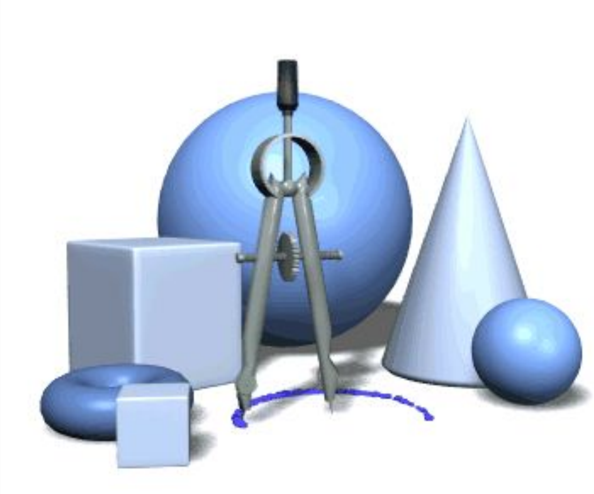


Тригонометрическая окружность. Тригонометрические функции

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ:

- ***Понятие угла. Градусная и радианные меры измерения угловых величин. Изображение вещественных чисел на единичной окружности.***
- ***Определение и свойства тригонометрических функций.***
- ***Квадранты единичной окружности. Знаки тригонометрических функций.***

Тригонометрия — математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.

В древности **тригонометрия** возникла в связи с потребностями астрономии, землемерия и строительного дела, то есть носила чисто геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд».

В первой половине 18-го века произошел резкий перелом, после чего тригонометрия приняла новое направление и сместилась в сторону математического анализа. Именно в это время тригонометрические зависимости стали рассматриваться как функции.

***Определение 1*. Угол — это часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки, вершины угла.**

Угол разбивает плоскость на две части.

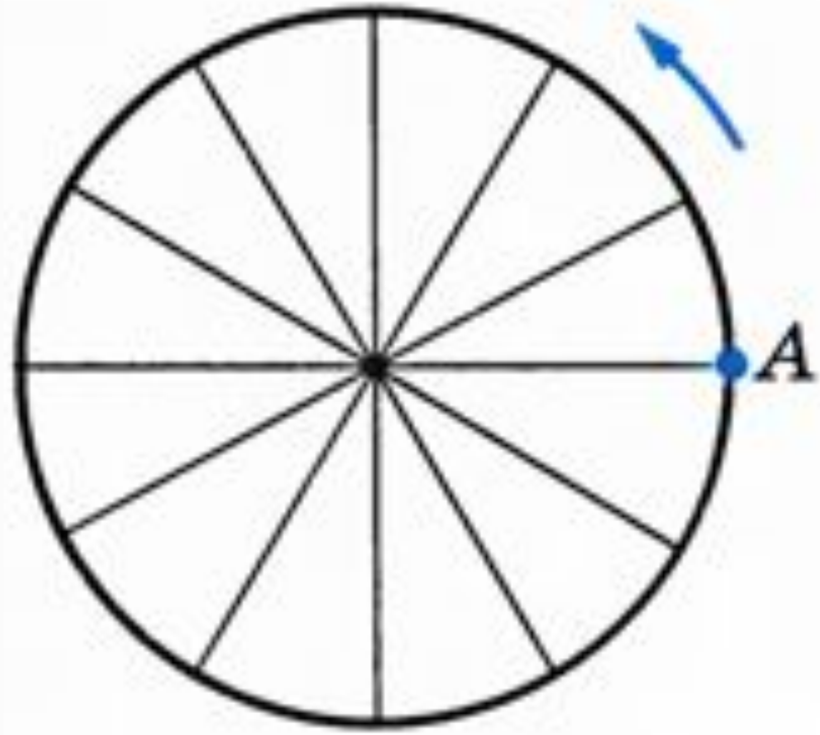
Каждая из них называется **плоским *углом*.**

Плоские углы с общими сторонами называются **дополнительными.**

В качестве единицы измерения углов принят ***градус*** — $\frac{1}{180}$ ***развернутого угла*** (прямой).

Определение 2.

Угол в 1^0 – это угол, который опишет луч, совершив 1/360 часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки.



Теорема 1. ***Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т.е. одно и то же для любых окружностей.***

$$\frac{l}{2R} = \pi .$$

Число π — иррациональное.

