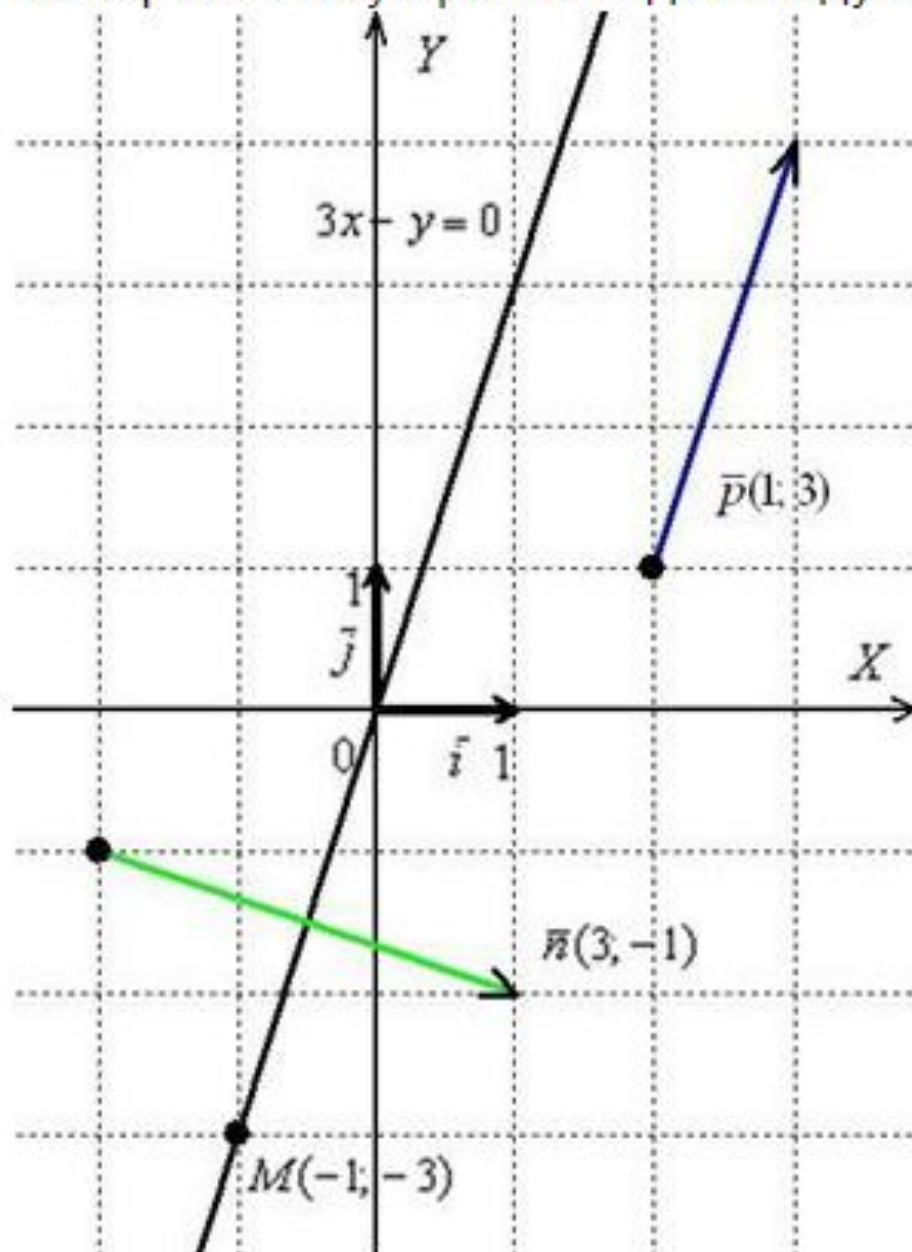


**Лекция 13**

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В  
ПРОСТРАНСТВЕ**

**§1. ПЛОСКОСТЬ**

На чертеже ситуация выглядит следующим образом:



Построение прямой на плоскости по точке  $M(-1; -3)$  и вектору, перпендикулярному этой прямой  $n(3; -1)$

Аналогично строится плоскость по точке, через которую эта плоскость проходит, и нормальному к ней вектору.

