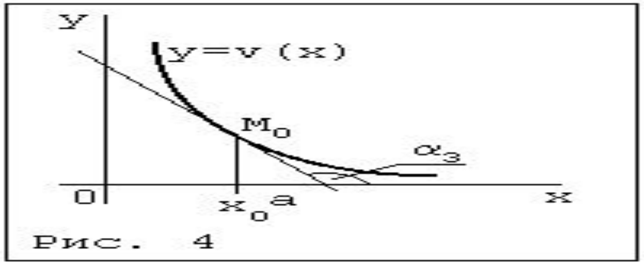
1. Монотонно возрастающая функция, Производная положительна

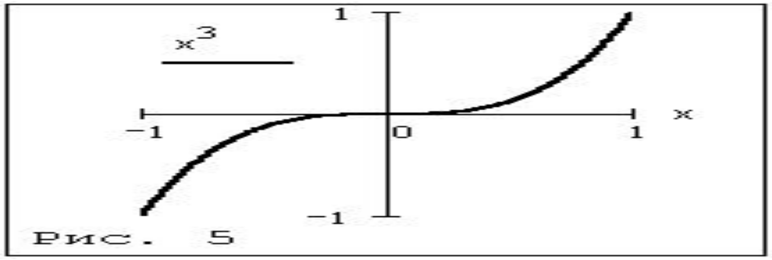




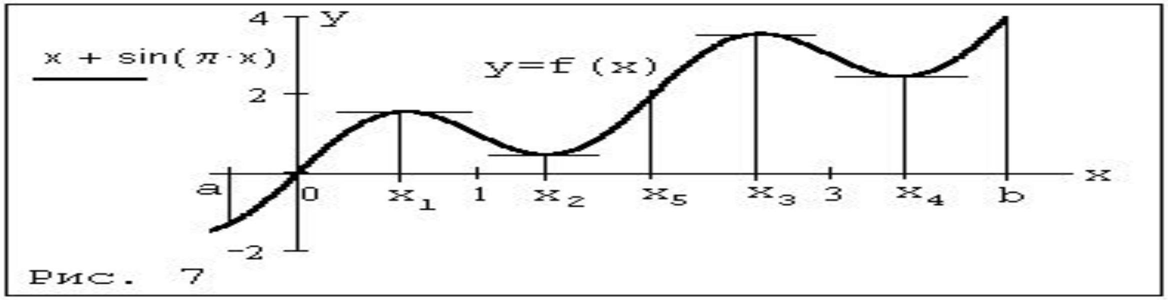
2. Монотонно убывающая функция. Неубывающая функция

Производная отрицательна Производная неотрицательна





3. Немонотонная функция. Производная в точках экстремума равна нулю



Немонотонные функции

Функция имеет интервалы монотонного роста и монотонного спада. В точке **a** функция имеет минимум, в точке **b**- максимум. Это – *глобальные* минимум и максимум

Внутренними (локальными) точками минимального или максимального (экстремального) значения являются x_1, x_2, x_3, x_4.

Точки x_1, x_3 – точки максимума, точки x_2, x_4 – точки минимума

В этих точках касательная параллельна оси x, тангенс угла наклона равен нулю, следовательно производная в этих точках равна нулю, а вокруг этих точек производная меняет знак.

Аналитическое определение точек экстремума связано с нахождением первой производной функции

