



Тема 4. Теплопроводность

Лекции 16, 17





§ 4. Нестационарная теплопроводность

Процесс теплопроводности в неограниченной пластине описывается уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, -$$

одномерное дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности при не зависящем от температуры λ и отсутствии внутренних источников теплоты.

В качестве начальных условий принимаем равномерное распределение температуры в начальный момент времени. В качестве граничных условий рассмотрим граничные условия III рода.



Для решения дифференциального уравнения воспользуемся методом разделения переменных:

$$T(x, t) = \Phi(x) \cdot \Pi(t).$$

$$\Phi \cdot \frac{d\Pi}{dt} = a \cdot \Pi \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{a \cdot \Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a \cdot \Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dt} = -k^2, \\ \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2} = -k^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Pi(t) = C_1 \cdot \exp(-a \cdot k^2 \cdot t), \\ \Phi(x) = C_2 \cdot \cos(k \cdot x) + C_3 \cdot \sin(k \cdot x). \end{cases} \Rightarrow$$

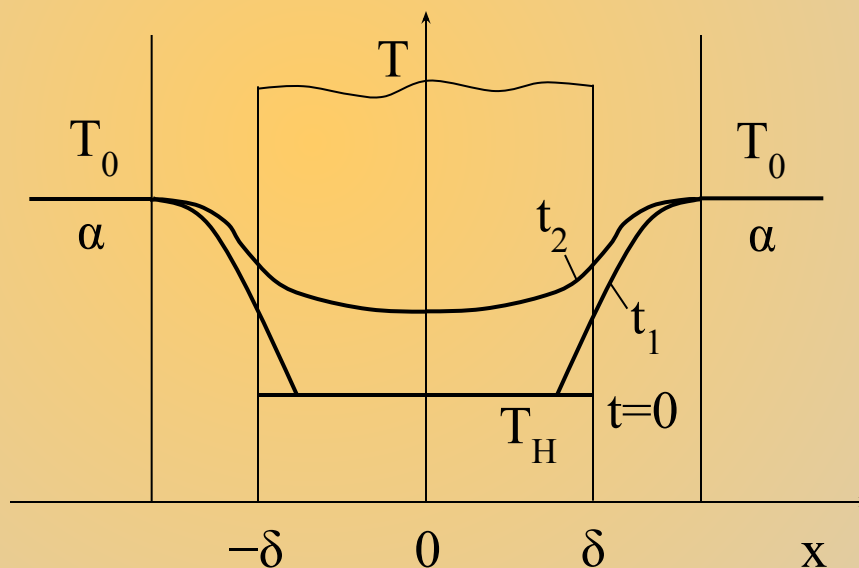
$$\Rightarrow T(x, t) = \exp(-a \cdot k^2 \cdot t) \cdot [C \cdot \cos(k \cdot x) + D \cdot \sin(k \cdot x)],$$

где $C = C_1 \cdot C_2$, $D = C_1 \cdot C_3$.

Константы C , D и k определим из краевых условий.

1) считаем, что нагрев (или охлаждение) пластины происходит из-за конвективной теплоотдачи от окружающей среды с постоянной температурой T_0 ;

2) рассматриваем осесимметричную задачу, то есть граничные условия на обеих поверхностях пластины считаем одинаковыми.



Функция $\sin(k \cdot x)$ является нечетной, следовательно, для симметричной задачи константа $D = 0$.