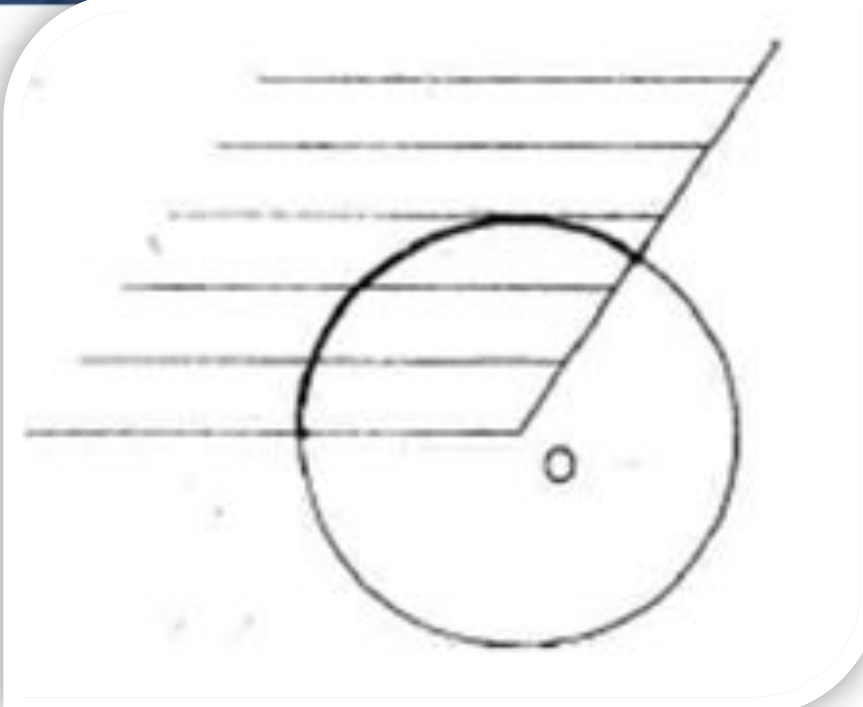
Приближенное значение $\pi \approx 3,1416$.

Длина окружности вычисляется по формуле

$$l = 2\pi R .$$

Определение 3.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре.



Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется дугой окружности, соответствующей этому центральному углу

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла. Развернутому углу (прямой) соответствует длина полуокружности πR.

Определение 4.

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности.

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} n$$

Пример.

Найти длину дуги окружности радиуса 1 см, соответствующей центральному углу в 30°.

Решение.

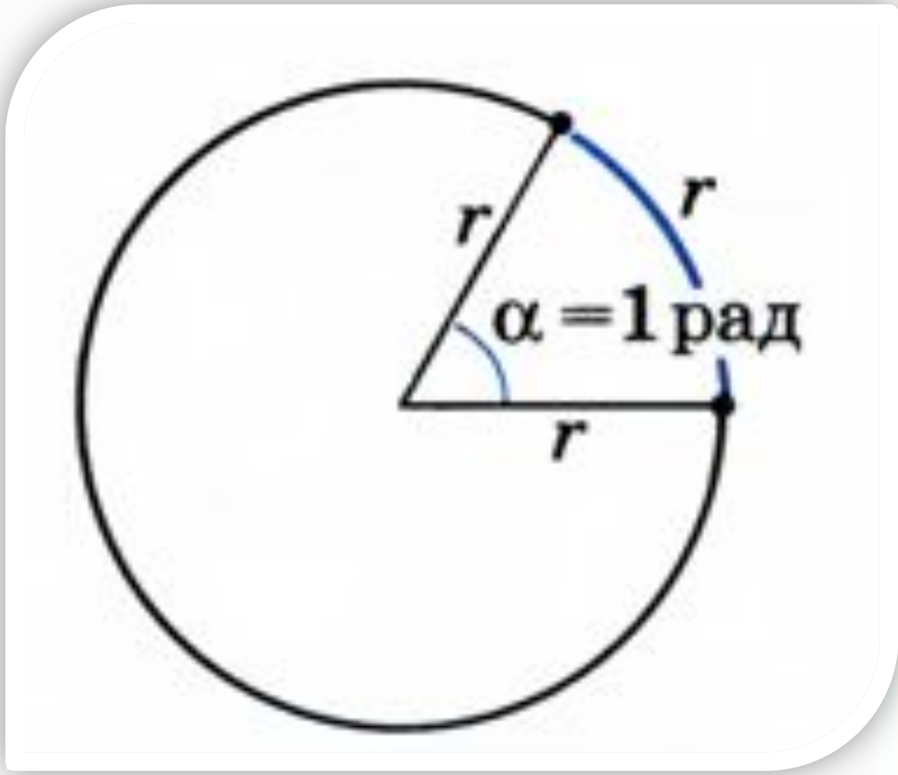
Используем формулу $L_{\alpha} = \frac{\pi \alpha^0}{180^0} R$. Радиус окружности равен 1см, α = 30°, тогда:

$$L_{30^o} = \frac{\pi \bullet 30^\circ \bullet 1 см}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} см$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} см$ **(длина всегда измеряется в единицах измерения – см, м, км)**

Определение 5.

Углом в 1 радиан называется центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу окружности



$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)^\circ$$

$$1 \text{рад} \approx 57{,}3^\circ$$

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)^\circ \alpha$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ рад}$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pi \alpha}{180^\circ} \text{ рад}$$

Задача Найти радианную меру угла, равного: 1) $45°$; 2) $15°$.