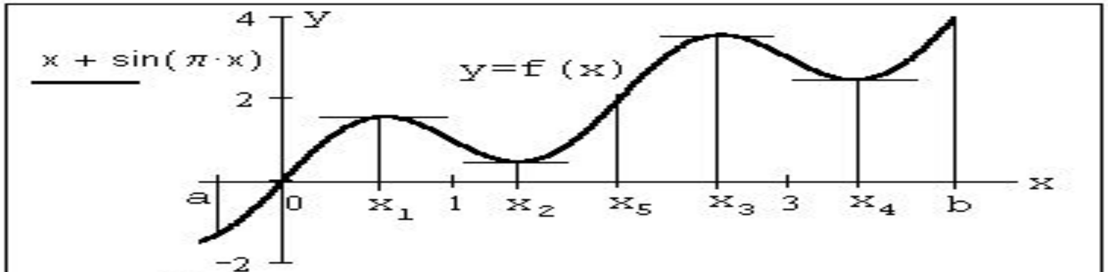
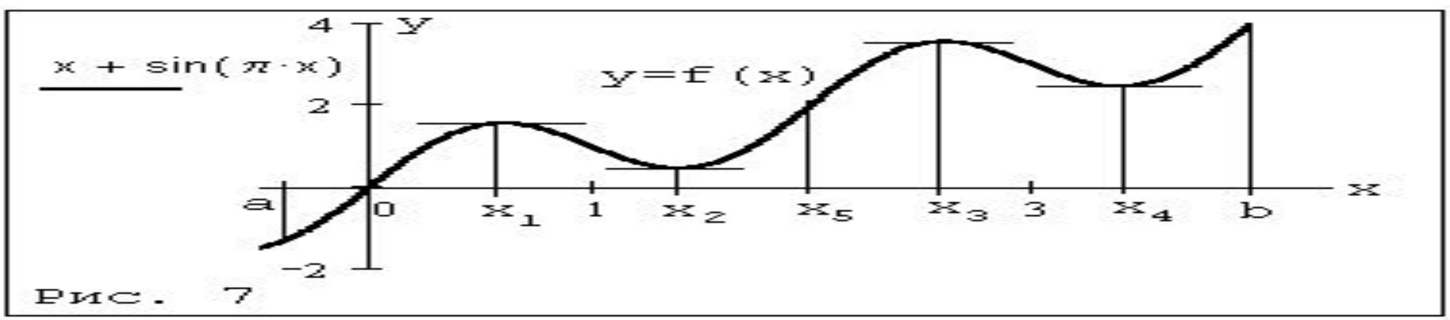


Рис. 7

Первая производная и экстремумы функции

- **Если функция *y*=*f*(*x*) имеет конечную производную в каждой точке отрезка [*a*,*Ь*], то она дифференцируема на этом отрезке и ее поведение можно исследовать с помощью производной f'(x).**
- **Рассмотрим еще раз график функции рис.7.**
- **Наблюдаем интервалы возрастания, убывания, точки изменения поведения функции x_1, x_2, x_3, x_4.**
- **В точках x_1, x_3 функция имеет наибольшее в окрестности значение, в x_2, x_4 – наименьшее**



- **<u>Определение: любая непрерывная на отрезке [*a*,*Ь*] функция достигает на этом отрезке своего минимального и своего максимального значения</u>**

1.*Необходимое условие* существования экстремума в точке: $f'(x)=0$.
Точки, в которых $f'(x)=0$ являются *возможными* точками экстремума.
Они называются *стационарными (характеристическими)* точками.

2. *Достаточное условие* существования экстремума в точке:

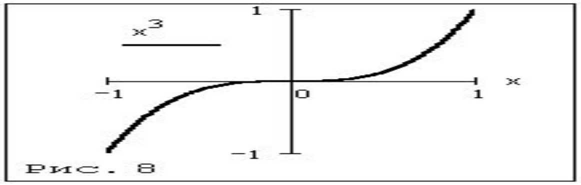
- *точка x=c является стационарной,*
- *производная f'(x) при переходе аргумента через стационарную точку x=c меняет знак*

Правило знаков: *- производная в стационарной точке меняет знак:*

- *с плюса на минус – в точке x=c - максимум;*
- *с минуса на плюс, - в точке x=c - минимум.*
- *производная в стационарной точке не меняет знак. В точке x=c нет* ни минимума, ни максимума.