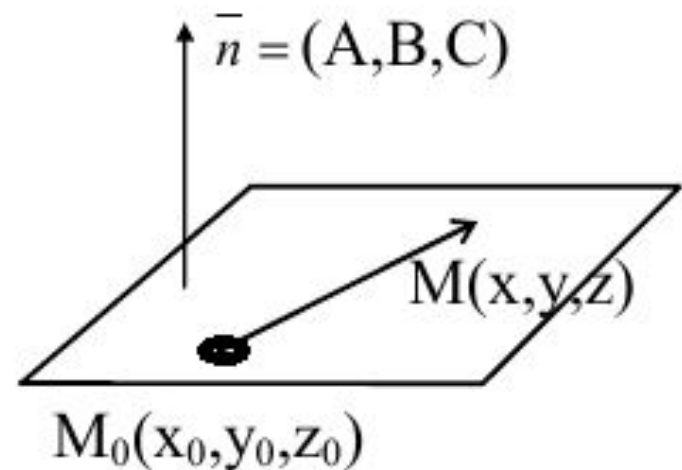
Когда плоскость  $P$  зафиксирована нормальным вектором  $n = (A, B, C)$  и точкой  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in R^3$  (рис.1), то в результате получаем уравнение  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Или  $Ax + By + Cz + D = 0$

Это уравнение называют *общим уравнением плоскости*.

Исследуем его

1. Если  $D=0$ , то  $Ax + By + Cz = 0$  и  $O(0,0) \in P$
2. Если  $A=0$ , то  $n = (0, B, C) \perp P$  и  $P \parallel (Ox)$ .
3. Если  $A=0, D=0$ , то (комбинируем 1 и 2)  $Ox \subset P$ .
4. Если  $A=0, B=0$ ,  
то  $n = (0, 0, C) \perp P$  и  $P \parallel xOy$ .
5. Если  $A=0, B=0, D=0$ ,  
то (комбинируем 1 и 4)  $P \equiv xOy$ .



Пусть теперь плоскость  $P$  отсекает от осей координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , отрезки соответственно  $a, b, c$ , т.е. проходит через точки  $M_1(a, 0, 0)$ ,  $M_2(0, b, 0)$ ,  $M_3(0, 0, c)$

Поскольку при этом  $D \neq 0$  ( $O(0, 0, 0) \notin P$ ), то после деления обеих частей уравнения на  $D$ , имеем

$$\frac{x}{-A/D} + \frac{y}{-B/D} + \frac{z}{-C/D} = 1$$

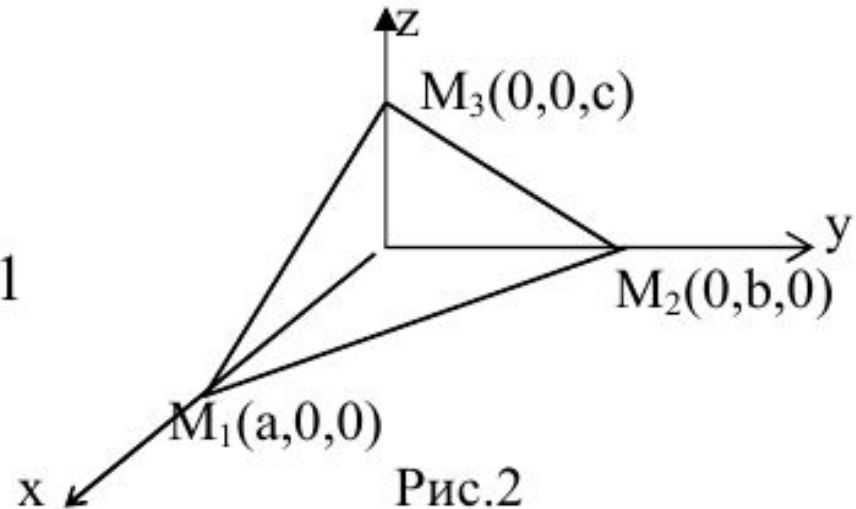
Так как  $M_1(a, 0, 0) \in P$ , то  $\frac{a}{-A/D} = 1$

откуда  $a = -\frac{A}{D}$

Аналогично  $b = -\frac{B}{D}$  и  $c = -\frac{C}{D}$ ,

в результате чего получаем **уравнение в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Пример 1. Составить уравнение плоскости  $P$ , проходящей через точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ .

Решение. Пусть  $M(x, y, z)$ -произвольная точка  $P$ . Построим векторы

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

То, что точка  $M$  лежит на  $P$ , равнозначно компланарности построенных векторов. Используя условие компланарности трех векторов, имеем искомое уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример 2. Найти расстояние  $d$  от точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  до плоскости  $P$ , уравнение которой имеет вид  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

Решение. Рассуждая также, как в случае о расстоянии от точки до прямой на плоскости, и используя рис.3, находим

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

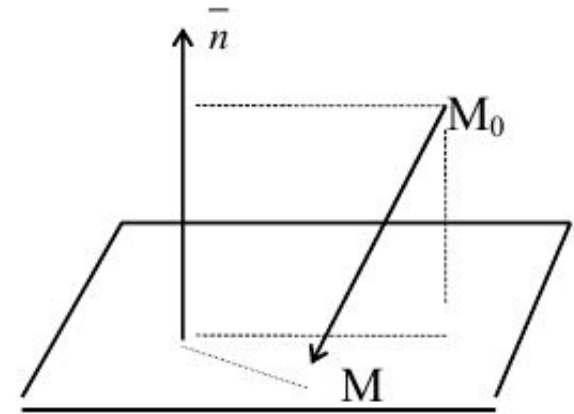


Рис.3

Пример 3. Найти угол между двумя плоскостями.

Решение. Пусть уравнения этих плоскостей имеют вид для  $P_1$  и  $P_2$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Очевидно, что  $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \perp P_1$ ,  $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp P_2$ . Учитывая,

что  $\varphi = (P_1, P_2) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ , а также  $\cos \varphi = \frac{\bar{n}_1, \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| |\bar{n}_2|}$ , получаем

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

## §2. ПРЯМАЯ В $\mathbb{R}^3$ .

Прямую в пространстве можно задать, как пересечение двух плоскостей, т.е. с помощью СЛАУ-2

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

при условии, что вектор  $(A_1, B_1, C_1)$  не параллелен вектору  $(A_2, B_2, C_2)$ .

Естественно, ту же прямую можно задать и другой парой плоскостей. Такие уравнения называются *общими*.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

*-уравнение прямой, проходящей через две точки.* Двойное равенство можно понимать и так

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \\ \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \end{cases},$$



откуда 
$$\begin{cases} bx - ay + (y_0 a - x_0 b) = 0, \\ cx - az + (z_0 a - x_0 c) = 0. \end{cases}$$

Каждое из уравнений есть уравнение плоскости, параллельной соответственно координатным осям Oz и Oy. Таким образом, оба уравнения определяют прямую в пространстве как пересечение двух плоскостей, параллельных координатным осям.

## §4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Определение.** *Сфера* - множество точек в  $R^3$ , равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Если  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ -центр сферы,  $M(x, y, z)$ -её переменная точка,  $M_0M=R$ , то из соотношения  $(M_0M)^2=R^2$ , получаем *каноническое уравнение сферы*

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Если центром сферы является точка  $M_0(0, 0, 0)$ , то  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  - *простейшее каноническое уравнение сферы.*

**Определение.** *Эллипсоид* - это поверхность с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где  $a, b, c$ - полуоси эллипсоида. Рассмотрим пересечение эллипсоида плоскостями  $Z=h$ , т.е.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ Z = h, \end{cases}$$

