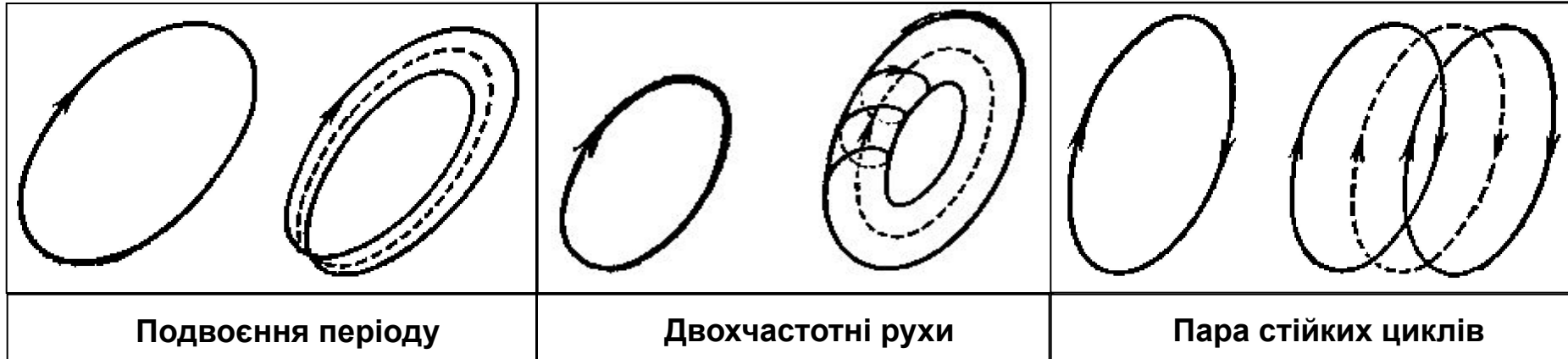


## Біфуркації періодичних рухів.



Біфуркація подвоєння періоду (каскад Фейгенбаума)

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + kx + \beta x^3 = F \cos(\omega t)$$

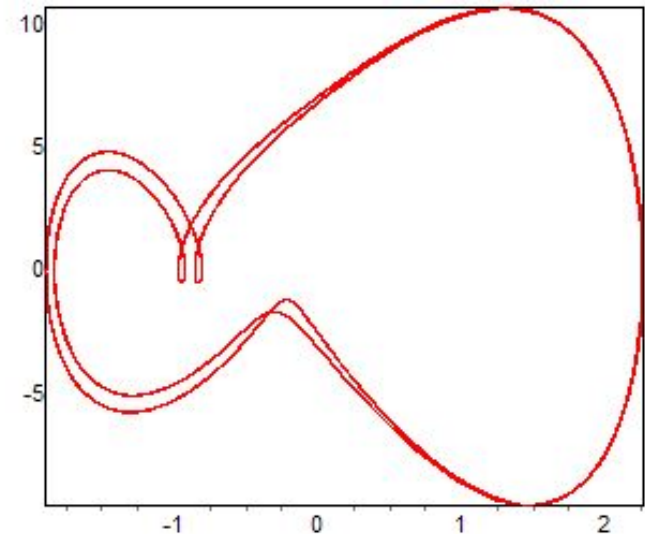
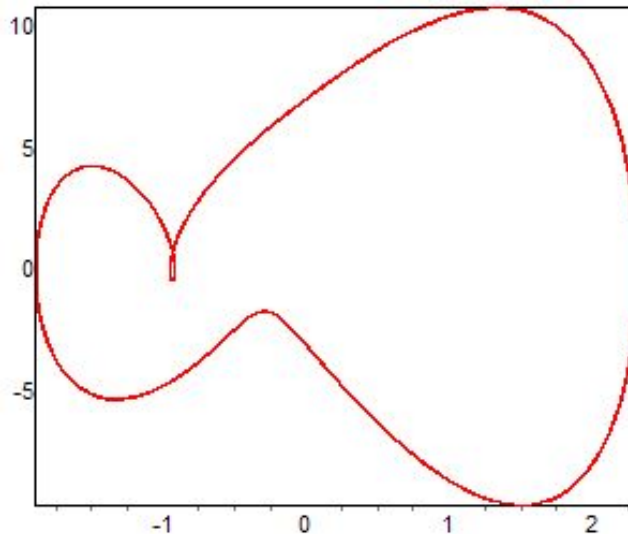
- система Дуффінга