Пример. *Пусть* $f(x)=x^3$. Тогда $f'(x)=3x^2=0$ и стационарная точка c=0
Очевидно, знак $f'(x)=3x^2$ вокруг точки c=0 не меняется, в этой точке нет ни минимума, ни максимума

График функции f(x)=



- **2.2. Вычисление производных**
- **Таблица производных**
- **Основные правила дифференцирования**
- **Основные методы вычисления производных**

Таблица основных формул дифференцирования

- 1. $y = c, y' = 0, c$ постоянная
-
- 2. $y = x^{\alpha}, y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$
- 3. $y = a^{x}, y' = a^{x} \ln a; y = e^{x}, y' = e^{x}.$
- 4. $y = \log_{a} x, y' = \frac{1}{x \ln a}.$
- 5. $y = \sin x, y' = \cos x.$ $y = \cos x, y' = -\sin x.$
- 6. $y = tgx, y' = \frac{1}{\cos^{2} x}.$
- 7. $y = ctgx, y' = -\frac{1}{\sin^{2} x}.$

Основные правила дифференцирования

Если функции *u*=*u*(*x*) и *v*=*v*(*x*) дифференцируемы в точке *x*, тогда справедливы следующие *правила дифференцирования*:

1. $(cu)' = c \cdot u'$ **Здесь c -постоянная**

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ **Производная суммы функций**

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ **Производная произведения функций**

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ **Производная частного**

5. Производная сложной функции. Пусть функция *y*=*f*(*u*), где *u*=*u*(*x*). Тогда *y* есть сложная функция от *x: y*=*f*(*u*(*x*)), а *u* — промежуточный аргумент. Производная от сложной функции находят по правилу

-
- $y'(x) = \frac{dy}{dx} = y'(u) \cdot u'(x)$ **или** $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Правила дифференцирования. Примеры

1. Дифференцирование *произведения* двух функций

$$y = e^{-x} \cdot \sqrt{x};\ y' = \left(e^{-x}\right)' \cdot \sqrt{x} + e^{-x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \left(e^{-x}\right)' \cdot x^{\frac{1}{2}} + e^{-x} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)';$$

$$y' = -e^{-x} \cdot x^{\frac{1}{2}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right).$$

2. Дифференцирование *частного* двух функций

$$y = \frac{\ln x}{x^2},\ y' = \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln x \cdot \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \cdot \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3}.$$

Примеры дифференцирование сложной функции

Дифференцирование сложной функции производится по формуле

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = y'(u) \cdot u'(x)$$ **или** $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Пример 1

Пусть $y = \cos^3 x$.

Обозначив $u = \cos x$, **получим** $y = u^3$

Тогда $y'(x) = 3u^2 \cdot u'(x)$, $u'(x) = -\sin x$

Следовательно, $y'(x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x$

3. Правило дифференцирования сложной функции

Пример 2

Пусть $y(x) = e^{-x}$

Обозначим $U(x) = -x$;

Тогда $y(x) = e^{-x} = e^{U(x)}$

Так как
$$\frac{dy}{du} = e^{u} = e^{-x}; \frac{du}{dx} = -1,$$

то
$$y' = \frac{dy}{dx} = -e^{-x}$$

Производные высших порядков

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема на интервале (*a*,*b*) и имеет *первую* производную *y* '= *f* ' (*x*).
Первая производная является функцией и может быть дифференцируема, иметь производную. Производная первой производной называется *второй производной*, или *производной второго порядка* и обозначается символами

- $$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$$ **или** $$y^{(2)}, f^{(2)}(x).$$

Производной n-го порядка **функции *f*(*x*) называется первая производная от производной (*n*-1)-го порядка:**

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Вычисление производных высших порядков. Примеры

- Найти значение третьей производной функции $y=e^{(5x+3)}$. Вычислить ее значение в точке $x=0$.
- Вычислим сначала третью производную

$$y' = \left(e^{5x+3}\right)' = 5e^{5x+3}, y'' = \left(e^{5x+3}\right)'' = \left(5e^{5x+3}\right)' = 25e^{5x+3}, y^{(3)} = \left(25e^{5x+3}\right)' = 125e^{5x+3};$$

- Подставим x=0. Получим значение третьей производной в точке

$$y^{(3)}(0) = 125 \cdot e^{5 \cdot 0+3} = 125 \cdot e^{3}.$$

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции называется *выпуклым* в интервале [*a*,*b*], если он *расположен выше любой своей касательной* в этом интервале. Функции на рис.10 выпуклая на интервале, парабола $y=x^2$ (рис.12) выпуклая на всей числовой оси. Для выпуклой функции справедливо: $f''(x)>0$