Решение принимает вид:

$$T(x, t) = C \cdot \exp(-k^2 \cdot a \cdot t) \cdot \cos(k \cdot x).$$



Краевые условия:

$$T(x, 0) = T_H,$$

$$\boxtimes \alpha \cdot [T_0 - T(\pm \delta, t)] = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\pm \delta}.$$



Введем новую переменную – избыточную температуру:

$$\vartheta(x, t) = T_0 - T(x, t).$$



Для этой переменной формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$



Краевые условия:

$$\vartheta(x, 0) = T_0 - T_H = \vartheta_H,$$

$$\alpha \cdot \vartheta(\pm \delta, t) = \lambda \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\pm \delta}.$$

Знак в правой части граничного условия изменился
в связи с тем, что

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = - \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Решение имеет тот же вид, так как уравнение
теплопроводности имеет тот же вид:

$$\vartheta(x, t) = C \cdot \exp(-k^2 \cdot a \cdot t) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot$$





Подставим решение в граничное условие,
например, при $x = -\delta$:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot C \cdot \exp(-k^2 \cdot a \cdot t) \cdot \cos(k \cdot \delta) &= \\ = \lambda \cdot C \cdot k \cdot \exp(-k^2 \cdot a \cdot t) \cdot \sin(k \cdot \delta) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{ctg}(k \cdot \delta) &= \frac{k \cdot \lambda}{\alpha} = \frac{k \cdot \delta}{\frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Обозначим произведение $k \cdot \delta = \mu$ и назовем
эту величину **характеристическим числом**.

$$\frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda} = \operatorname{Bi} - \text{критерий Био.}$$





Жан Батист Био (1774–1862) – французский физик, геодезист и астроном. Его первые работы были посвящены исследованию свойств газов. В 1811 г. открыл поляризацию света при преломлении, в 1815 – круговую поляризацию и установил закон вращения плоскости поляризации (закон Био), существование право- и левовращающих веществ. В 1820 г. совместно с Феликсом Саваром открыл закон, определяющий напряженность магнитного поля проводника с током (закон Био-Савара). Био – автор широко известного «Курса общей физики» (1816). Его идеи о нематериальности теплоты, работы по теплопроводности, обработка математическим путем опытов над тепловым расширением тел и многое другое показывают, как он стремился все части современной ему физики усвоить и оформить до такой степени, что читателю кажется, будто они являются его оригинальными открытиями.





Имеем трансцендентное характеристическое уравнение, которое можно решить графически:

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{Bi}.$$

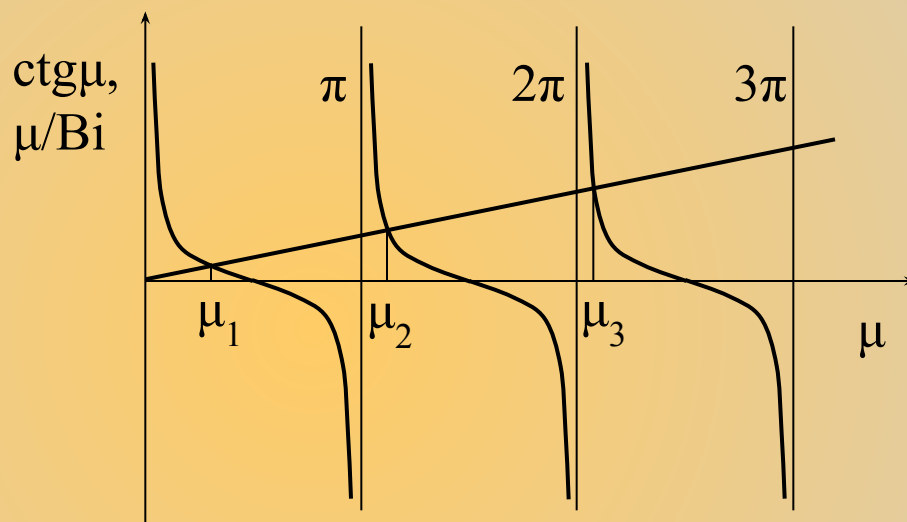


График левой части уравнения представляет собой котангенсоиду, являющуюся периодической функцией аргумента μ с периодом π , а график правой части – прямую с угловым коэффициентом $1/Bi$. Абсциссы точек пересечения этих графиков дают корни характеристического уравнения.





Характеристическое уравнение имеет бесчисленное множество корней.

