

Тема 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

4.1. Переменный ток.

Колебательный контур

4.2. Свободные колебания в

электрическом

контуре без активного

4.3. Свободные затухающие

электрические

колебания

4.4. Вынужденные электрические

колебания

4.1. Переменный ток

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени – *переменными токами*:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока.

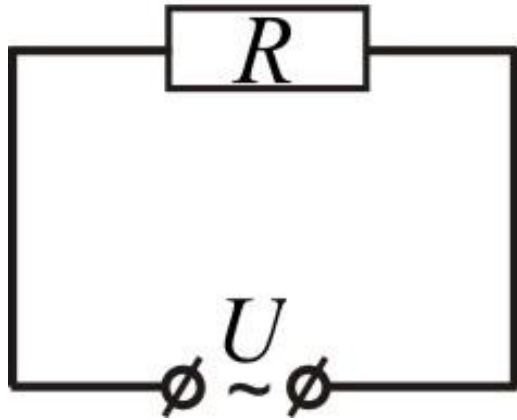
Переменный ток

Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света c .

- Пусть l – длина электрической цепи.
- Время распространения сигнала в данной цепи $t = l / c$.
- Если $t \ll T$ такие токи называются **квазистационарными** (T – период колебаний тока).
- При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным.
- Для частоты $f = \frac{1}{T} \approx 10^5$ условие квазистационарности будет выполняться в нашей лаборатории «Электричество» при длине цепи ~ 1 м.
- $$\frac{1}{3 \cdot 10^9} \ll \frac{1}{10^5}$$

Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, мы будем считать, что **токи квазистационарны**.

1. Сопротивление в цепи переменного тока



Ток в цепи $I = I_0 \sin \omega t$;

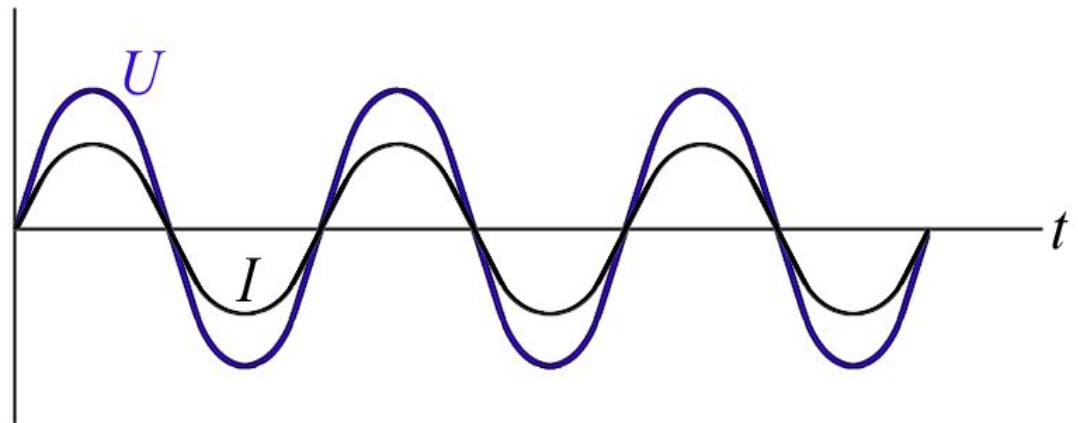
По закону Ома:

*$U = IR = I_0 R \sin \omega t$ - напряжение
изменяется синфазно с током;*

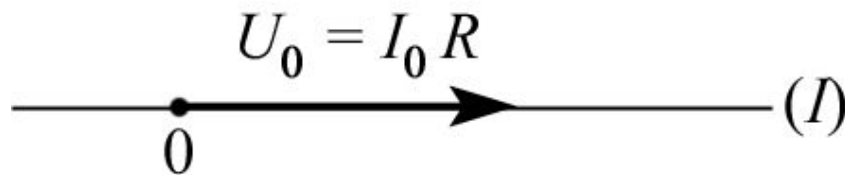
$U_0 = I_0 R$ - амплитуда напряжения.

C, L

пренебрежимо малы

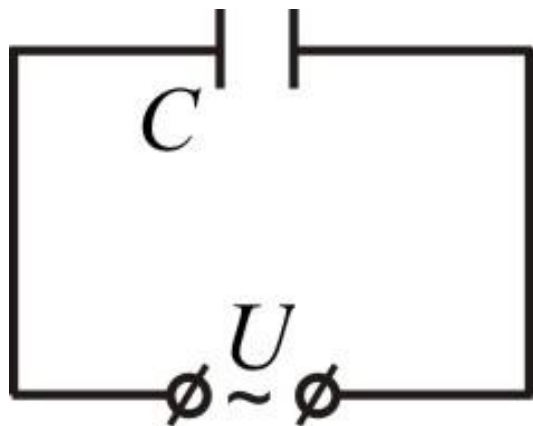


Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:



2. Емкость в цепи переменного тока

$$R \rightarrow 0, L \rightarrow 0$$



$$R_c = \frac{1}{\omega C}$$

*-кажущееся
сопротивление
емкости*

Ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t,$

По определению $I = \frac{dq}{dt}$

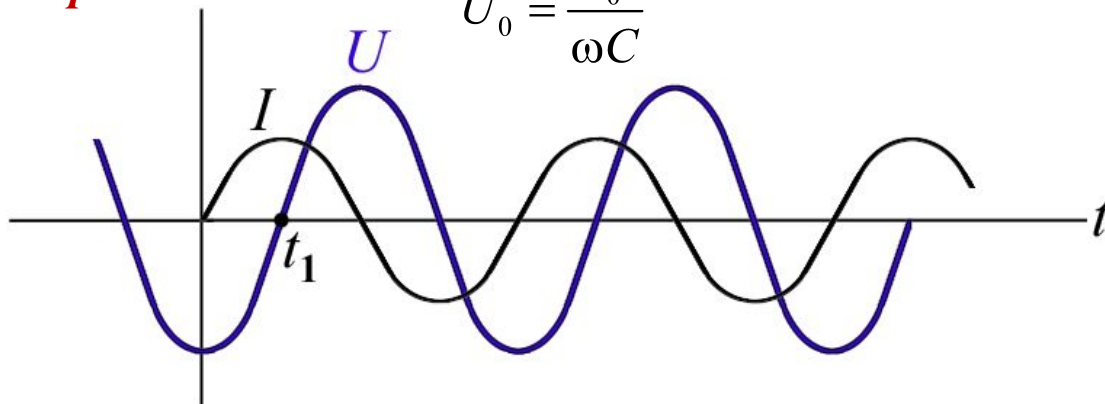
Заряд конденсатора: $q = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t$

$$U = \frac{q}{C} = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

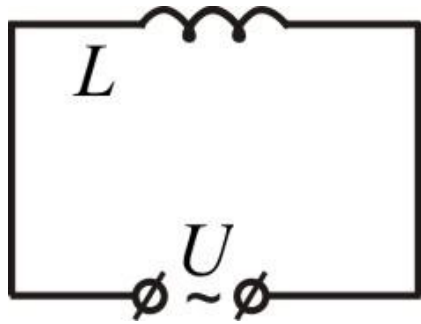
Напряжение отстает по фазе от тока на $\pi/2$

*-амплитуда
напряжения*

$$U_0 = \frac{I_0}{\omega C}$$



3. Индуктивность в цепи переменного тока



Рассмотрим цепь с $R \rightarrow 0$

при наличии переменного тока в катушке возникает **ЭДС самоиндукции**: $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}$

По закону Ома для участка цепи с ЭДС:

$$U = IR - \varepsilon_c = -\varepsilon_c$$

$$R_L = \omega L$$

**Кажущееся
сопротивление
индуктивности**

$$U = L \frac{dI}{dt} = LI_0 \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

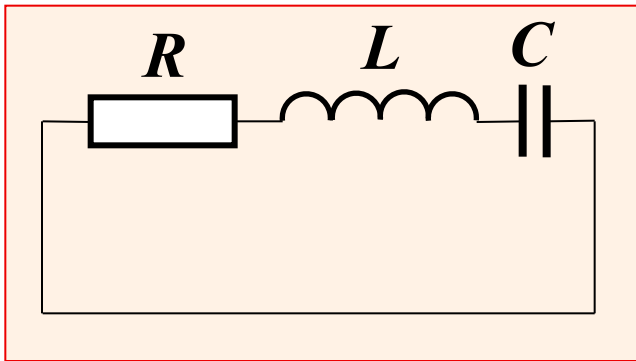
Напряжение опережает по фазе ток на $\pi/2$



4.1. Колебательный контур

Среди различных колебательных систем особое место занимают электромагнитные (электрические) системы, при которых электрические величины (токи, заряды) периодически изменяются и которые сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей.