$$\varepsilon = 1, k = 1, \omega = 3,$$

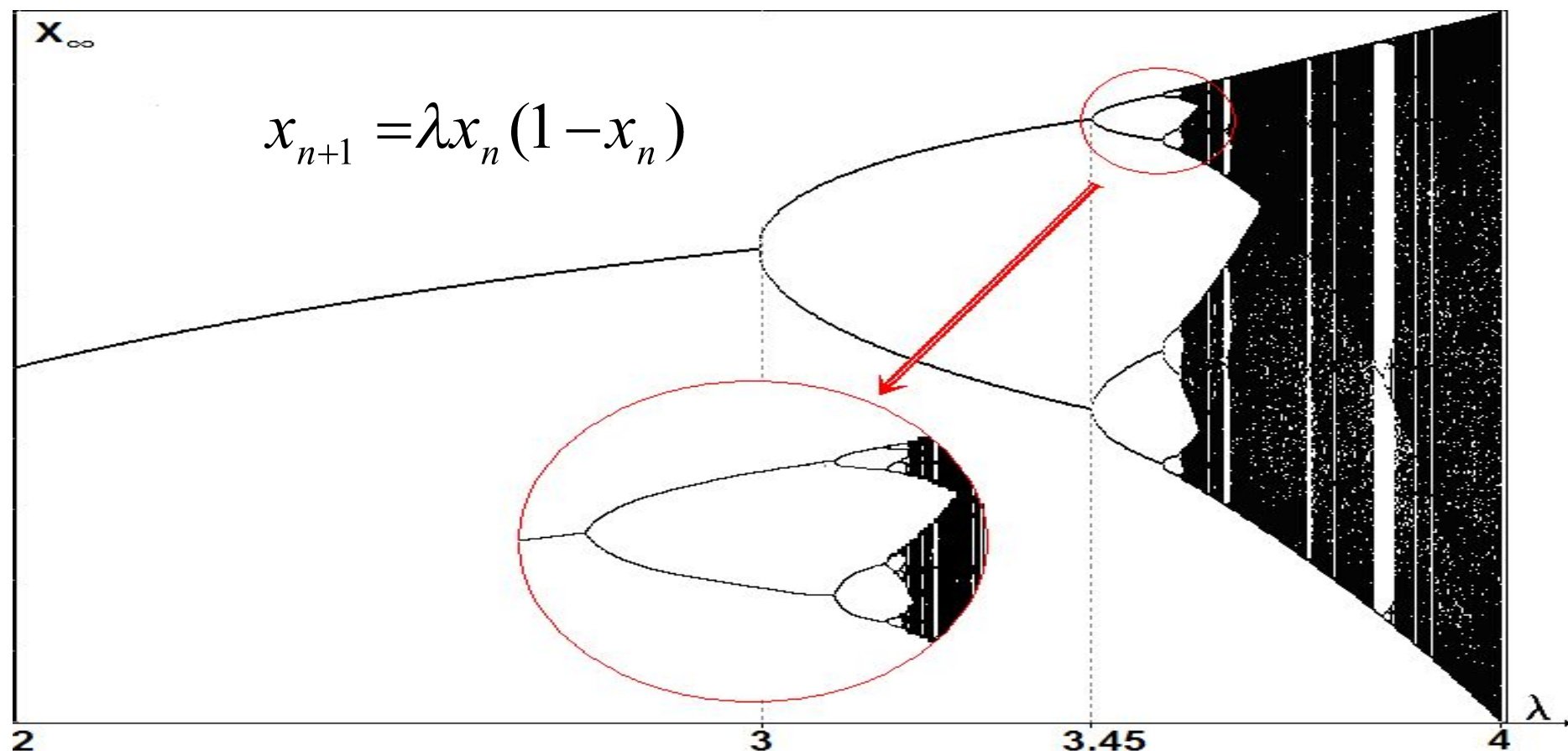
$$\beta = 15.5, F = 50$$

$$\beta = 15.6, 22.3,$$

$$\dots, \sim 30$$



## Біфуркації у дискретних моделях.



$$\delta_n = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$$

$$\delta = 4.6692016\dots$$

Константа Фейгенбаума характеризує єдину швидкість прямування до хаосу в фізичних осциляторах, у біологічних популяціях, у рідинах, і ще у багатьох практично важливих для людини системах.