▶ По формуле (2) находим:

1) $45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45$ рад $= \frac{\pi}{4}$ рад;

2) $15° = \frac{\pi}{180} \cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад. ◁

Задача Найти градусную меру угла, равного: 1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

▶ По формуле (1) находим:

1) π рад $= 180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад $= 90°$;

3) $\frac{3\pi}{4}$ рад $= \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4}\right)^{\circ} = 135°$. ◁

Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

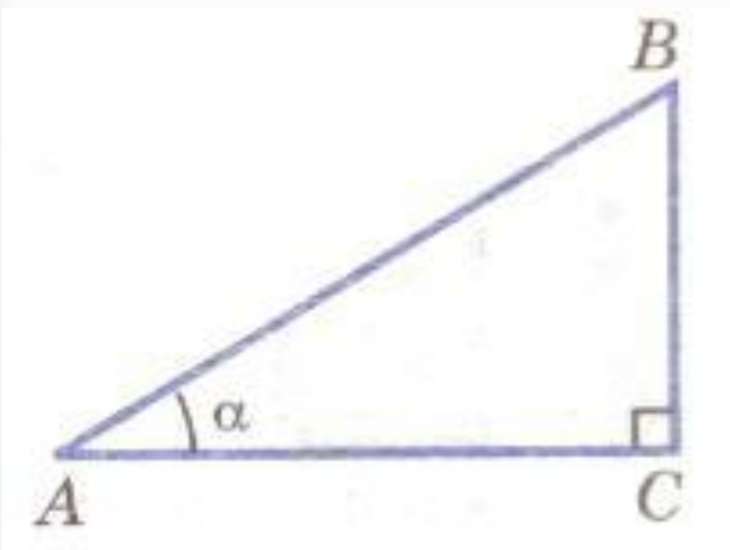
Синусом острого угла **прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе**

Sin A = BC:AB

Косинусом острого угла

прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

Cos A = AC :AB



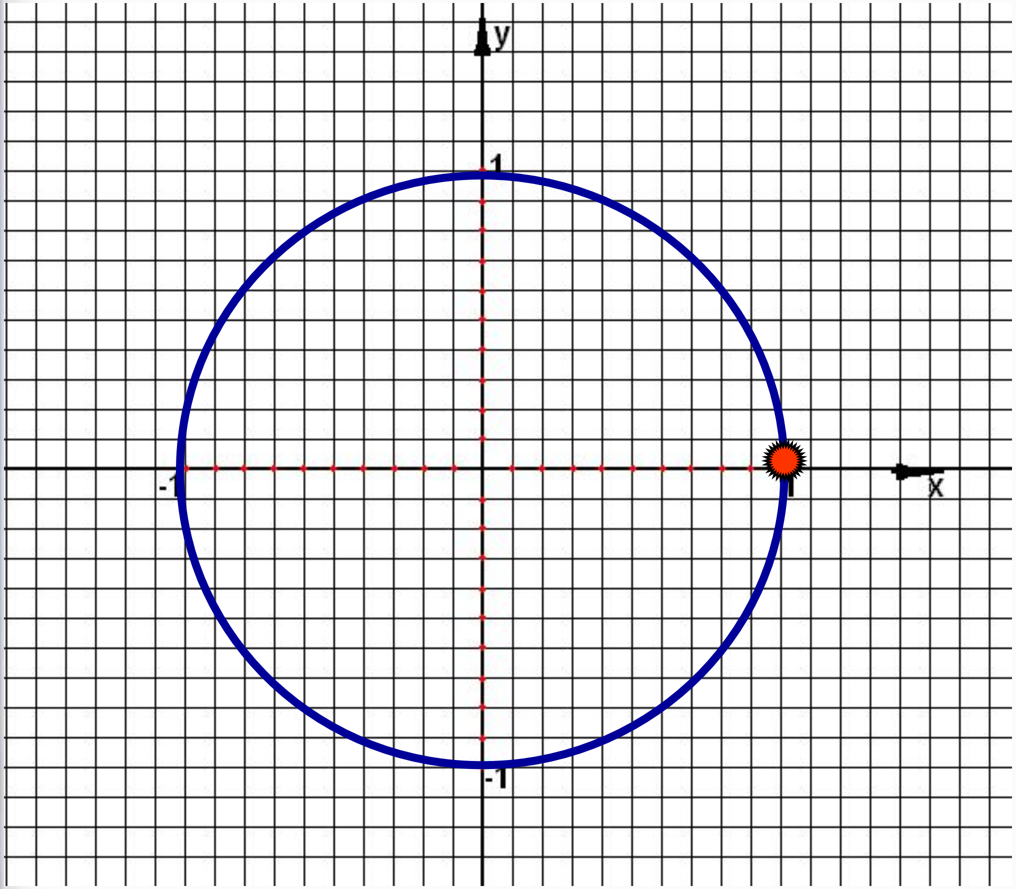
Тангенсом острого угла

прямоугольного треугольника ывается отношение противолежащего катета к прилежащему катету