В связи с линейностью дифференциального уравнения теплопроводности его общее решение является суммой его частных решений:

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot \frac{a \cdot t}{\delta^2}\right) \cdot \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right).$$

Стоящая в показателе экспоненты величина $\frac{a \cdot t}{\delta^2} = Fo$ – критерий Фурье, безразмерное время.

Неизвестные величины C_n определим из начального условия.

При $Fo=0$

$$\vartheta_H = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right).$$



Умножим обе части равенства на $\cos\left(\mu_m \cdot \frac{x}{\delta}\right)$ и проинтегрируем по x в пределах толщины пластины.

Меняя порядок интегрирования и суммирования (ввиду линейности этих операций) получим выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_H \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_m \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_m \cdot \frac{x}{\delta}\right) \cdot \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx = \\ &= C_n \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx, \end{aligned}$$

поскольку $\cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right)$ и $\cos\left(\mu_m \cdot \frac{x}{\delta}\right)$ являются ортогональными функциями, как это следует из характеристического уравнения. То есть их произведение обращается в нуль, кроме случая, когда $m = n$.





Учитывая, что $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$, получим:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx = 2 \cdot \int_0^{\delta} \cos\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right) dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right) \Big|_0^{\delta} = 2 \cdot \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \sin \mu_n.$$

Учтем также, что $\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$
и $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$.

Тогда $\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx = \int_0^{\delta} 2 \cdot \cos^2\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\delta}\right) dx =$

$$= \left[x + \frac{\delta}{2 \cdot \mu_n} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right) \right]_0^{\delta} = \left[x + \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot x\right) \right]_0^{\delta} =$$
$$= \delta + \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n = \frac{\delta}{\mu_n} \cdot \left(\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n \right).$$



Итак, получаем

$$C_n = \frac{2 \cdot \vartheta_H \cdot \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n},$$

и решение принимает окончательный вид:

$$\vartheta = \vartheta_H \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \vartheta_H \cdot \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n} \cdot \cos(\mu_n \cdot X) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo),$$

где $X = \frac{x}{\delta}$ – безразмерная координата.

Таким образом, безразмерная избыточная температура

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_H} = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_H} = f(Bi, Fo, X),$$

где Bi – параметр задачи,

Fo и X – безразмерные независимые переменные.





Рассмотрим, к чему сводится полученное решение при $V_i \rightarrow 0$.

При этом угловой коэффициент $1/V_i$ прямой на рисунке графического решения характеристического уравнения (слайд 9) $\rightarrow \infty$ и прямая совпадает с осью ординат.



μ_n принимает следующий ряд значений: $0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$. Все коэффициенты C_n , кроме первого, обращаются в нуль, а для первого получается неопределенность типа нуль, деленный на нуль, которую необходимо раскрыть.



Обозначим через $D_n = \frac{2 \cdot \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n} \sim C_n$.

Раскроем с помощью предельного перехода неопределенность для D_1 при $\mu_1 = 0$:



$$\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} D_1 = \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cdot \cos \mu_1} = \frac{2 \cdot \mu_1}{\mu_1 + \mu_1 \cdot 1} = 1.$$



Решение для рассматриваемого случая сводится к следующему:

$$\theta = \cos(\mu_1 \cdot X) \cdot \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo).$$



Определим конкретный вид связи между μ_1 и Bi . При $\mu_1 \rightarrow 0$ $\sin \mu_1 \approx \mu_1$, $\operatorname{tg} \mu_1 \approx \mu_1$, $\operatorname{ctg} \mu_1 \approx 1/\mu_1$. Следовательно, характеристическое уравнение принимает вид:

$$1/\mu_1 = \mu_1/Bi \Rightarrow \mu_1 = \sqrt{Bi},$$

а $\lim_{Bi \rightarrow 0} (\cos(\sqrt{Bi} \cdot X)) \rightarrow 1$, так как $0 \leq X \leq 1$.

Окончательно получим:

$$\theta = \exp(-Bi \cdot Fo).$$





Рассмотрим нестационарную теплопроводность при граничных условиях I рода для неограниченной пластины. Считаем, что на границах пластины происходит конвективная теплоотдача.



