Элементы теории игр

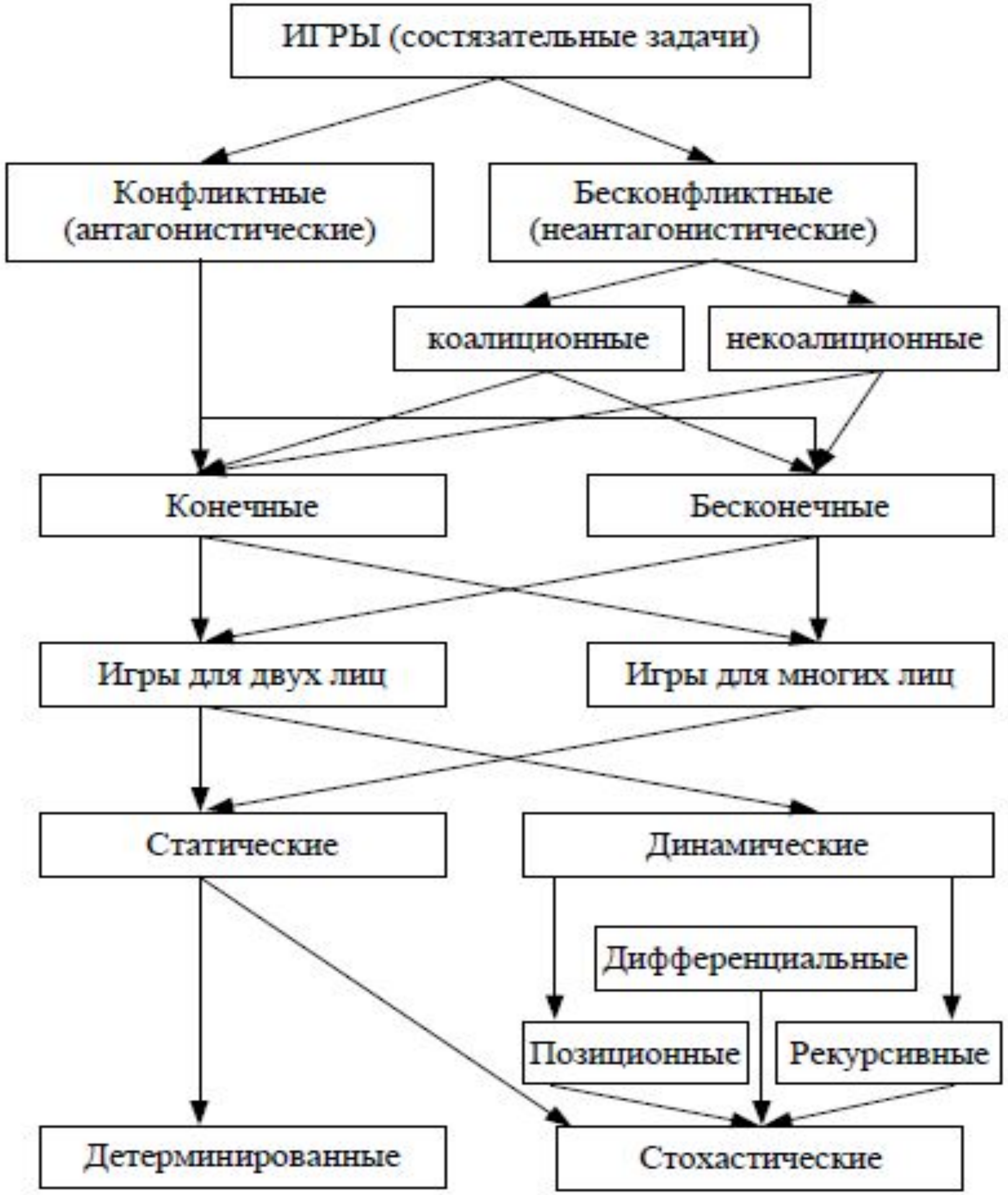
Конфликтные ситуации

- Ситуации, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие различные цели, причем результат, полученный каждой из сторон при реализации определенной стратегии, зависит от действий других сторон, называются **конфликтными** (борьба фирм за рынок сбыта, аукцион, спортивные состязания, военные операции, парламентские выборы (при наличии нескольких кандидатов), карточные игры)

Оптимизационные задачи теории игр

- решение принимает не одно, а два или более лиц, а результат решения зависит от совокупности решений всех этих лиц
- каждому лицу не известны ни решения других лиц, ни вероятностные оценки их возможных решений

Классификация игровых задач



Игра с нулевой суммой

- конфликт двух участников с противоположными интересами, выигрыш одной стороны конфликта в точности совпадает с проигрышем другой стороны
- Участники игры — лица, принимающие решения, — называются **игроками**.
- Целевые функции называются **платежными функциями**, и считается, что они показывают выигрыш игрока.
- **Стратегия** игрока — это осознанный выбор одного из множества возможных вариантов его действий

Платежная матрица

- Стратегии первого игрока пронумеруем числами от 1 до *m*, а стратегии второго игрока — числами от 1 до *n*.
- Конечная игра с нулевой суммой однозначно определяется **платежной матрицей** (матрицей выигрышей)

$$П = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- a_{ij} – платеж второго игрока первому

Правила игры

- Игра происходит партиями.
- **Партия** игры состоит в том, что игроки одновременно называют свой выбор: первый игрок называет некоторый номер строки матрицы **П** (по своему выбору или случайно), а второй — некоторый номер столбца этой матрицы (также по своему выбору или случайно).
- После этого происходит «расплата».

- **Цель** каждого игрока — **выиграть как можно бо́льшую сумму** в результате большого числа партий.