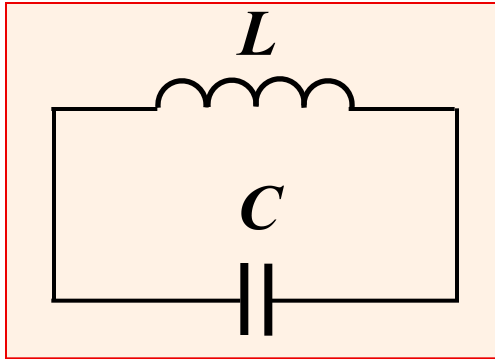
Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется *колебательный контур*.



Колебательный контур – это электрическая цепь, состоящая из последовательно включенных резистора сопротивлением R катушки индуктивностью L , и конденсатора емкостью C .

Для выяснения механизма возникновения электрических колебаний рассмотрим *идеализированный* контур, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$).

Колебательный контур.



Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряды $\pm q$.

В момент времени $t = 0$ между обкладками конденсатора возникает электрическое поле, энергия которого равна $q^2 / 2C$.

Вся энергия колебательного контура сосредоточена в конденсаторе.

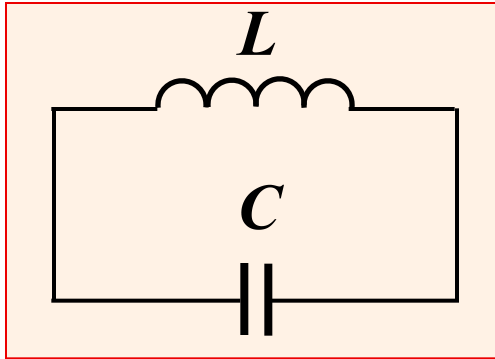
Если теперь замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, то в контуре потечет возрастающий со временем ток I .

Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки.

Этот процесс закончится, когда конденсатор полностью разрядится, а ток в цепи достигнет максимума.

Вся энергия колебательного контура сосредоточена в магнитном поле катушки и равна $LI^2 / 2$.

Колебательный контур.



С этого момента ток, не меняя направления, начнет убывать.

Однако он прекратится не сразу – его будет поддерживать ЭДС самоиндукции.

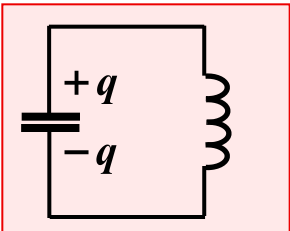
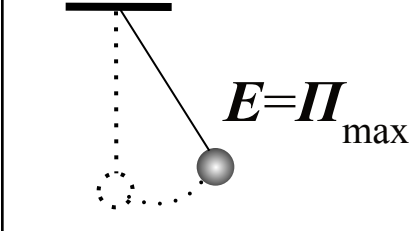
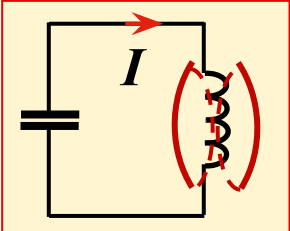
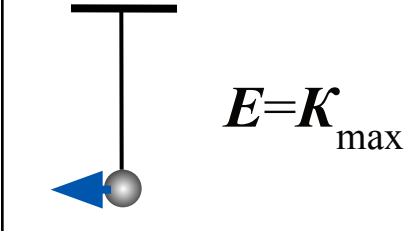
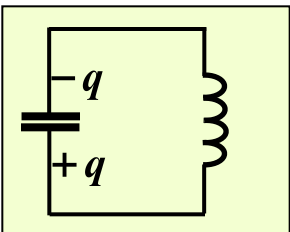
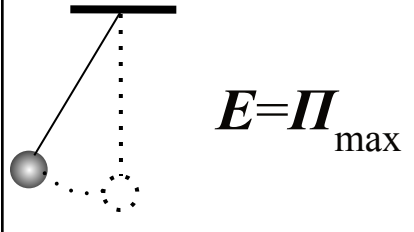
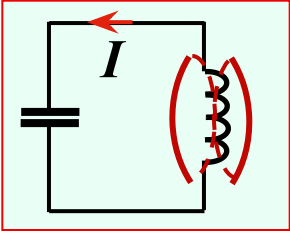
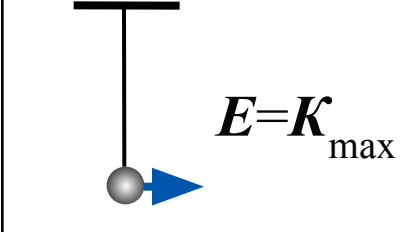
Ток будет перезаряжать конденсатор, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток.

Наконец, ток прекратится, а заряд на пластинах конденсатора достигнет максимума.

С этого момента конденсатор начнет вновь разряжаться, ток потечет в обратном направлении и процесс повторится.

Поскольку потерь энергии нет, в контуре будут совершаться периодические незатухающие колебания: будут изменяться заряд и напряжение на конденсаторе и ток, текущий через катушку.

Следовательно, в контуре возникнут колебания, сопровождаемые превращениями энергии электрического и магнитного полей.

t	Стадии колебательного процесса		Аналогия между электромагнитными колебаниями в контуре и механическими колебаниями		
	В конденсаторе	В катушке			
$t = 0$	Начало разрядки конденсатора	Начинает течь ток		$W = \frac{q^2}{2C}$	
$t = \frac{1}{4}T$	Конденсатор разряжен	Ток максимален		$W = \frac{LI^2}{2}$	
$t = \frac{1}{2}T$	Конденсатор перезаряжается	Ток равен нулю		$W = \frac{q^2}{2C}$	
$t = \frac{3}{4}T$	Конденсатор вновь разряжен	Ток максимален и направлен противоположно.		$W = \frac{LI^2}{2}$	

Колебания

механические		электромагнитные	
Дифференциальное уравнение	$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ $m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	Дифференциальное уравнение	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ $L\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$
Масса	m	Индуктивность катушки	L
Коэффициент жесткости	k	Обратная величина емкости	$\frac{1}{C}$
Смещение	$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$	Заряд	$q = q_m \sin(\omega t + \varphi)$
Скорость	$v = dx / dt$	Сила тока	$I = dq / dt$
Потенциальная энергия	$W = \frac{kx^2}{2}$	Энергия электрич. поля	$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля	$K = \frac{LI^2}{2}$