## Сценарії виходу на хаос:

- ланцюжок Фейгенбаума
- Рюеля - Такенса – Ньюхауза
- перемежовуваність Помо - Манневілля

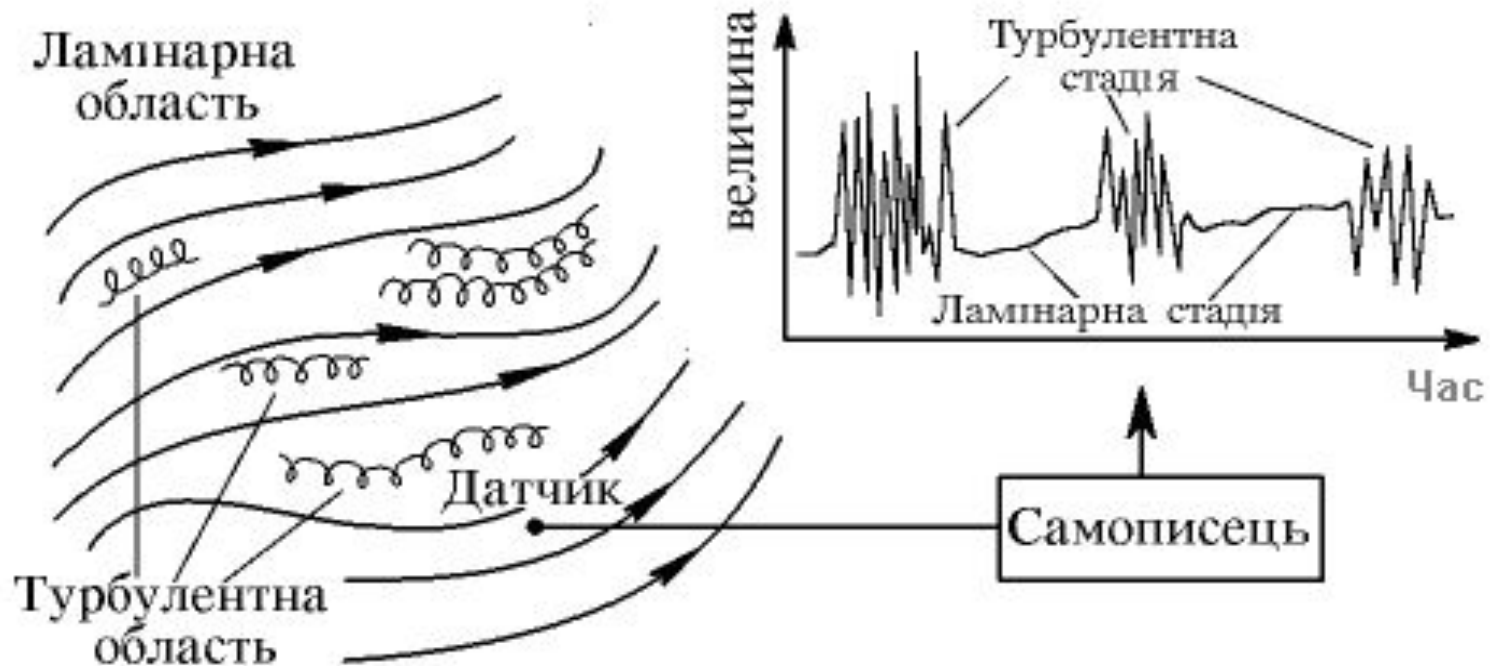
### Сценарій Рюеля - Такенса – Ньюхауза

Розглянемо  $M \geq 3$  дисипативних підсистем, які виконують незалежні між собою автоколивання (тобто на частотах, що знаходяться в ірраціональних співвідношеннях). Атрактором такої системи буде  $M$ -мірний тор. Тепер введемо деякий зв'язок між підсистемами, тобто незалежні рівняння їх моделей зведемо у єдину систему (прикладом є система Лоренца). Рюель і Такенс довели, що за будь-якого, навіть самого слабкого зв'язку між підсистемами можна підібрати такі його вид і параметри, котрі призведуть до появи дивного атрактора (отже й хаосу) у всій системі.