Tg A = BC:AC

Определение единичной окружности

Автоматический показ

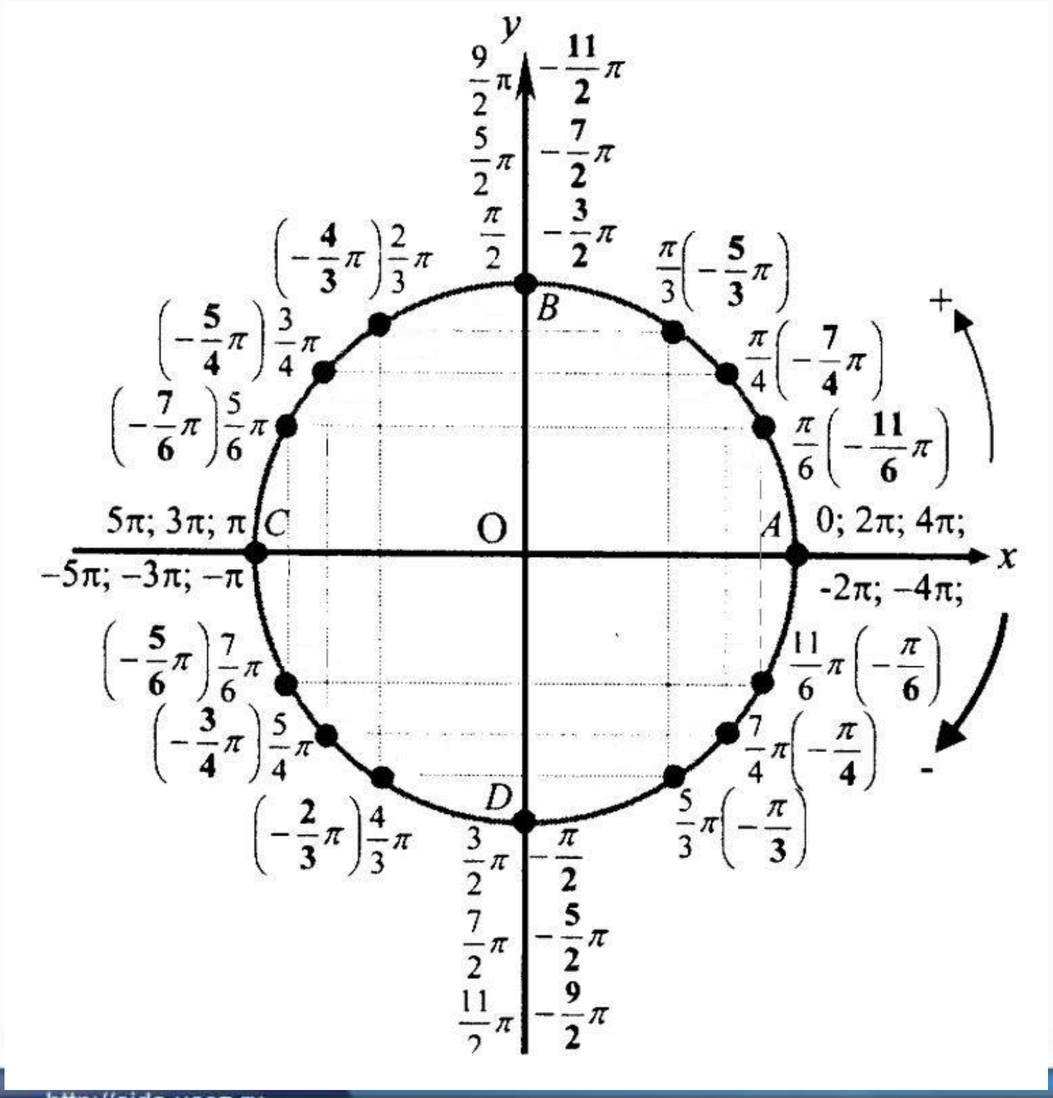


Окружность радиуса 1 с центром в начале координат называют *единичной окружностью*.