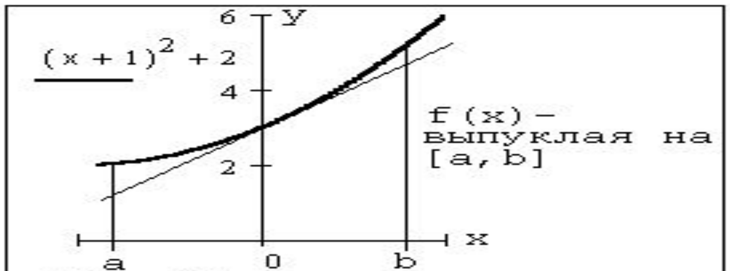


Рис. 10

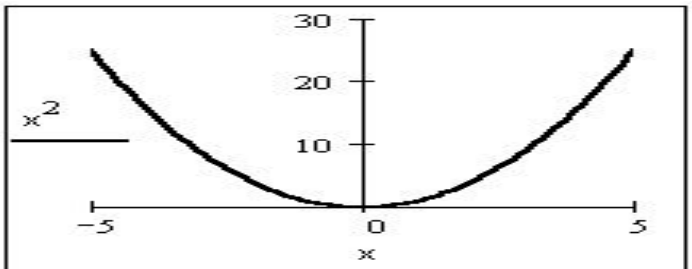


Рис. 12

График дифференцируемой функции называется *вогнутым* в интервале [*a*,*b*], если он *расположен ниже любой своей касательной в этом интервале.*

Для вогнутой функции справедливо: $f''(x)<0$

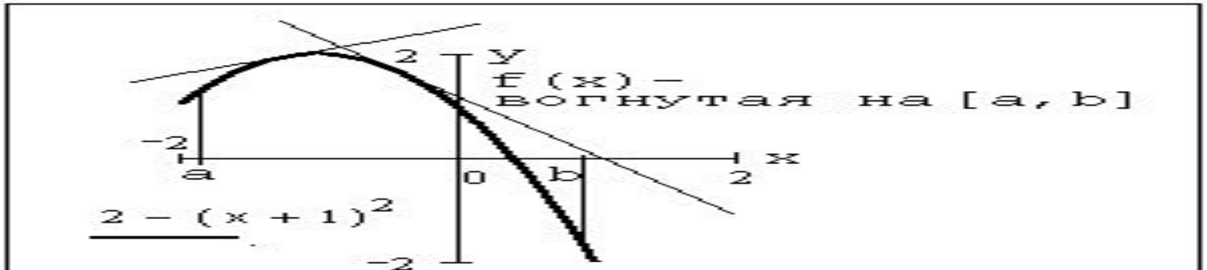
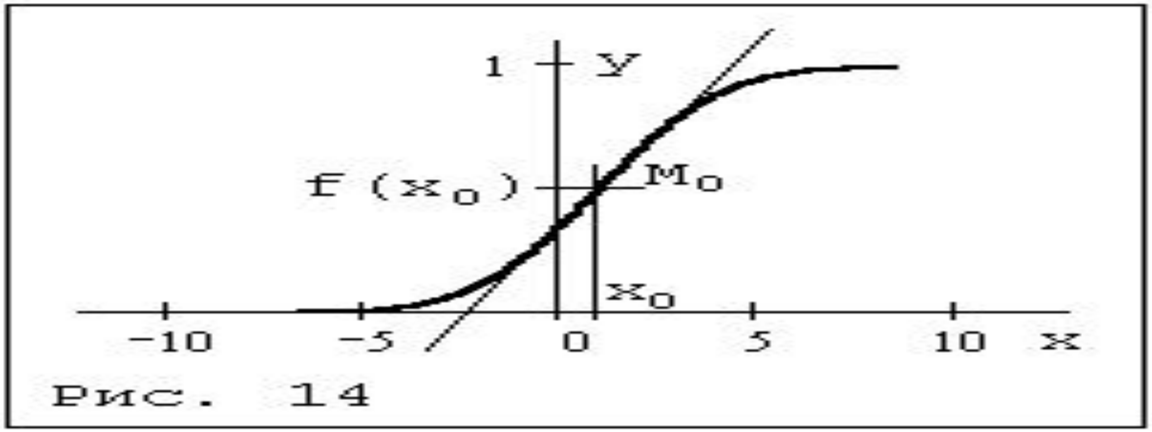


Рис. 11

Точка $M_0(x_0, f(x_0))$, лежащая на графике и отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется *точкой перегиба функции $y=f(x)$*



За выпуклость (вогнутость) функции "отвечает" вторая производная функции $y = f(x)$, $f''(x)$.