отсюда

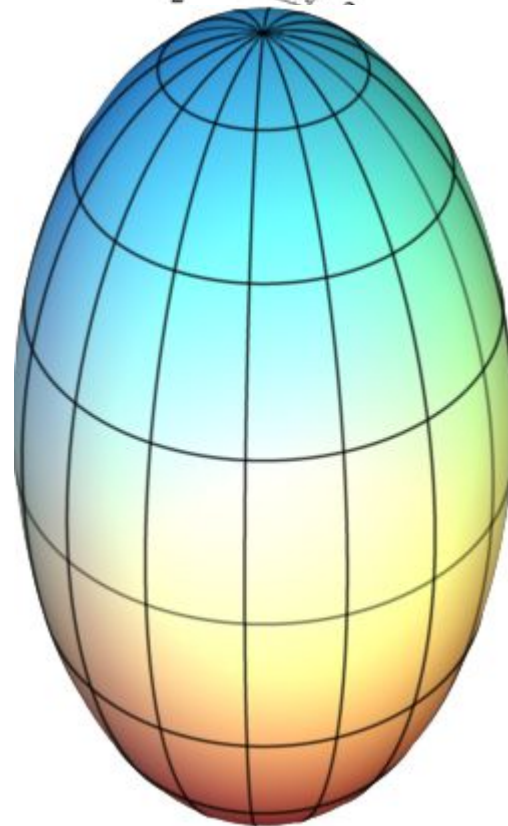
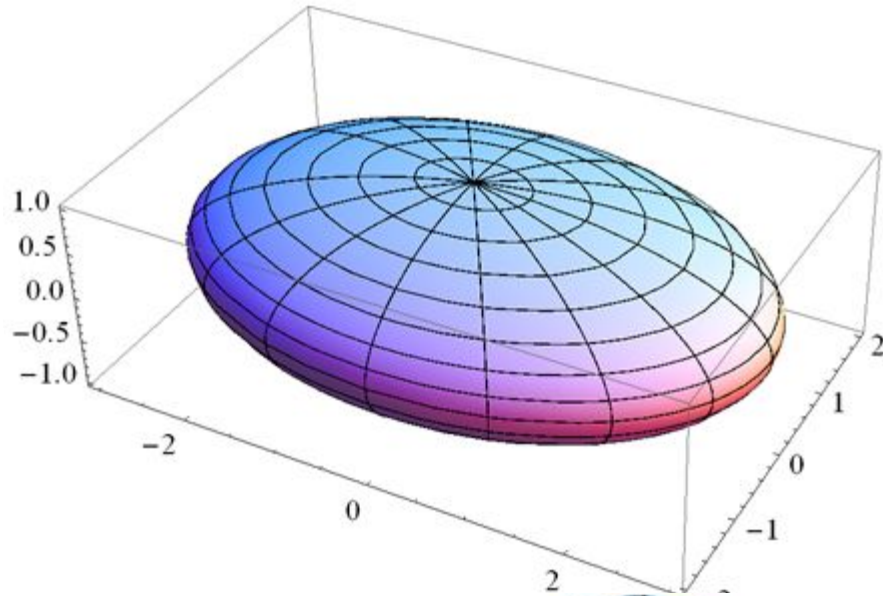
$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1,$$

где

$$a^* = a \sqrt{1 - h^2 / c^2}, \quad b^* = b \sqrt{1 - h^2 / c^2}$$

Если  $h < c$ , то последние выражения - это уравнения эллипсов, которые при  $h = c$  вырождаются в точки.

При  $h > c$  плоскость не пересекает поверхности (получаем мнимые эллипсы).



- *Однополосный гиперболоид* (рис.6)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

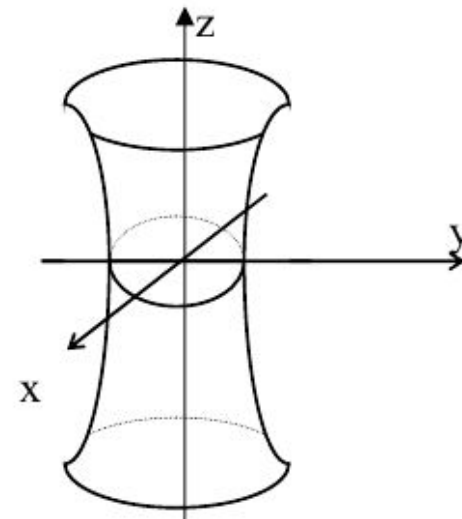


Рис. 6

- *Двухполостный гиперболоид* (рис.7)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

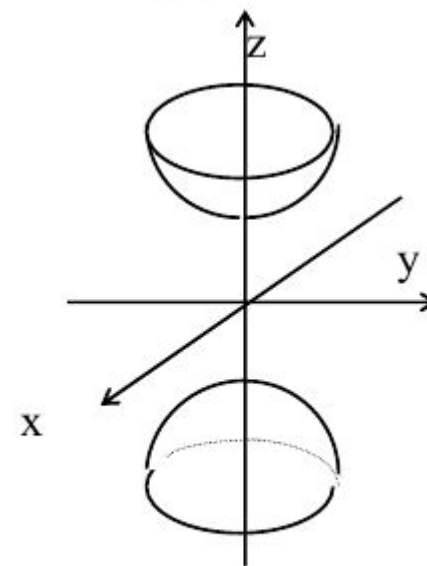


Рис. 7

- *Эллиптический параболоид* (рис.8)