При конечных значениях величины полутолщины пластины δ и коэффициента теплопроводности λ случай $Bi \rightarrow \infty$ означает $\alpha \rightarrow \infty$. Из-за интенсивной теплоотдачи разность температуры между средой и поверхностью объекта $T_0 - T_w = q / \alpha \rightarrow 0$ (так как плотность теплового потока q – величина постоянная).



Формулировка задачи:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2};$$

начальное условие: $\vartheta(x, 0) = \vartheta_H$,

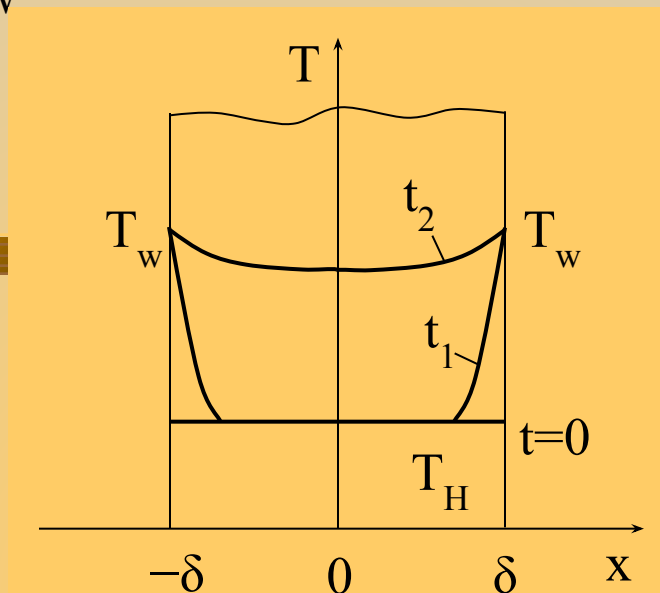
граничное условие: $\vartheta(\pm\delta, t) = 0$,

где $\vartheta = T_w - T$ – текущая избыточная температура,
 $\vartheta_H = T_w - T_H$ – начальная избыточная температура.





Считаем, что T_w не изменяется:



Характеристическое уравнение $\text{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n}{\text{Bi}}$ при $\text{Bi} \rightarrow \infty$ принимает вид $\text{ctg} \mu_n = 0$, то есть прямая на рисунке графического решения характеристического уравнения совпадает с осью абсцисс.

Корни характеристического уравнения составляют следующий ряд значений: $\frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2}, \frac{5 \cdot \pi}{2} \dots$

При этом $\sin \mu_n = -1$ при четных n , т.е. $\sin \mu_n = (-1)^{n+1}$, а $\cos \mu_n = 0$.



Выражение для безразмерной избыточной температуры

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_H} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n} \cdot \cos(\mu_n \cdot X) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo)$$

(решение задачи нестационарной теплопроводности при граничных условиях III рода, см. слайд 13) принимает вид:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{\mu_n} \cdot \cos(\mu_n \cdot X) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo).$$

В данном случае относительная избыточная температура определяется как функция числа Фурье и безразмерной координаты $\theta = f(Fo, X)$.

Число Био не является параметром задачи, так как лимитирующим звеном в процессе теплообмена является внутренний теплообмен.





§ 5. Регулярный тепловой режим



В переходных процессах нестационарной теплопроводности, когда температура в каждой точке тела изменяется от одного установившегося значения до другого, можно выделить три характерных режима:

- **неупорядоченный**, при котором начальное распределение температуры оказывает заметное влияние на развитие процесса;
- **регулярный**, когда влияние начального распределения температуры исчезает;
- **стационарный**, при котором температура во всех точках тела становится равной температуре окружающей среды.



Ряд решения задачи нестационарной теплопроводности из § 17 быстро сходится.



Во-первых, каждое следующее характеристическое число больше предыдущего, $\mu_k > \mu_{k+1}$, и μ_n стоит в квадрате в отрицательном показателе экспоненты.