Точки перегиба следует искать среди тех точек, в которых:

- вторая производная $y''= f''(x) =0$. Это - *возможная* точка перегиба.

- если слева и справа от возможной точки перегиба вторая производная меняет знак – то это точка перегиба.

Если $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс- график изменяется от вогнутого на выпуклый, с плюса на минус – от выпуклого на вогнутый

- **2. 3. Производные и исследование функции**

Общая схема исследования

Пределы и асимптоты графика функции

Примеры решения задач

Общая схема исследования функции

- **Рекомендуемая схема исследования**
- **1. Найти область определения функции (ООФ).**
- **2. Определить точки разрыва функции, интервалы непрерывности и вертикальные асимптоты.**
- **3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.**
- **4. Исследовать пределы функции – на границах ООФ, в точках разрыва, найти уравнения асимптот.**
- **5. Найти экстремумы функции и интервалы монотонности.**
- **6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.**
- **7. Найти точки пересечения графика с осями координат.**
- **8. Построить график.**
- **9. Определить область значений (ОЗФ).**

Асимптоты графика функции

Асимптота к графику функции y=f(x) **– это** прямая, к которой приближается точка *M*(*x*,*y*), лежащая на графике, в данном процессе:

1. При неограниченном удалении ее от начала координат, ***при устремлении точки к границам области определения.*** Здесь говорят о ***наклонной асимптоте y=kx+b*** или ее частном случае – ***горизонтальной асимптоте y=b***

Величины k и b определяют по формулам

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

2. *В точках разрыва второго рода*, x_p *=a, говорят о вертикальной асимптоте x=a****.*** Это прямая, параллельная оси Y, к которой приближается точка *M*(*x*,*y*), лежащая на графике, при устремлении Точки к точке разрыва.

Примеры исследования функции

<u>Пример1</u>: Исследовать функцию $y=(x-1)(x^2-2x-2)=x^3-3x^2+2$

1.Область определения функции $(-\infty, +\infty)$.

2. Точки разрыва – нет

3. Функция общего вида

4. Пределы функции: $x\to-\infty$ $y\to-\infty$; $x\to\infty$ $y\to\infty$ Асимптот нет

5. Точки экстремума, интервалы монотонности

Найдем стационарные точки. Для этого найдем первую производную и приравняем ее нулю

$y'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$. Стационарные точки $x=0$; $x=2$. Нанесем эти точки на числовую ось (рис.9), проанализируем знаки производной $y'=3x(x-2)$ вокруг стационарных точек. При переходе через $x=0$ производная меняет знак с + на -, $x=0$ – максимум; при переходе через $x=2$ производная меняет знак с – на + , $x=2$ – минимум

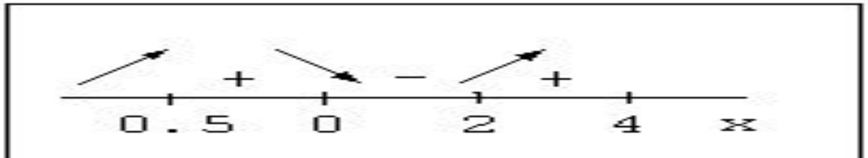


Рис. 9

Пример 1 (продолжение). Исследуемая функция $y = (x-1)(x^2-2x-2) = x^3-3x^2+2$

Пример 1 (продолжение). Исследуемая функция $y = (x-1)(x^2-2x-2) = x^3-3x^2+2$

x=0 – максимум ; y(0) =2

x=0 – максимум ; y(0) =2

x=2 – минимум ; y(2) = -2.

x=2 – минимум ; y(2) = -2.

В точке x=-0.5 y(-0.5)=9/8; в точке x=4 y(4)=18.

В точке x=-0.5 y(-0.5)=9/8; в точке x=4 y(4)=18.