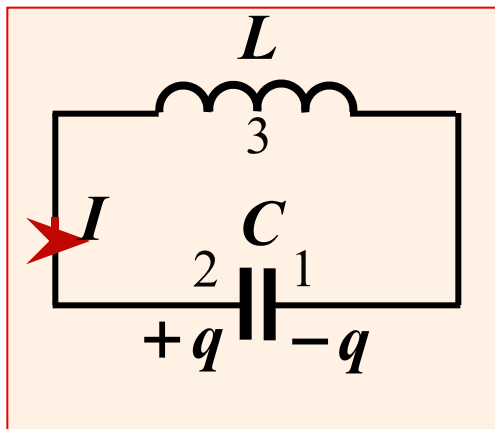
Собств. частота пружинного маятника	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Собств. частота колебательного контура	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Период колебаний	$T = 2\pi\sqrt{m/k}$	Период колеб. Формула Томсона	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
Циклич. частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклич. частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
Коэффициент затухания	$\beta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания	$\beta = \frac{R}{2L}$
Логарифмич. декремент затухания	$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$	Логарифмич. декремент затухания	$\lambda = \beta T R = \sqrt{\frac{C}{L}}$
Добротность пружинного маятника	$Q = \frac{\pi}{\chi} = \frac{1}{r} \sqrt{km}$	Добротность колебательного контура	$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Резонансная частота	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$	Резонансная частота	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

4.2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

сопротивления

Найдем уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления. Будем искать закон изменения заряда на обкладках конденсатора.

Пусть положительным будет такое направление тока в контуре, когда конденсатор заряжается.



Сила тока в цепи определяется выражением

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

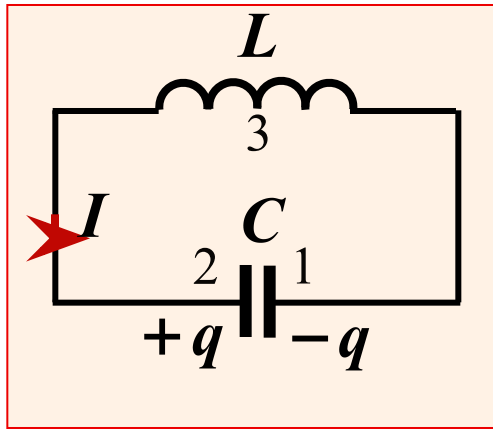
Рассмотрим цепь 1 – 3 – 2 и запишем для нее закон Ома в общем виде для неоднородного участка цепи:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}$$

E_{12} - ЭДС, действующая на участке цепи 1 – 2.

ЭДС положительна, т.к. способствует движению положительно заряженных носителей тока в выбранном направлении.

Колебательный контур.



В рассматриваемом случае $R = 0$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C, \quad \mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_s = -L(dI/dt)$$

Подставим эти значения в выражение для закона Ома, получим:

$$0 = -q/C - L(dI/dt)$$

Заменяем dI/dt на \ddot{q} ($dI/dt = d^2q/dt^2 = \ddot{q}$), получим:

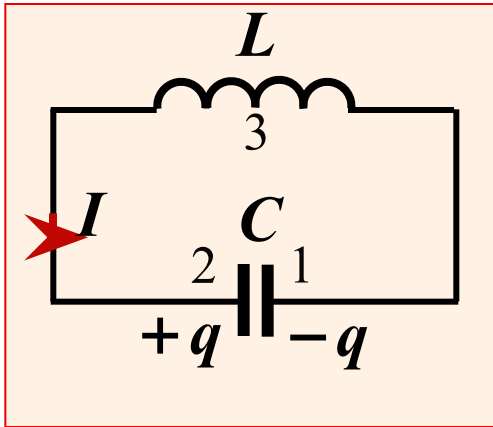
$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Если ввести обозначение $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, получим выражение вида

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Это дифференциальное **уравнение гармонических колебаний в контуре**. Оно подобно уравнению механических колебаний.

Колебательный контур.



Решением этого уравнения является выражение

$$q = q_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой, определяемой параметрами контура L и C .

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Эта частота называется *собственной частотой контура* и соответствует собственной частоте гармонического осциллятора.

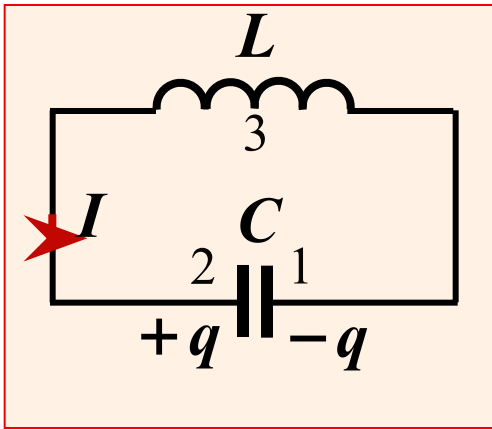
Выражение для периода колебаний называется *формулой Томсона*:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Запишем формулу для напряжения на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{max}}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Колебательный контур.



$$L \ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$q = q_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$U = \frac{q_{max}}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Продифференцировав соотношение для заряда, получим выражение для тока в контуре :

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$I = -q_{max} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I = I_{max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

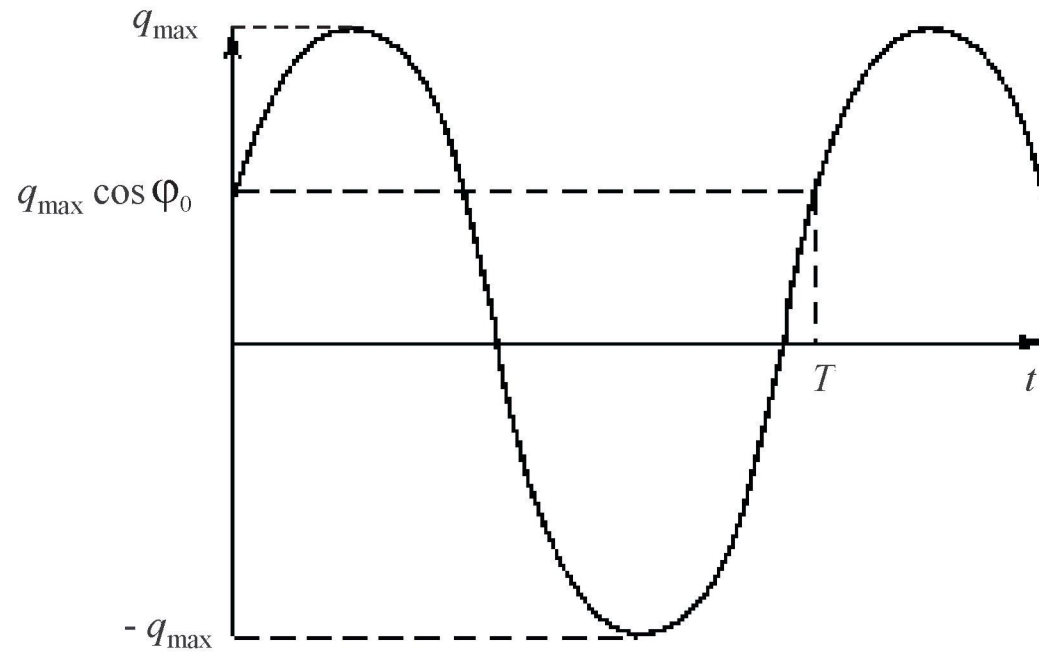
Видно, что сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

В момент, когда ток достигает наибольшего значения, заряд и напряжение обращаются в нуль и наоборот.

Колебательный контур.