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

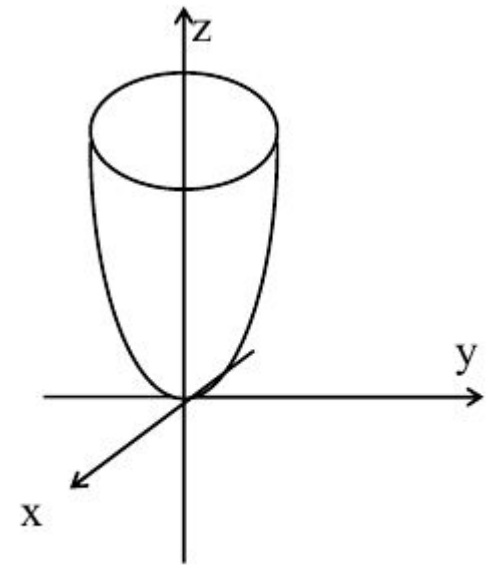


Рис. 8

- *Гиперболических параболоид* (рис.9)

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} .$$

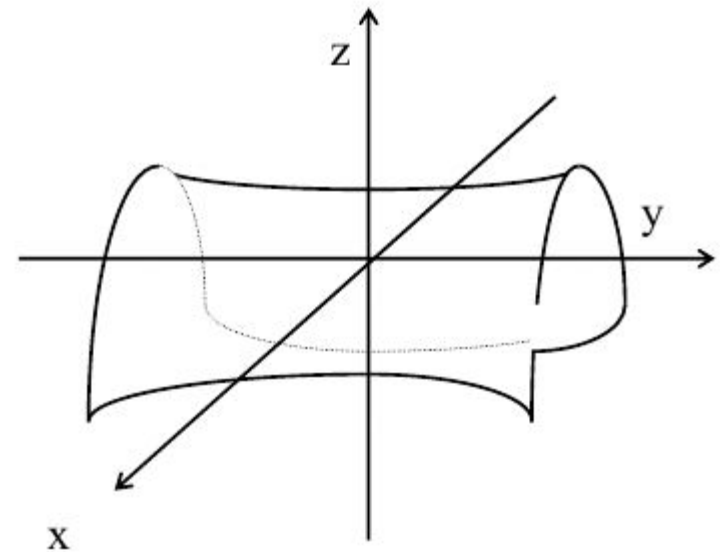
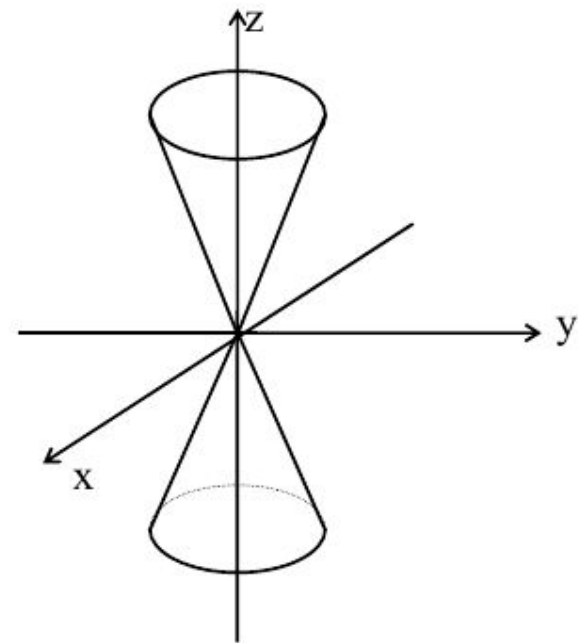


Рис.9

- **Конус** (рис.10)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



- **Эллиптический цилиндр** (рис. 11)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^3.$$

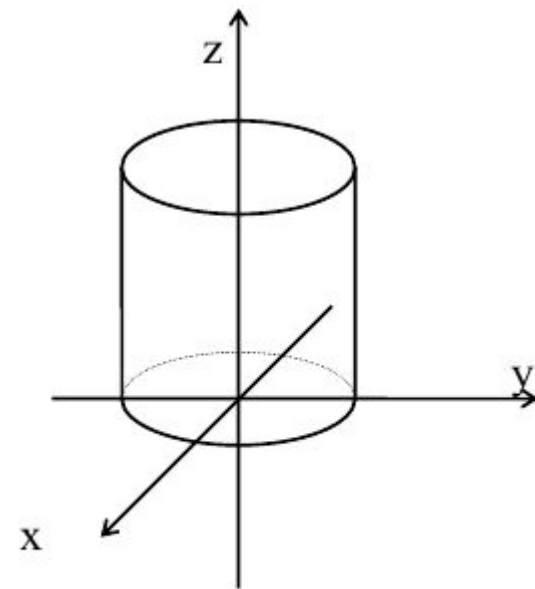


Рис.11