6. Точки перегиба. Определим вторую производную, приравняем ее нулю. Получаем $y'' = (3x^2-6x)' = 6x-6=0$. точка перегиба x=1.

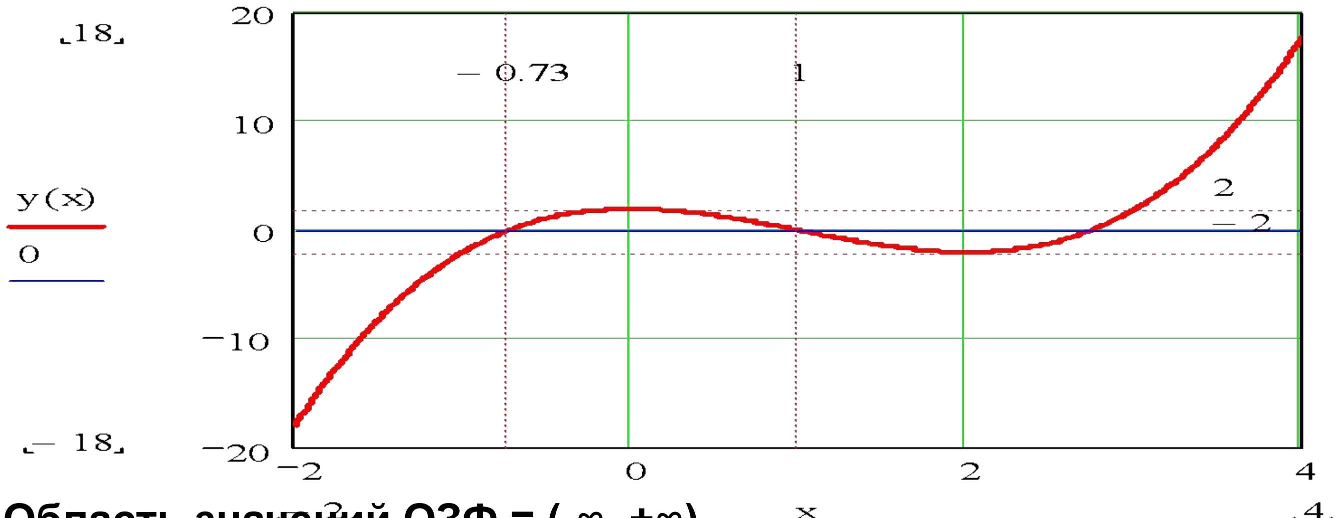
6. Точки перегиба. Определим вторую производную, приравняем ее нулю. Получаем $y'' = (3x^2-6x)' = 6x-6=0$. точка перегиба x=1.

7. Найдем точки пересечения с осью x: $x_1=-0.73$; $x_2=0$; $x_3=2.73$

7. Найдем точки пересечения с осью x: $x_1=-0.73$; $x_2=0$; $x_3=2.73$

8. Построим качественный график

8. Построим качественный график



9. Область значений ОЗФ = (-∞, +∞).

9. Область значений ОЗФ = (-∞, +∞).

4.Определяем пределы:

-на границах ООФ. Совместим исследование с поиском наклонной асимптоты y = kx + b.

Пример 2. Исследуемая функция $$y = \frac{(3-x)^2}{1-x}$$

1. ООФ – (-∞,1) U(1,+∞)

2. Точка разрыва x_p =1. Интервалы непрерывности (-∞,1), (1,+∞). Вертикальная асимптота x_p =1

3. Функция общего вида. Не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

4.Определяем пределы:

Уравнение наклонной асимптоты y = -x + 5

-на границах ООФ. Совместим исследование с поиском наклонной асимптоты y = kx + b.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(3-x)}{(1-x)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9-6x+x^2}{x-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3-x)^2}{1-x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{9-6x+x}{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9-5x}{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9}{x}-5}{\frac{1}{x}-1} = 5.$$

Уравнение наклонной асимптоты y = -x + 5

Пример 2 (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \frac{(3-x)^2}{1-x}$$

Пределы в точке разрыва, справа x 1+ , слева x 1-

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(3-x)^2}{1-x} = -\infty, \lim_{x\to 1-0}\frac{(3-x)^2}{1-x} = +\infty.$$

5. Определяем экстремумы функции. Для этого найдем производную, приравняем ее нулю, посмотрим знаки производной

- $$y' = \frac{\left[(3-x)^2\right]' \cdot (1-x) - (1-x)' \cdot (3-x)^2}{(1-x)^2} = \frac{(3-x)(1+x)}{(1-x)^2} = 0$$

Характеристические точки x_1=3; x_2= -1.