График зависимости заряда на пластине конденсатора от времени - *свободные гармонические колебания*. Заряд в начальный момент связан с амплитудой заряда и начальной фазой колебаний заряда

Важно иметь в виду, что собственная частота гармонических колебаний зависит только от свойств самой колебательной системы (см. формулу Томпсона), в то время как амплитуда заряда q_{\max} и начальная фаза колебаний заряда φ_0 определяются не столько свойствами системы, сколько начальными условиями.



4.3. Свободные затухающие колебания в контуре

Реальный контур обладает активным сопротивлением.

Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется на этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают.

Учтем фактор затухания в выражении для закона Ома:

$$IR = -q/C - L(dI/dt)$$

Разделим это уравнение на L и заменим ток I на заряд q . В итоге получим:

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0$$

Введем обозначение $\beta = \frac{R}{2L}$ и, учитывая, что $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, получим окончательно:

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0$$

Свободные затухающие колебания в контуре.

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0$$

Это уравнение, как и ожидалось, совпадает с дифференциальным уравнением затухающих механических колебаний.

При условии, что $\beta^2 \ll \omega_0^2$, т.е. при $\frac{R^2}{4L^2} \ll \frac{1}{LC}$ решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$q = q_{\max} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Если в это выражение подставить соответствующие выражения для β , получим следующее соотношение для частоты затухающих колебаний:

При $R = 0$ получится выражение для собственной частоты незатухающих свободных колебаний в контуре.

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Свободные затухающие колебания в контуре.

Из уравнения для затухающих колебаний легко получить формулу для напряжения на конденсаторе, разделив уравнение на емкость C и выражение для тока в контуре. (СМ. ИРОДОВ параграф 11.2)

Запишем один из выводов, которые можно сделать из анализа формул для тока и падения напряжения на конденсаторе колебательного контура: *при наличии активного сопротивления в контуре сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на угол δ больший, чем $\pi/2$ ($\pi/2 < \delta < \pi$).*

Изобразим график изменения заряда со временем.

Свободные затухающие колебания в контуре.

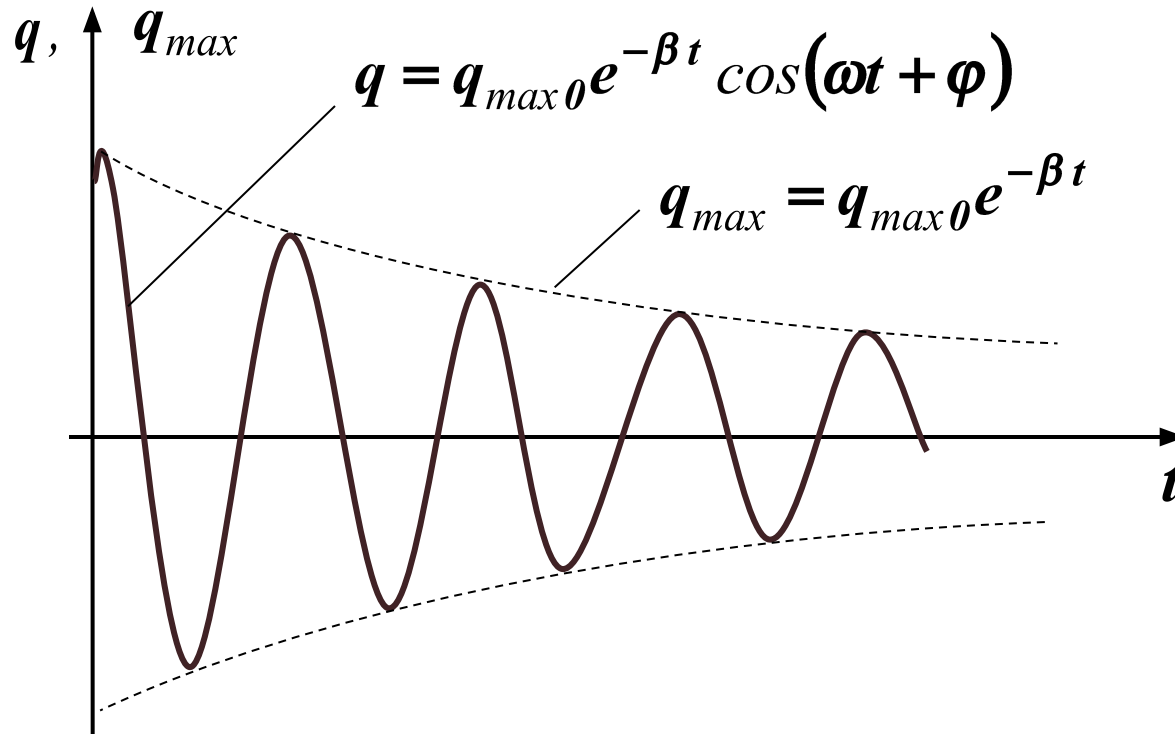


График подобен соответствующему графику для механических колебаний.

Свободные затухающие колебания в контуре.

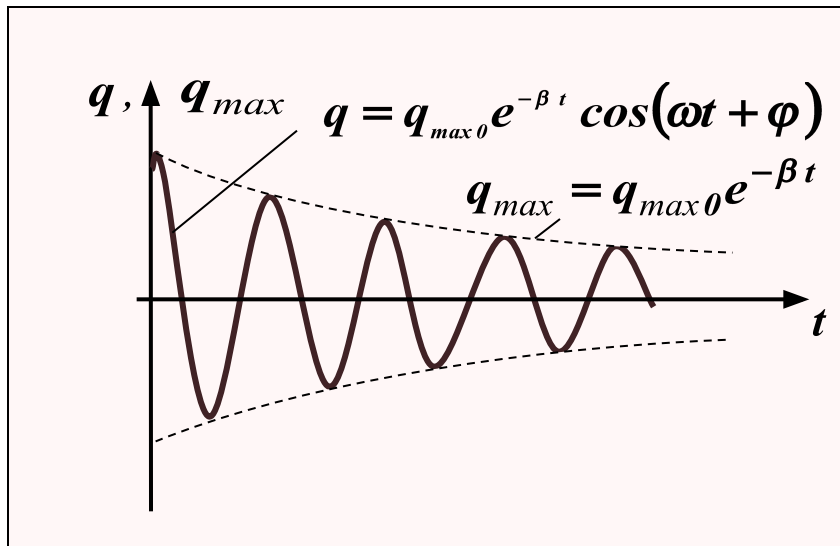
Для характеристики колебаний используют следующие параметры:

1. *Логарифмический декремент затухания.*

Если $A(t)$ и $A(t + T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, которые соответствуют моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\beta T}$$

называется *декремент затухания*.



Логарифм декремента затухания называется *логарифмическим декрементом затухания*

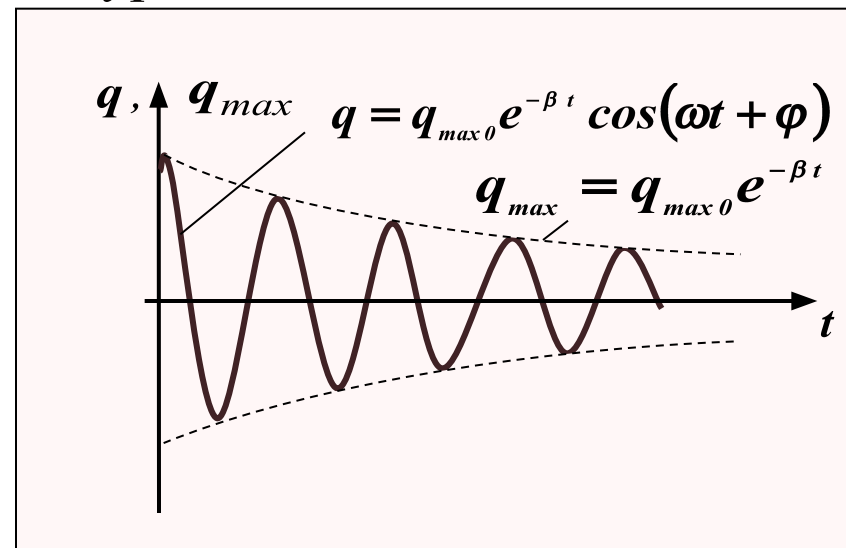
$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

Свободные затухающие колебания в контуре.