Більше того, далі Рюель і Такенс отримали ще дивовижніший результат. Уявімо собі простір функцій, які стоять у правих частинах динамічних рівнянь моделі системи. Виявляється, що в довільно малому околі будь-якої точки цього простору, що відповідає незв'язаним (регулярним) автоколиванням підсистем існує всюди щільна множина точок, які призводять до хаотичної динаміки.

## Сценарій Помо-Манневілля

Моделі попередніх сценаріїв були звичайними диференціальними рівняннями без залежності фазових величин від просторових координат. Поза тим, наприклад, у гідродинаміці давно відоме явище так званої перемежовуваної турбулентності, коли плавна ламінарна течія в одних областях співіснує з нерегулярною турбулентною у сусідніх.



У 1980 році французькі дослідники І. Помо та П. Манневілль виявили явище перемежовуваності (чергування упорядкованої та хаотичної динаміки) у динамічних моделях, що описуються системами навіть звичайних диференціальних рівнянь.

## Ланцюжки біфуркацій. Вибір сценарію хаотизації.

Вибір визначається внутрішніми властивостями системи (у моделі системи), чи зумовлений якимись зовнішніми, а, можливо, й випадковими факторами ???

Оскільки всі сценарії хаотизації починаються з переходу системи від рівноваги до автоколивного режиму через біфуркацію Андронова-Хопфа, спостереження за фазовим простором моделі почнемо з граничного циклу.

Січення Пуанкаре: 
$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

Для граничного циклу: 
$$x_0 = f(x_0, y_0), \quad y_0 = g(x_0, y_0)$$

Вносимо збурення: 
$$x = x_0 + \tilde{x}, \quad y = y_0 + \tilde{y}$$

Розвиток у ряд Тейлора: 
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}} + O(\tilde{\mathbf{x}}^2)$$

Лінійна частина збурення: 
$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

де: 
$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Матриця Якобі, характеризує швидкість зміни початкового збурення у часі, а її власні числа виражають це у кількісному значенні:

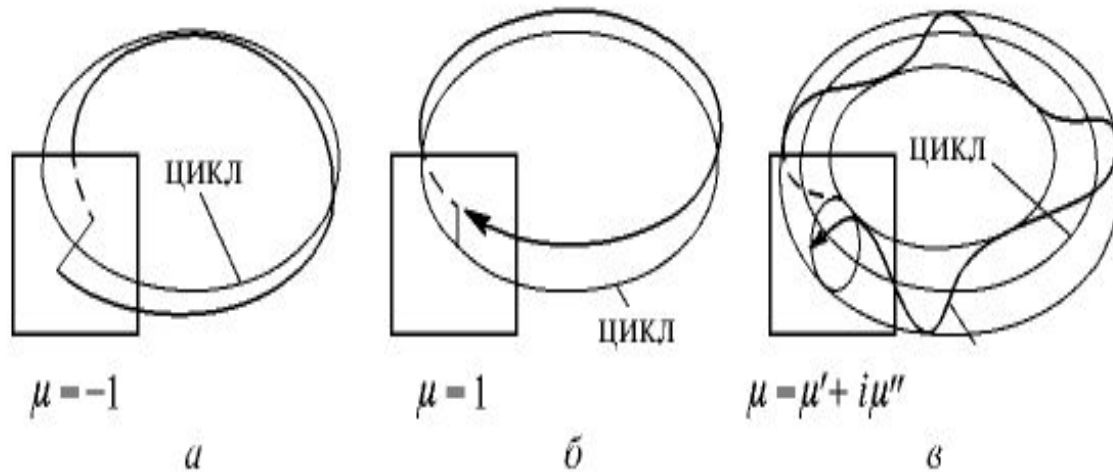
$$\mu_s \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2. \quad \mu^2 - S\mu + J = 0, \quad \mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}$$

де  $S = f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)$  - слід матриці Якобі, а

$J = f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0)$  - її визначник

Таким чином в координатах (S, J) область стійкості граничного циклу обмежується лініями, що відповідають  $\mu = 1$ ,  $\mu = -1$  та  $J = 1$