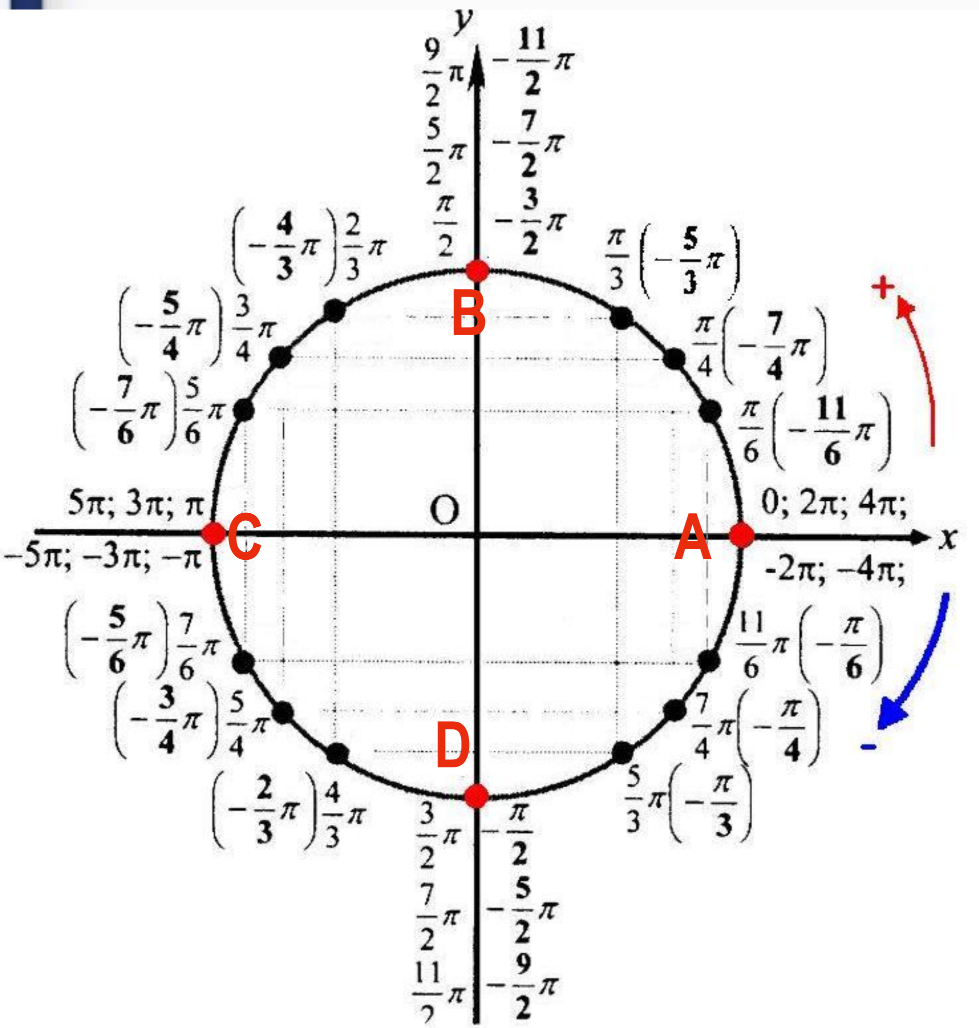
Зададим соответствие между множеством действительных чисел и точками единичной окружности следующим образом:

Так как длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$, то можно получить изображение таких чисел на окружности как:

$$\pi,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 3\pi,\ 4\pi\ \text{и т.д., учитывая, что}\ R = 1\ \text{и}\ C = 2\pi.$$



Обратите внимание, что построенное отображение не является однозначным:



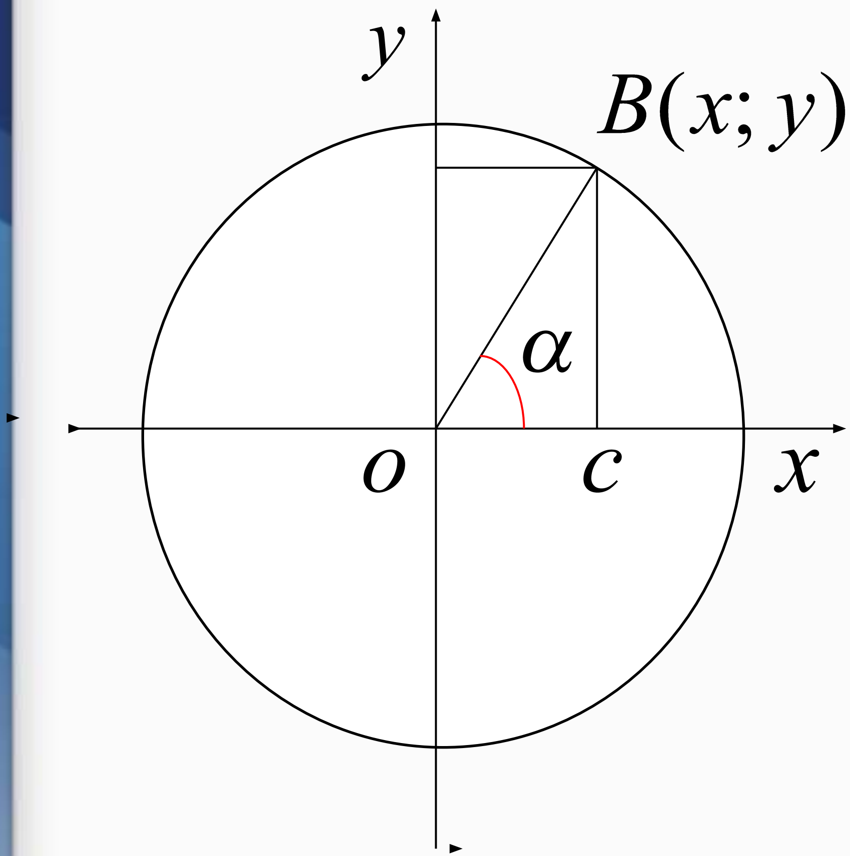
1. Каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности.

2.Каждая точка окружности изображает бесконечное множество действительных чисел.

3. Точки A, B, C, D назовем *узловыми.*

Фактически, мы получили принципиально новую систему координат – криволинейную. Но точка единичной окружности имеет одну координату. (Почти все также, как и в прямоугольной системе координат.)