Если в выражение для $\lambda = \beta T$ подставить значения β и T , получим, что λ определяется параметрами контура, т.е. является его характеристикой:

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}$$



2. Добротность колебательной системы.

Для характеристики колебательной системы используется величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания.

При малых затуханиях $T \approx T_0$, следовательно, можно записать:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \approx \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Добротность колебательной системы пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых за время релаксации.

Добротность колебательного контура

определяется как величина обратно

пропорциональная λ (*Чем меньше затухание, тем выше добротность*)

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Время затухания – время за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$$

Число колебаний совершаемых за время затухания

$$\lambda = \frac{1}{N_e}$$

то

$$Q = \pi N_e$$

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

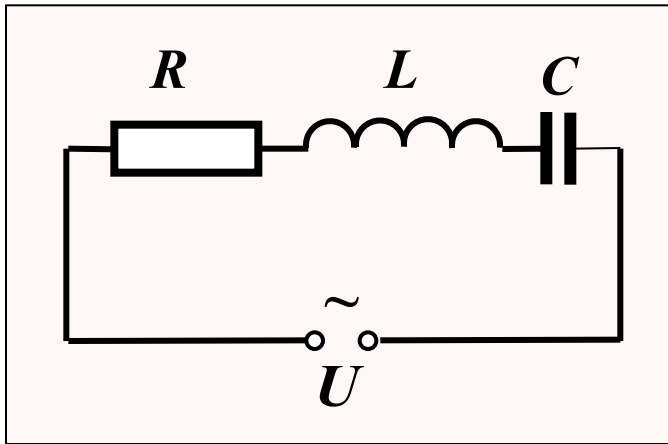
W – энергия контура в данный момент,

ΔW – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

4.4. Вынужденные колебания в контуре

Для компенсации потерь в колебательном контуре нужно оказывать на контур периодически изменяющееся воздействие.

Это можно осуществить, например, включив последовательно с элементами контура переменную ЭДС или, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение.



$$U = U_{max} \cos \omega t$$

Это напряжение нужно прибавить к ЭДС самоиндукции в исходной формуле для затухающих колебаний:

$$IR = -q/C - L(dI/dt) + U_{max} \cos \omega t$$

После преобразований получим уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_{max}}{L} \cos \omega t$$

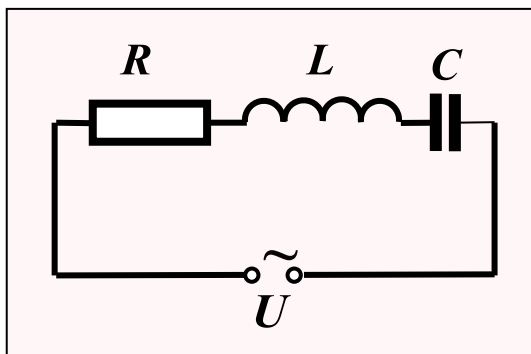
Вынужденные колебания в контуре.

Получили уже известное нам линейное неоднородное дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представим в виде его частного решения для установившихся колебаний. Это решение, как и для механических колебаний, имеет вид:

$$q = q_{max} \cos(\omega t + \psi)$$

где q_{max} - амплитуда заряда на конденсаторе; ψ (пси) – разность фаз между колебаниями заряда и внешней ЭДС.

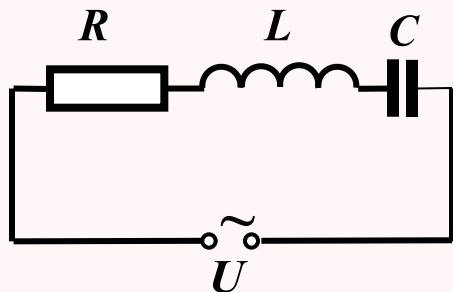


Выражения для q_{max} и ψ , как и для механических колебаний, запишем без вывода:

$$q_{max} = \frac{U_{max} / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\psi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Вынужденные колебания в контуре.



$$q_{max} = \frac{U_{max} / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\psi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

С использованием соотношений для постоянных величин q_{max} и ψ можно провести анализ параметров вынужденных колебаний в контуре.

Как и в случае затухающих свободных колебаний ограничимся лишь общими выводами о сдвиге фаз колебаний тока и напряжения на элементах контура:

а) напряжение на R изменяется в фазе с током;

б) напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на угол $\pi/2$;

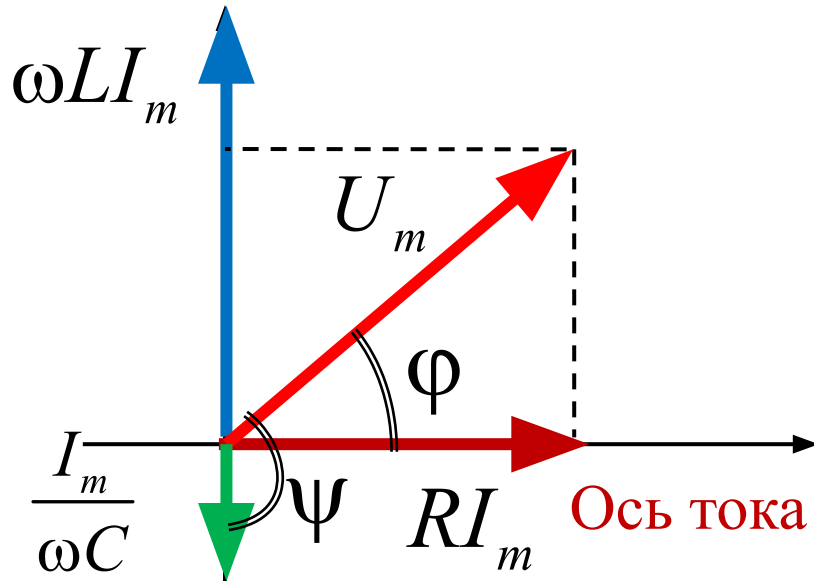
в) напряжение на емкости отстает по фазе от тока на угол $\pi/2$.