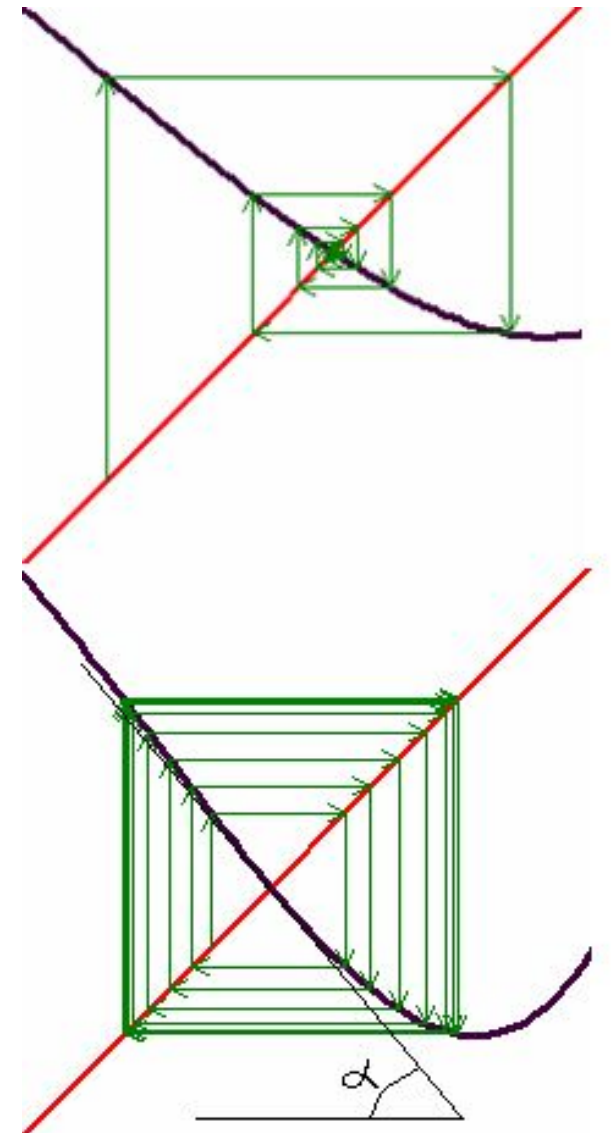
Проілюструємо сказане на діаграмі Ламерея одномірного відображення  $x_{n+1} = f(\lambda, x_n)$ , яке реалізується, наприклад, на перетині границі області стійкості та осі  $J = 0$ .

У цьому випадку

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha$$

$$x_{n+1} = \mu x_n + x_n^2$$

Після проходження біфуркації ( $\mu = -1$ ) графік функції нахилиється так, що  $\mu < -1$ , вузол втрачає стійкість, але після декількох ітерацій нелінійність функції стабілізує процес і в системі з'являється стійкий цикл з подвоєним періодом