Определение тригонометрических функций



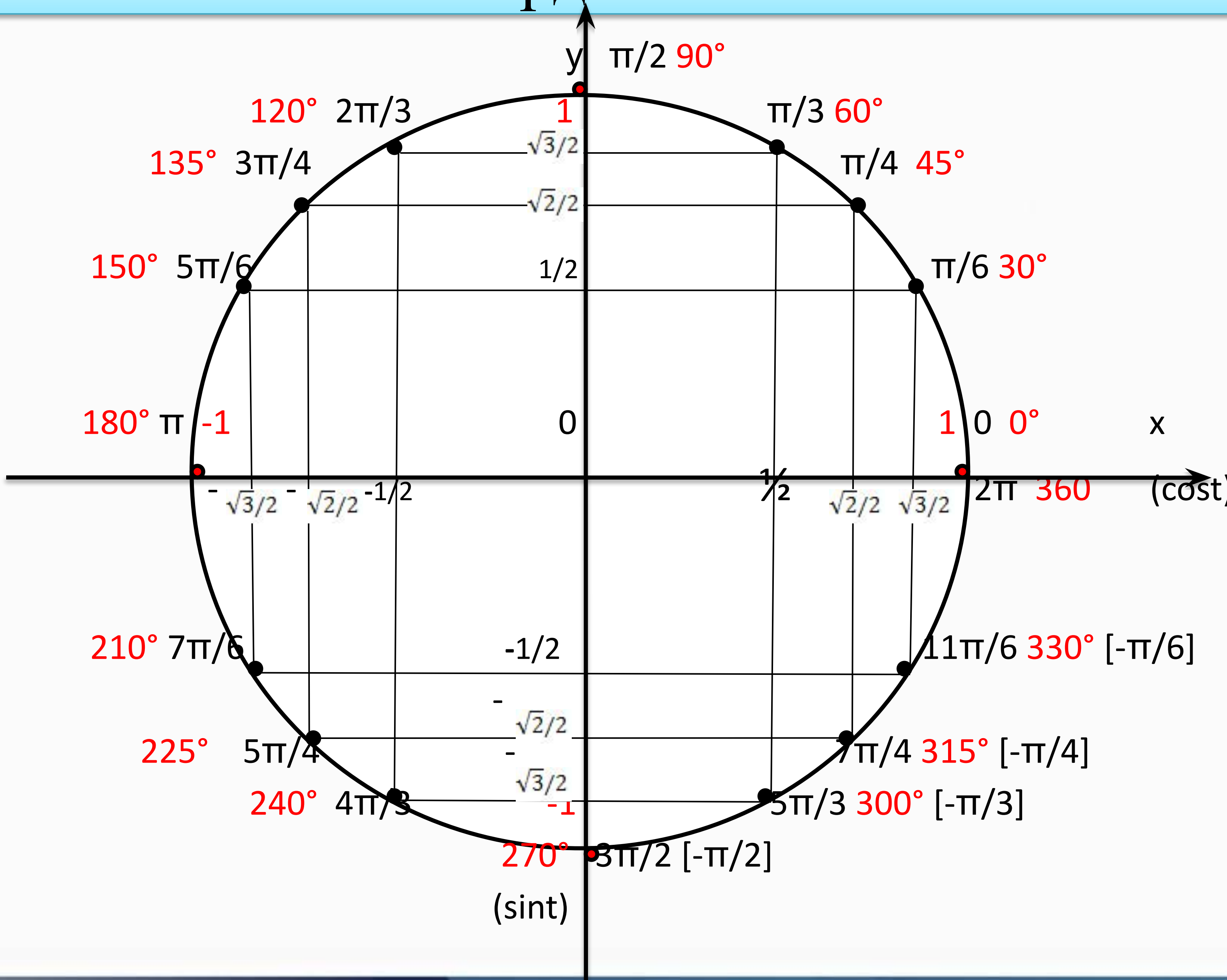
$$\sin\alpha = \frac{y}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

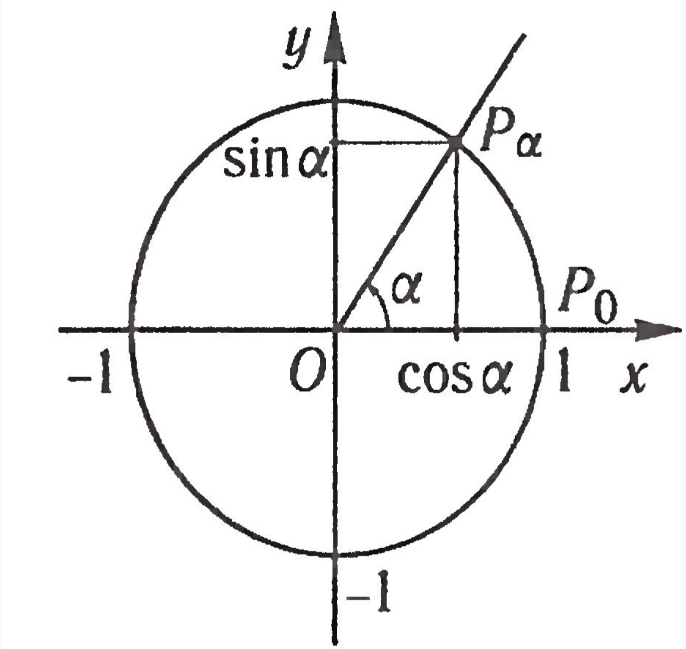
Координаты



y
π/2 90°
1
120° 2π/3
π/3 60°
√3/2
135° 3π/4
π/4 45°
√2/2
150° 5π/6
1/2
π/6 30°
180° π -1
0
1 0 0°
x
-√3/2 -√2/2 -1/2
½
√2/2 √3/2
2π 360
(cost)
210° 7π/6
-1/2
11π/6 330° [-π/6]
-√2/2
225° 5π/4
7π/4 315° [-π/4]
-√3/2
240° 4π/3
-1
5π/3 300° [-π/3]
270° 3π/2 [-π/2]
(sint)

Определение синуса и косинуса

Синусом угла x называется **ордината точки**, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол x (обозначается **$\sin x$**).