В окрестности точки x= -1 знак производной меняется с минуса на плюс,x_2= -1 – точка минимума и y(-1)=8.

Нетрудно убедиться, что в точке x_1=3 максимум, y(3)=0.

- **Пример 2 (продолжение). Исследуемая функция**

$$y = \frac{(3-x)^2}{1-x}$$

- **6. Определяем точки перегиба. Для этого находим вторую производную, приравниваем ее нулю. Точек перегиба функция не имеет, так как ее вторая производная нуля не имеет**

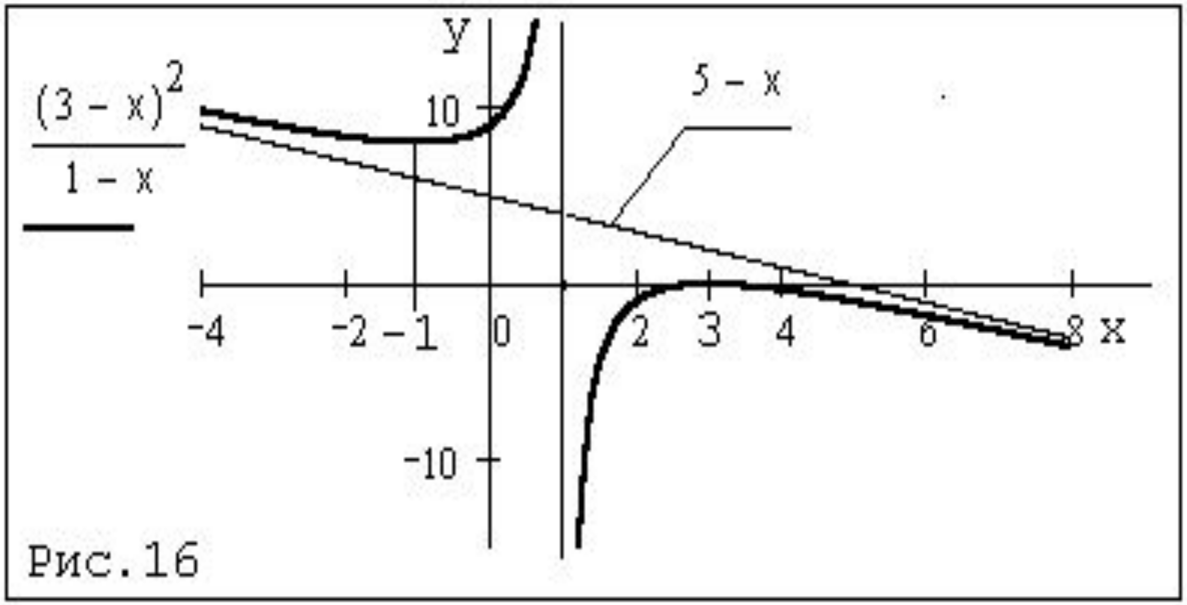
$$y'' = \left(\frac{(3-x)(1+x)}{(1-x)} \right)' = \frac{8}{(1-x)^3}.$$

- **На интервале (-∞,1) вторая производная положительна, и график выпуклый. На интервале (1,+∞) вторая производная отрицательная и график — вогнутый.**

- **Пример 2 (продолжение). Исследуемая функция**

$$y = \frac{(3-x)^2}{1-x}$$

- **7. Точки пересечения функции с осями координат: (3,0) и (0,9)**
- **8. График функции**



- **9. Область значений (ОЗФ): (-∞,0] ∪[8,+∞)**

Пример 3. Исследуемая функция $$y = \mathbf{exp}\left(-\frac{(x-1)^2}{2} \right)$$