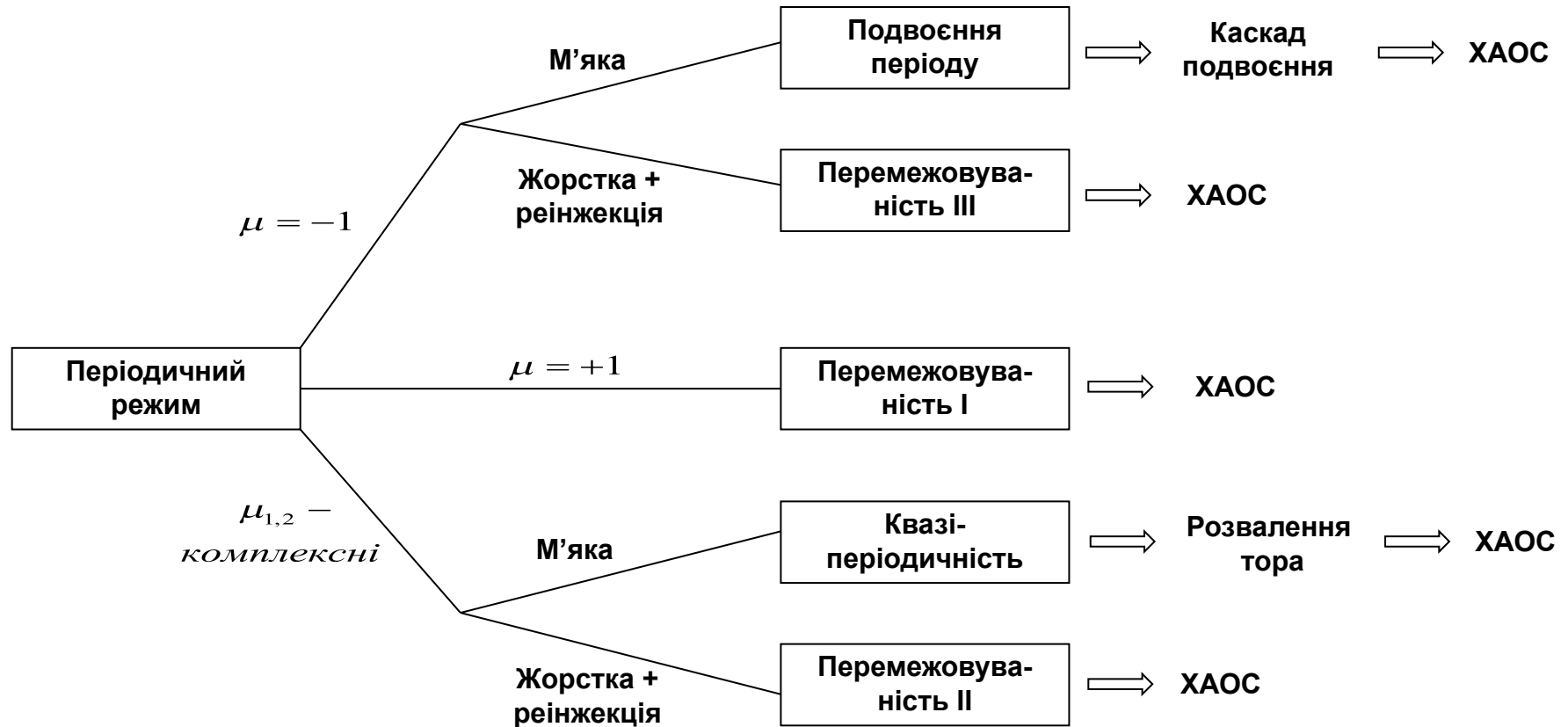
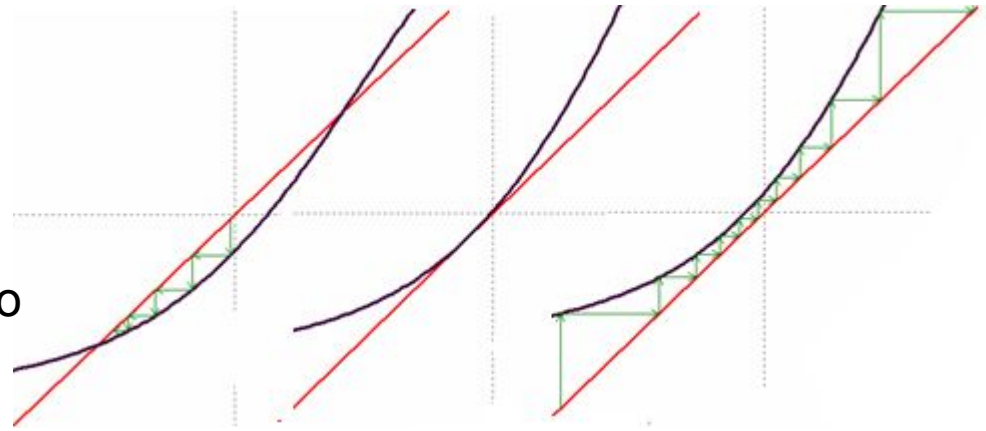


*Заміна стійкого вузла граничним циклом після біфуркації подвоєння періоду.*

$$\mu = 1$$

Сідло і вузол взаємно аніглюються.

Можлива реінжекція розв'язку реалізує сценарій Помо-Маневілля I-го роду





## Література.

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос.
2. Физическая энциклопедия. [http://www.femto.com.ua/articles/part\\_1/0327.html](http://www.femto.com.ua/articles/part_1/0327.html)