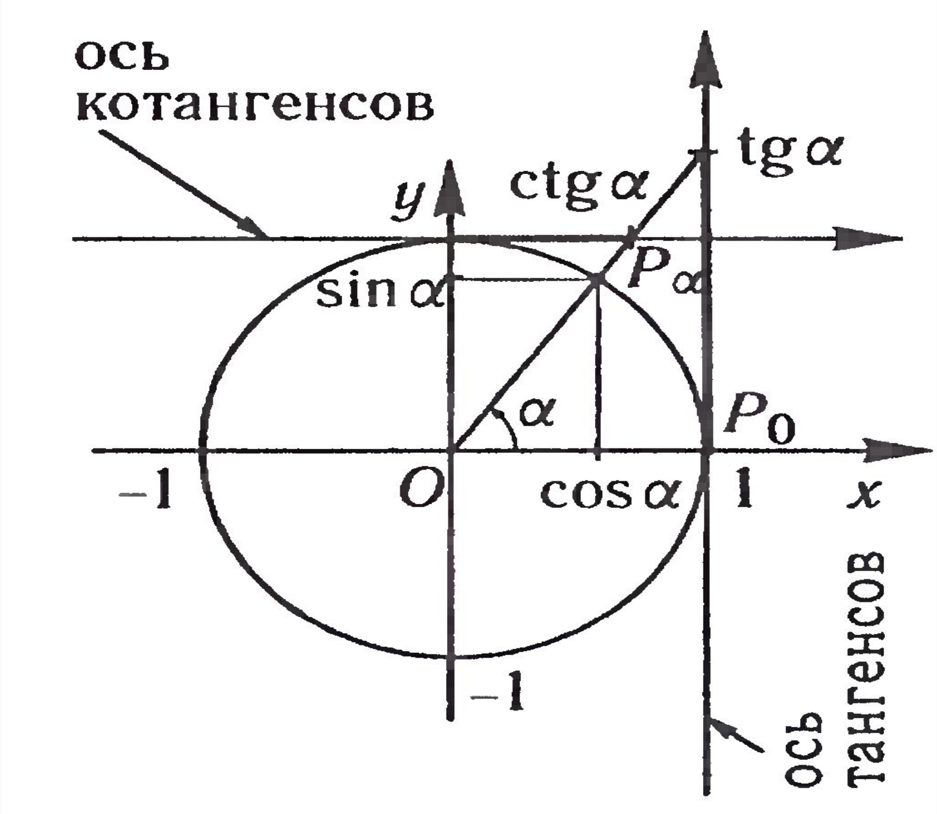


Косинусом угла x называется **абсцисса точки**, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол x (обозначается **$\cos x$**).

Определение тангенса

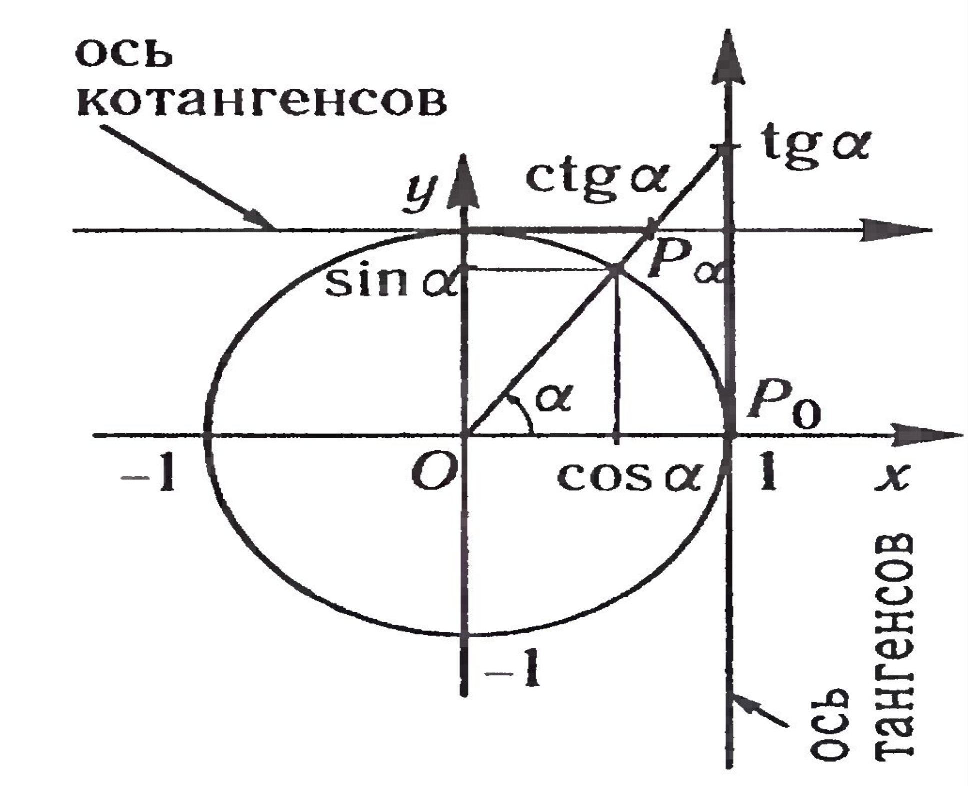
Тангенсом угла x называется отношение **синуса угла x** к **косинусу угла x**.