Во-вторых, поскольку критерий Фурье тоже стоит в отрицательном показателе экспоненты, ряд сходится тем быстрее, чем больше времени прошло с начала процесса. Практически уже при $Fo \geq 0,3$ сумма ряда равна его первому слагаемому:

$$\theta = \frac{2 \cdot \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cdot \cos \mu_1} \cdot \cos(\mu_1 \cdot X) \cdot \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo),$$



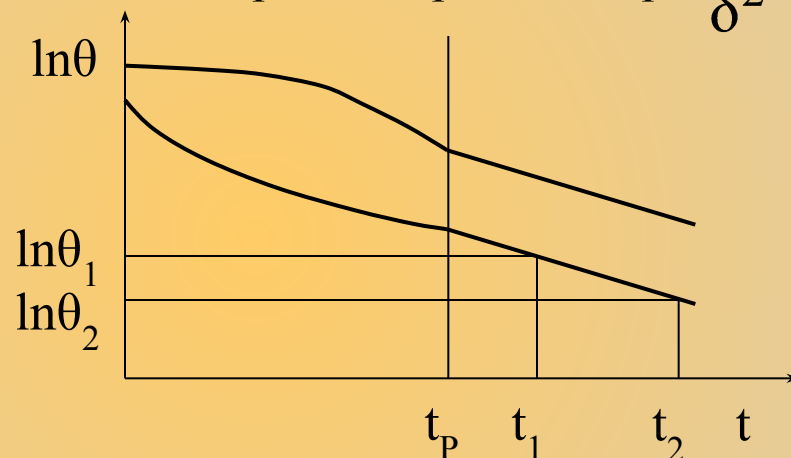
где $\mu_1 = f(Bi)$, $0 \leq \mu_1 \leq \frac{\pi}{2}$.



Обозначим $D_1 = \frac{2 \cdot \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cdot \cos \mu_1}$

и прологарифмируем последнее выражение:

$$\ln \theta = \ln [D_1 \cdot \cos(\mu_1 \cdot X)] - \mu_1^2 \cdot \frac{a \cdot t}{\delta^2}.$$



t_p – время наступления регулярного режима.

$m = \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{t_2 - t_1}$ – темп охлаждения (нагрева), постоянная скорость изменения $\ln \theta$, с^{-1} .

Очевидно, что $m = \mu_1^2 \cdot \frac{a}{\delta^2}$.





Для граничных условий I рода при $Fo \geq 0,3$ $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$.

Величина $m_\infty = \frac{\pi^2 \cdot a}{4 \cdot \delta^2}$ называется темпом нагрева (охлаждения) при граничных условиях I рода. Итак, в этом случае темп нагрева пропорционален коэффициенту температуропроводности:

$$m_\infty = k \cdot a ,$$

где $k = \frac{\pi^2}{4 \cdot \delta^2}$ – коэффициент формы для плоской пластины.

Таким образом, при граничных условиях I рода темп нагрева не зависит от критерия Био, поскольку нагрев (охлаждение) тела лимитируется только внутренним теплообменом.





Закономерности регулярного теплового режима используют для экспериментального определения теплофизических свойств различных материалов и коэффициента теплоотдачи.



Для этого необходимо снять кривую изменения температуры в какой-либо точке тела и, представив ее в координатах $\ln\theta-t$, найти тангенс угла наклона прямолинейного отрезка зависимости к оси времени.



Теперь, зная форму и размер тела, можно найти $a = \frac{m_\infty}{k}$. Тогда коэффициент теплопроводности $\lambda = a \cdot \rho \cdot c$.



Затем, уменьшив интенсивность внешнего теплопереноса, надо организовать теплообмен с граничными условиями III рода, и найти m , зависящий в данном случае от μ_1 и Bi .

Наконец, находят коэффициент теплоотдачи: $\alpha = \frac{Bi \cdot \lambda}{\delta}$