РАССМ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ №4.142) ПОСТРОИТЬ ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ!!! (разобрана в И.Е.ИРОДОВ № 11.10)

Векторная диаграмма вынужденных электрических колебаний

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t$$

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_{max}}{L} \cos \omega t$$



$$q = q_{max} \cos(\omega t + \psi)$$

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C} \quad U_{Rm} = RI_m$$

$$U_{Lm} = \omega LI_m$$

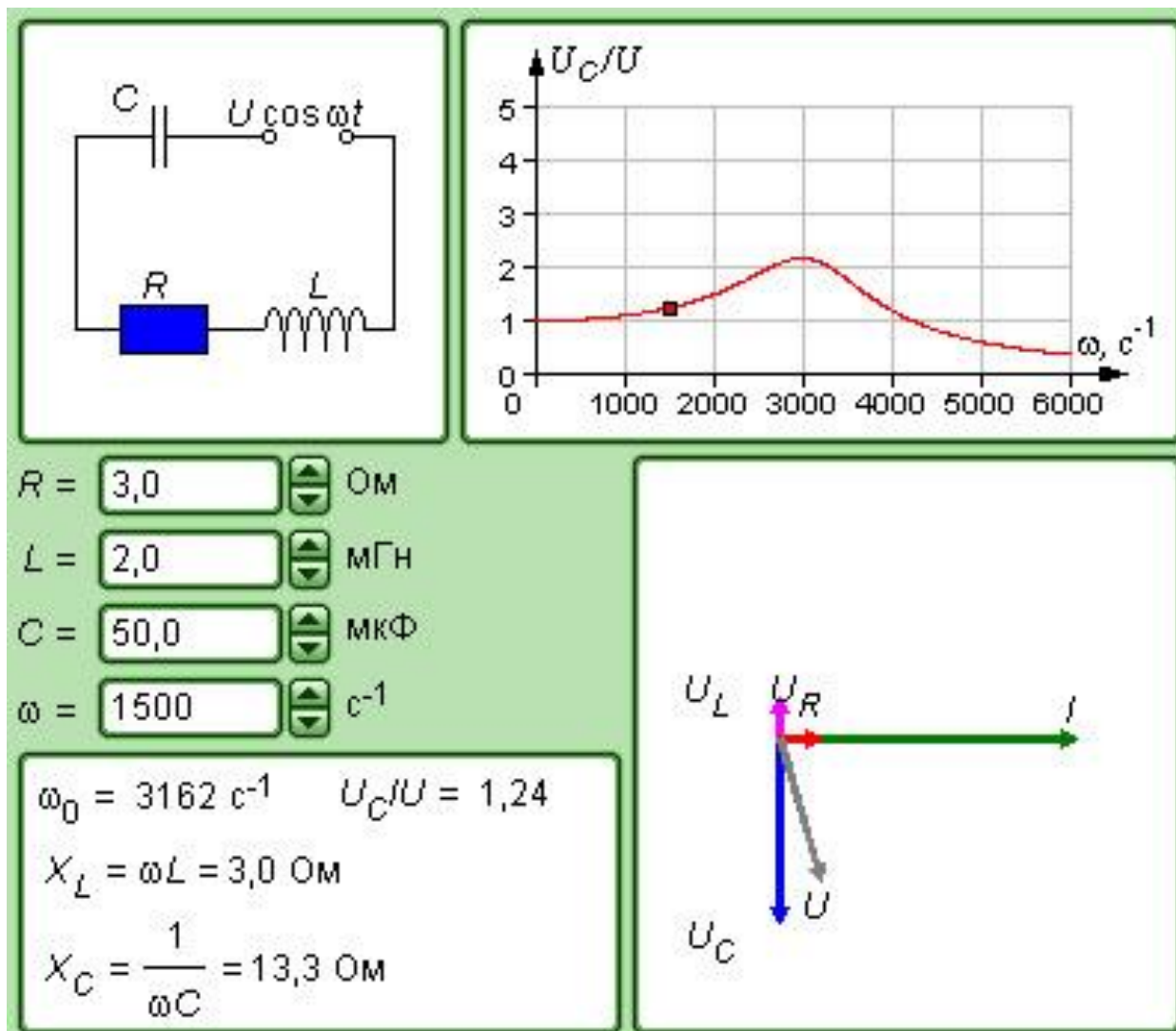
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (3.3.3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (3.3.4)$$

Модель. Вынужденные колебания в RLC-контуре

Программа обучения. «Открытая Физика 2.6.

Часть 2»: <http://www.physics.ru/courses/op25part2/design/index.htm>



Пояснения к модели. Вынужденные колебания в RLC -контуре

Вынужденные колебания всегда происходят на частоте ω внешнего источника. Если внешнее гармоническое напряжение включено в RLC -контур, то амплитуда вынужденных колебаний тока или напряжения на элементах цепи сильно зависит от соотношения между частотой ω генератора и собственной частотой ω_0 . При $\omega = \omega_0$ наступает резонанс. При резонансе амплитуды напряжений на конденсаторе (U_C) и катушке индуктивности (U_L) становятся максимальными. График зависимости отношения (U_C / U) или (U_L / U) называется **резонансной кривой**.

«Острота» резонансной кривой сильно зависит от энергетических потерь в контуре. При увеличении активного сопротивления контура резонансная кривая становится менее «острой».

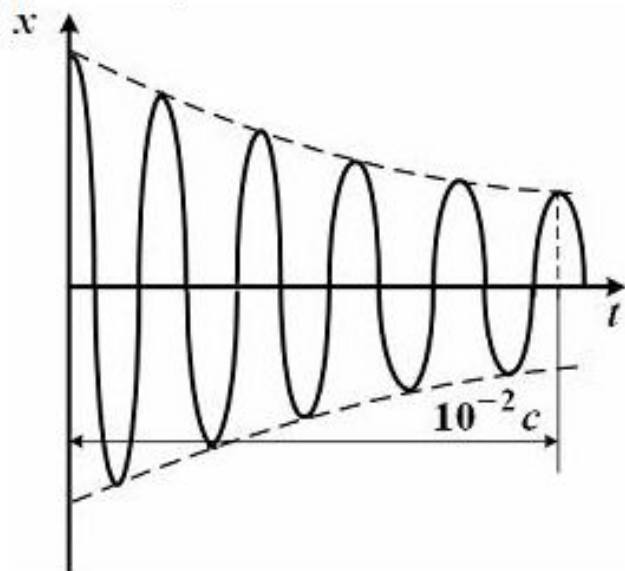
Между напряжением генератора и напряжением на конденсаторе имеется фазовый сдвиг, зависящий от соотношения между ω и ω_0 . При резонансе фазовый сдвиг равен $\pi / 2$.

Соотношения между амплитудами напряжений и токов и их фазами при вынужденных колебаниях удобно анализировать с помощью векторных диаграмм.

В компьютерной модели можно изменять параметры RLC -контура, а также частоту ω внешнего источника. При изменении параметров на дисплее высвечивается новая резонансная кривая, на которой точкой отмечается результат компьютерного эксперимента. Одновременно высвечивается векторная диаграмма, на которой с помощью векторов изображаются колебания тока и напряжений на элементах цепи.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

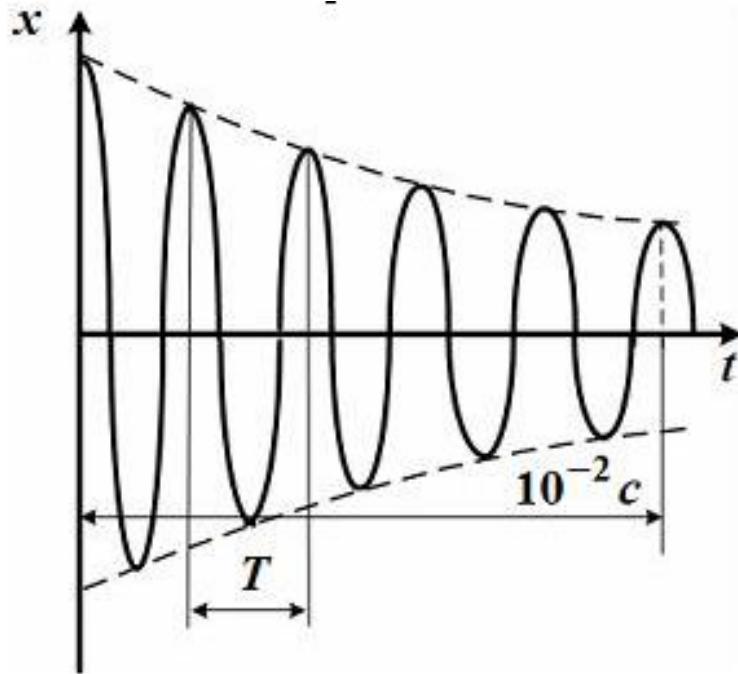
График зависимости координаты x материальной точки от времени t для затухающих колебаний имеет вид, показанный на рисунке:



Циклическая частота затухающих колебаний равна ...