$$\operatorname{tg} a = \frac{y_a}{x_a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$



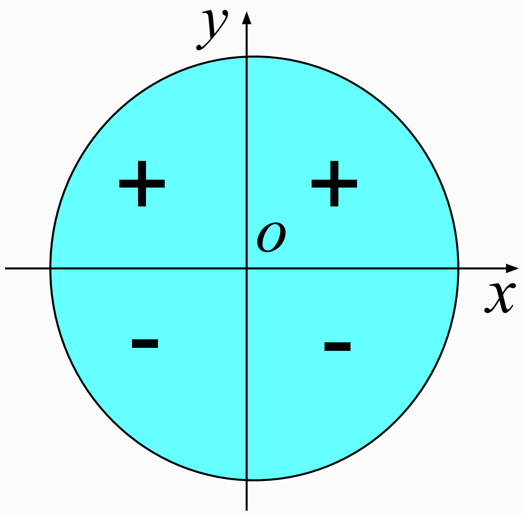
Определение котангенса

Котангенсом угла x называется отношение косинуса угла x к синусу угла x.

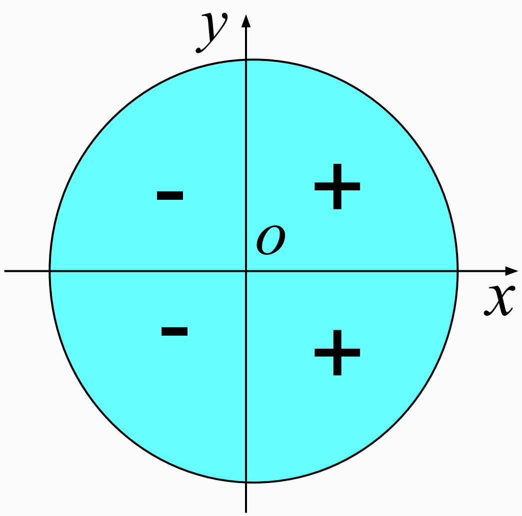


$$\operatorname{ctg} a = \frac{x_a}{y_a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

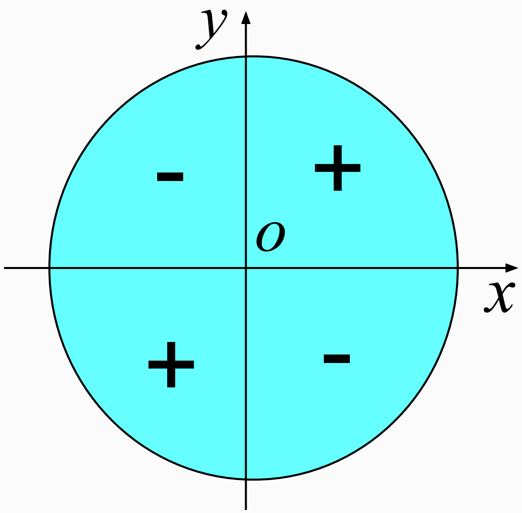
ЗНАКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ



СИНУС



КОСИНУС



ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС

Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ $\rightarrow$ $, 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

$1 - \cos^2 t = \sin^2 t$

2. $tgt = \dfrac{sint}{cost}$

3. $ctgt = \dfrac{cost}{sint}$

4. $tgt \cdot ctgt = 1$

5. $tg^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

6. $ctg^2 t + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 t}$

7. $\sin(-t) = -sint$

8. $tg(-t) = -tgt$

9. $ctg(-t) = -ctgt$

10. $\cos(-t) = cost$

Домашнее задание

1. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

1) $315°$; 2) $-240°$; 3) $210°$; 4) $135°$; 5) $120°$; 6) $75°$;
7) $-72°$; 8) $18°$; 9) $15°$; 10) $-6°$; 11) $1°$.

2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

1) $-\frac{7\pi}{4}$; 2) $\frac{4\pi}{3}$; 3) $-\frac{20\pi}{3}$; 4) $\frac{13\pi}{15}$; 5) $-\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{4\pi}{5}$;
7) $\frac{4\pi}{15}$; 8) $\frac{5\pi}{36}$; 9) $\frac{\pi}{20}$; 10) $\frac{\pi}{15}$; 11) $-\frac{13\pi}{180}$.