- **1. ООФ – вся числовая ось, ООФ=(-∞, +∞).**
- **2. Точек разрыва нет; вертикальной асимптоты нет; интервал непрерывности (-∞, +∞).**
- **3. Функция общего вида.**
- **4. Пределы на границах ООФ определяем, совместив задачу с поиском асимптоты.**

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-1)}{2} \right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x \cdot \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2} \right)} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\exp\left(\frac{(x-1)^2}{2} \right)} = 0$$

- **Очевидно, ось x – горизонтальная асимптота**

Пример 3 (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \mathbf{exp}\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

5. Найдем экстремум функции и интервалы монотонности.

$$y' = \left[\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)\right]' = (1-x)\cdot\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right);\, y' = 0,\, x = 1$$

Стационарная точка *x*=1 является точкой *максимума* функции, так как при переходе через эту точку (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус.

$$y_{\max} = y(1) = e^0 = 1$$

Пример 3 (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \mathbf{exp}\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

6. Вычислим *y″* и найдем точки перегиба:

$$y'' = \left[(1-x)\cdot\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)\right]' = x\cdot(x-2)\cdot\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

Вторая производная обращается в нуль при *x*=0 и при *x*=2. В обеих этих точках происходит смена знака *y*", т.е. обе точки будут точками перегиба. Функция в этих точках равна:

$$y(0) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.62, \qquad y(2) = e^{-\frac{1}{2}} = 0.62.$$

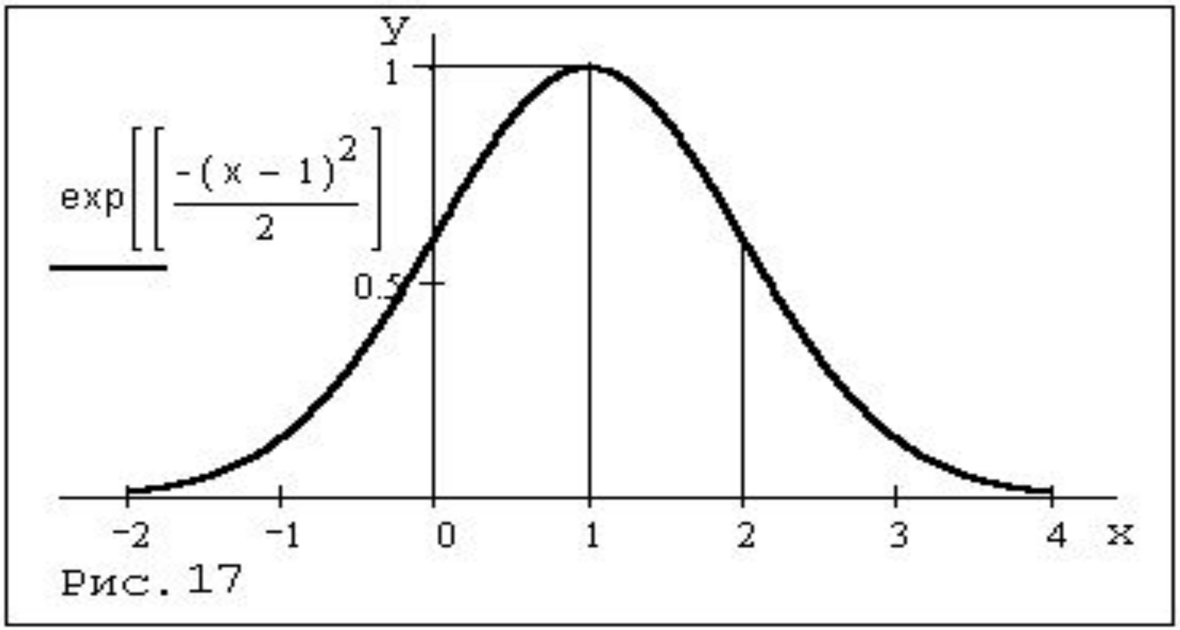
[Пример 3](#) (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \mathbf{exp}\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

7. Точка пересечения с осью y(x=0):(0, exp(-0.5)) или (0, 0.606).

Точек пересечения функции с осью x нет.

8. График функции



9. Область значений (ОЗФ) (0, 1]