- $2 \cdot 10^2 \pi \text{ c}^{-1}$
- $5 \cdot 10^2 \text{ c}^{-1}$
- 10^2 c^{-1}
- $10^3 \pi \text{ c}^{-1}$

Решение



Тогда период затухающих колебаний определяется формулой $T = \frac{2\pi}{\omega}$, где ω – циклическая частота затухающих колебаний. Из

графика видно, что за время $t = 10^{-2} \text{ c}$ тело совершает 5 полных

колебаний: $t = 5T$. Отсюда $T = \frac{t}{5} = \frac{10^{-2} \text{ c}}{5} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ c}$, а

циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-3} \text{ c}} = 10^3 \pi \text{ c}^{-1}$.

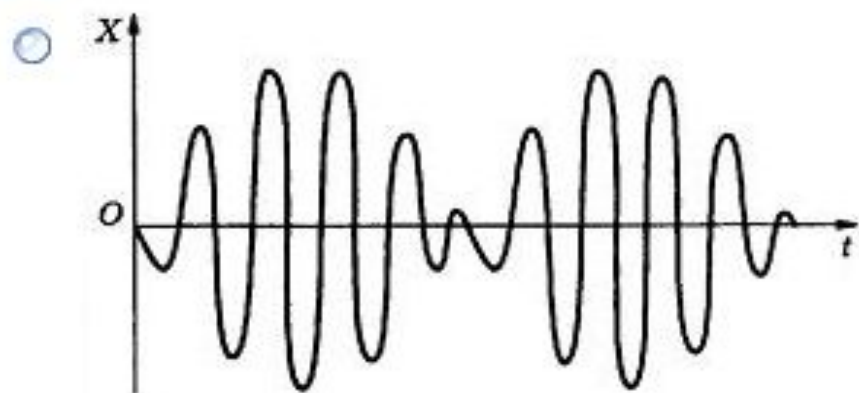
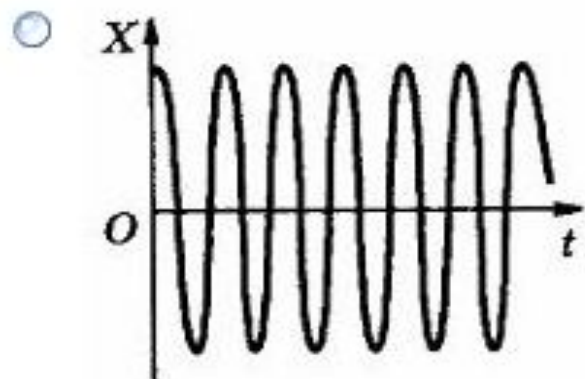
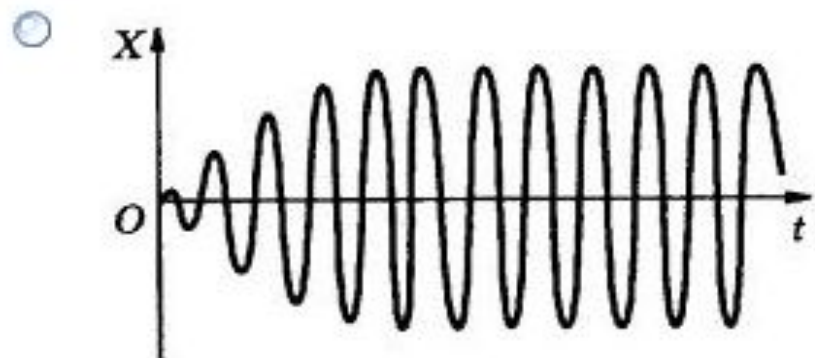
Циклическая частота затухающих колебаний равна $10^3 \pi \text{ c}^{-1}$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

Колебание материальной точки, возникающее под действием внешней периодически изменяющейся силы, происходит по закону:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t), \text{ где } \beta - \text{коэффициент затухания;}$$

ω_0 и ω – циклические частоты соответственно собственных и вынужденных колебаний; f_0 – амплитуда вынуждающей силы, отнесенная к массе тела. Зависимость смещения x материальной точки от времени имеет вид, показанный на рисунке ...



РЕШЕНИЕ

Уравнение вынужденных колебаний

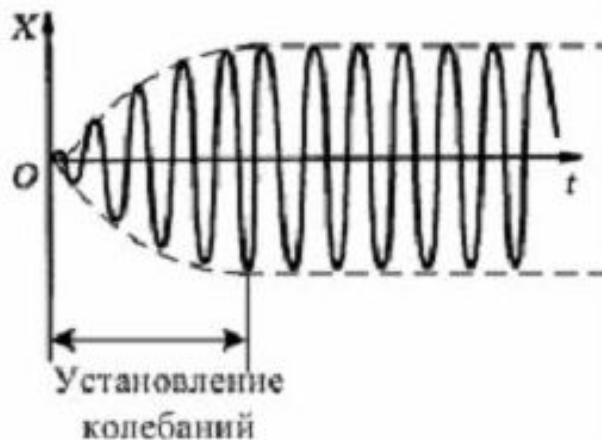
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) - \text{это линейное неоднородное}$$

дифференциальное уравнение, решение которого равно сумме общего решения однородного уравнения

$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и частного решения неоднородного уравнения $x = A \cos(\omega t - \varphi_0)$. Общее решение играет

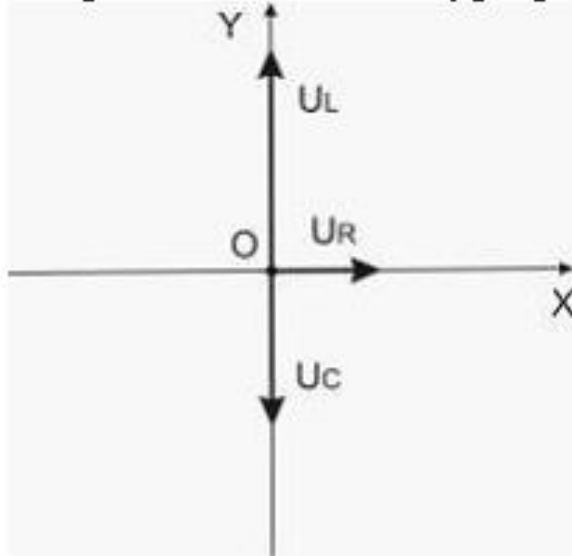
существенную роль только в начальной стадии процесса установления гармонических колебаний с частотой ω

вынуждающей силы (см. рис.). Из графика видно, что амплитуда вынужденных колебаний постепенно нарастает, и затем устанавливается гармоническое колебание с частотой вынуждающей силы:

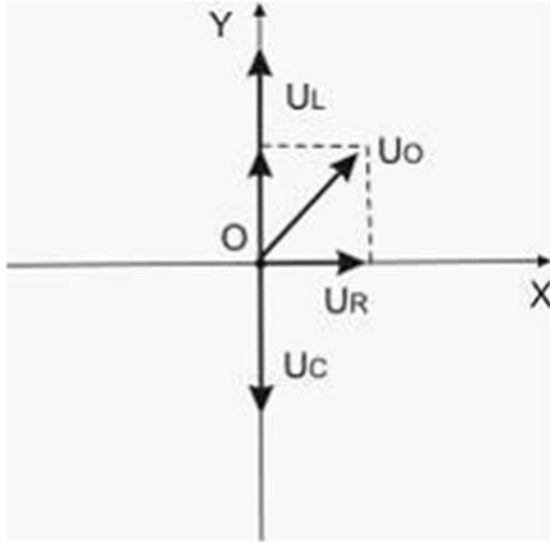


Задание из экзаменационного теста

Резистор, катушка индуктивности и конденсатор соединены последовательно и подключены к источнику переменного тока, изменяющегося по закону $I = 0,1 \cos(3,14t)$ (А). На рисунке представлена фазовая диаграмма падений напряжений на указанных элементах. Амплитудные значения напряжений соответственно равны: на резисторе $U_R = 1B$; на катушке индуктивности $U_L = 3B$; на конденсаторе $U_C = 2B$. При этом полное сопротивление контура равно ...



Решение



Используем метод векторных диаграмм. Длина вектора равна амплитудному значению напряжения, а угол, который вектор составляет с осью OX , равен фазе колебания напряжения на соответствующем элементе. Сложив три вектора, найдем амплитудное значение полного напряжения: $\vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C = \vec{U}_0$

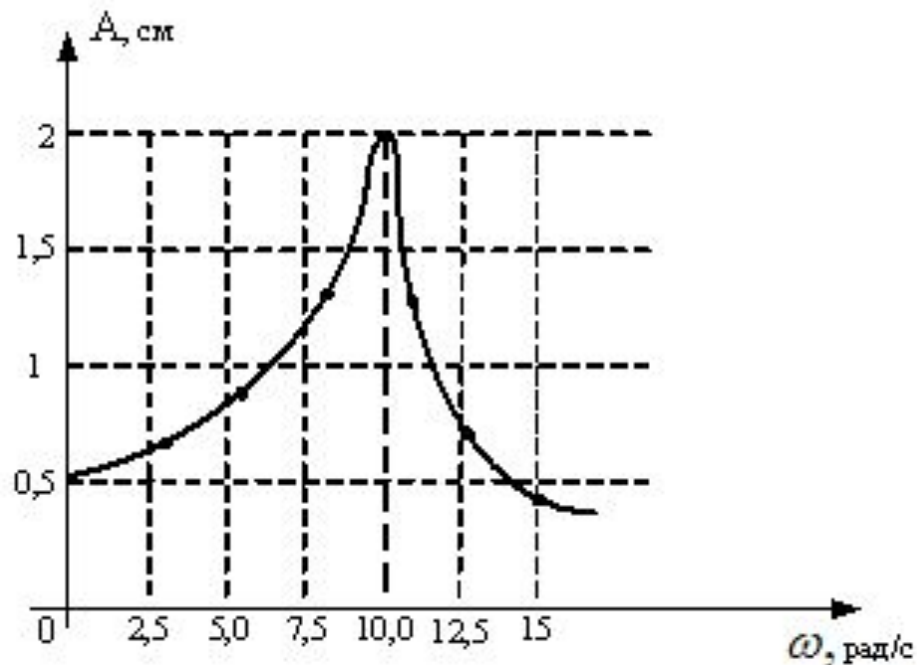
Величина $U_0 = \sqrt{2} \cdot U_R = 1,4 \text{ В}$. Полное сопротивление контура найдем по закону Ома: $Z = \frac{U_0}{I_0}$, где U_0, I_0 – амплитудные

значения напряжения и силы тока. Амплитудное значение силы тока указано в законе изменения силы тока и равно $0,1 \text{ А}$.

$$Z = \frac{1,4}{0,1} = 14 \text{ Ом.}$$

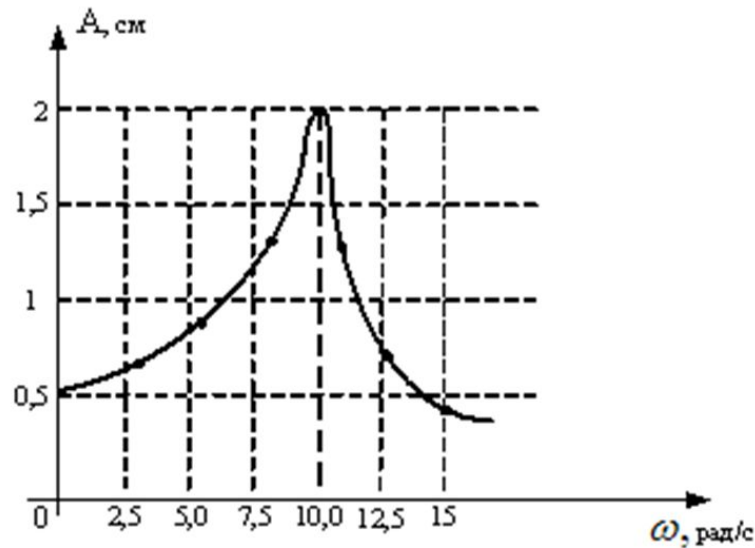
ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

На рисунке представлена зависимость амплитуды вынужденных колебаний груза массой 1 кг на пружине от частоты вынуждающей силы при слабом затухании.



Коэффициент жесткости пружины в $\frac{H}{M}$ равен ...

Решение



На графике представлена резонансная кривая. Если частота вынуждающей силы равна резонансной частоте, амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. При слабом затухании резонансная частота практически равна собственной частоте колебаний пружинного маятника

$$\omega_{рез} \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \text{ Следовательно, } k = \omega_{рез}^2 \cdot m = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

Маятник совершает вынужденные колебания со слабым коэффициентом затухания $\beta < \omega_0$, которые подчиняются

дифференциальному уравнению $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 400x = 0,1\cos 100t$.

Амплитуда колебаний будет максимальна, если частоту вынуждающей силы ...

- увеличить в 4 раза
- уменьшить в 4 раза
- уменьшить в 5 раз
- увеличить в 5 раз

Решение

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \text{ где } \beta - \text{коэффициент затухания,}$$

ω_0 – собственная круговая частота колебаний; f_0 – амплитудное значение вынуждающей силы, делённое на массу; ω – частота вынуждающей силы. При слабом коэффициенте затухания ($\beta < \omega_0$)

амплитуда колебаний будет максимальна, если частота вынуждающей силы совпадет с собственной частотой колебаний маятника (явление резонанса). Собственная частота колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{400} = 20 \text{ с}^{-1}, \text{ частота вынуждающей силы - } \omega = 100 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, частоту вынуждающей силы необходимо уменьшить в 5 раз.

Колебания

механические		электромагнитные	
Дифференциальное уравнение	$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ $m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	Дифференциальное уравнение	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ $L\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$
Масса	m	Индуктивность катушки	L
Коэффициент жесткости	k	Обратная величина емкости	$\frac{1}{C}$
Смещение	$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$	Заряд	$q = q_m \sin(\omega t + \varphi)$
Скорость	$v = dx / dt$	Сила тока	$I = dq / dt$
Потенциальная энергия	$W = \frac{kx^2}{2}$	Энергия электрич. поля	$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля	$K = \frac{LI^2}{2}$

Собств. частота пружинного маятника	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Собств. частота колебательного контура	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Период колебаний	$T = 2\pi\sqrt{m/k}$	Период колеб. Формула Томсона	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
Циклич. частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклич. частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
Коэффициент затухания	$\beta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания	$\beta = \frac{R}{2L}$
Логарифмич. декремент затухания	$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$	Логарифмич. декремент затухания	$\lambda = \beta T R = \sqrt{\frac{C}{L}}$
Добротность пружинного маятника	$Q = \frac{\pi}{\chi} = \frac{1}{r} \sqrt{km}$	Добротность колебательного контура	$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Резонансная частота	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$	Резонансная частота	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$