Решение игры

- *Решением* игры можно назвать любое описание того, каким образом должны вести себя игроки в той или иной игровой ситуации.
- Стратегия называется *чистой*, если выбор игрока неизменен от партии к партии. У первого игрока, очевидно, есть m чистых стратегий, а у второго - n.
- Решением может быть набор исходов игры.
- Решением игры может быть и набор смешанных стратегий, если одних только чистых стратегий недостаточно.

Игра в чистых стратегиях

- При анализе игр противник считается сильным, т.е. разумным.
- **Нижняя цена игры**

$$\alpha = \max_{i=1,2,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij}$$

представляет собой максимальный гарантированный выигрыш первого игрока. Стратегия 1-го игрока – максиминная.

- **Верхняя цена игры**

$$\beta = \min_{j=1,2,\ldots,n} \max_{i=1,2,\ldots,m} a_{ij}$$

представляет собой величину, противоположную минимальному гарантированному проигрышу второго игрока (второй игрок гарантирует, что он не проиграет больше чем β). Стратегия 2-го игрока – минимаксная.

Цена игры

- Если $\alpha=\beta$, то говорят, что игра имеет **седловую точку в чистых стратегиях**.
- Общее значение α и β называется при этом **ценой игры** и обозначается $v=\alpha=\beta$.
- Стратегии игроков, соответствующие седловой точке, называются **оптимальными чистыми стратегиями.**

- **Теорема.** *В любой матричной игре нижняя цена не превосходит верхней*: $\alpha\leq\beta$.

Пример

- В платежной матрице

$$
П = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}
$$

указано, какую долю рынка выиграет предприятие у своего единственного конкурента, если оно будет действовать согласно каждой из возможных трех стратегий, а конкурент — согласно каждой из своих возможных трех стратегий. Требуется определить, имеет ли данная игра седловую точку в чистых стратегиях. Найти цену игры.

Решение

- Нижняя цена игры $\alpha = \max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3} a_{ij} = \max\{0{,}1,\ 0{,}3,\ 0{,}1\} = 0{,}3$

соответствует второй стратегии первого игрока.

- Верхняя цена игры $\beta = \min_{j=1,2,3} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min\{0{,}5,\ 0{,}3,\ 0{,}4\} = 0{,}3$

соответствует второй стратегии второго игрока.

Если первый игрок будет действовать со второй стратегией, а второй игрок — со второй стратегией, то игроки могут гарантировать себе: первый — выигрыш не менее $v=\alpha=\beta=0{,}3=30\%$ рынка, а второй — что первый выиграет не более $v=30\%$ рынка

Игра в смешанных стратегиях

- p_i – вероятность, с которой первый игрок выбирает свою *i*-стратегию $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$,

- q_i – вероятность, с которой второй игрок выбирает свою *i*-стратегию $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

- *Смешанной стратегией* первого игрока называется вектор где все $p_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), а $\Sigma\, p_i = 1$, т.е. распределение вероятностей на множестве его чистых стратегий
- *Смешанной стратегией* второго игрока называется вектор где все $q_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots$, n), а $\Sigma\, q_i = 1$,

Игра в смешанных стратегиях

- Если игроки играют со своими смешанными стратегиями **p**=(p_1, p_2, …,p_m) и **q** = (q_1, q_2, …, q_n) соответственно, то математическое ожидание выигрыша первого игрока равно математическому ожиданию проигрыша в

$$M(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$$

- Стратегии **p***=(p^*_1, p^*_2, …,p^*_m) и **q*** = (q^*_1, q^*_2, …, q^*_n) называются **оптимальными смешанными стратегиями** соответственно первого и второго игрок

$$M(\mathbf{p},\mathbf{q}^*) \leqslant M(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \leqslant M(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}).$$

- Если у обоих игроков есть оптимальные смешанные стратегии, то пара ($\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$) называется **решением игры** (или **седловой точкой в смешанных стратегиях**), а число v = M($\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$) – **ценой игры**

Решение игры 2×2 в смешанных стратегиях

- Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - матрица игры
- Пусть (p_1, p_2) – оптимальная стратегия игрока 1;
- (q_1, q_2) – оптимальная стратегия игрока 2
- Тогда, исключая тривиальный случай (наличие чистой оптимальной стратегии хотя бы у одного из игроков), имеем:
- $p_1 + p_2 = 1$, $p_1>0$, $p_2>0$;
- $q_1 + q_2 = 1$, $q_1>0$, $q_2>0$;

Решение игры 2×2 в смешанных стратегиях

- Цена игры игрока 1 равна: $$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = \nu, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = \nu. \end{cases}$$
- Подставляя $p_2 = 1 - p_1$, находим

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{\Delta_A},$$

$$p_2 = 1 - p_1,$$ где $$\Delta_A = (a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})$$

- Аналогично для второго игрока находим

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{\Delta_A},$$

$$q_2 = 1 - q_1,$$ где $$\Delta_A = (a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})$$

Пример. Игра «Угадывание монеты»

- Правила игры таковы. Первый игрок прячет в кулаке одну из двух монет: 1 руб. или 5 руб. по своему выбору и незаметно от второго игрока, а второй игрок пытается угадать, какая монета спрятана, и если угадывает, то получает эту монету, в противном случае платит первому игроку 3 руб. Требуется доказать, что данная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях и найти решение игры в смешанных стратегиях.

Решение

- Платежная матрица имеет ви, $П = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.
- Проверим, есть ли в игре седловая точка в чистых стратегиях.
- Нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_{i=1,2} \min\limits_{j=1,2} a_{ij} = \max\{-1,\ -5\} = -1$
- Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_{j=1,2} \max\limits_{i=1,2} a_{ij} = \min\{3,\ 3\} = 3$,
- α≠β, и седловой точки (в чистых стратегиях) в игре нет

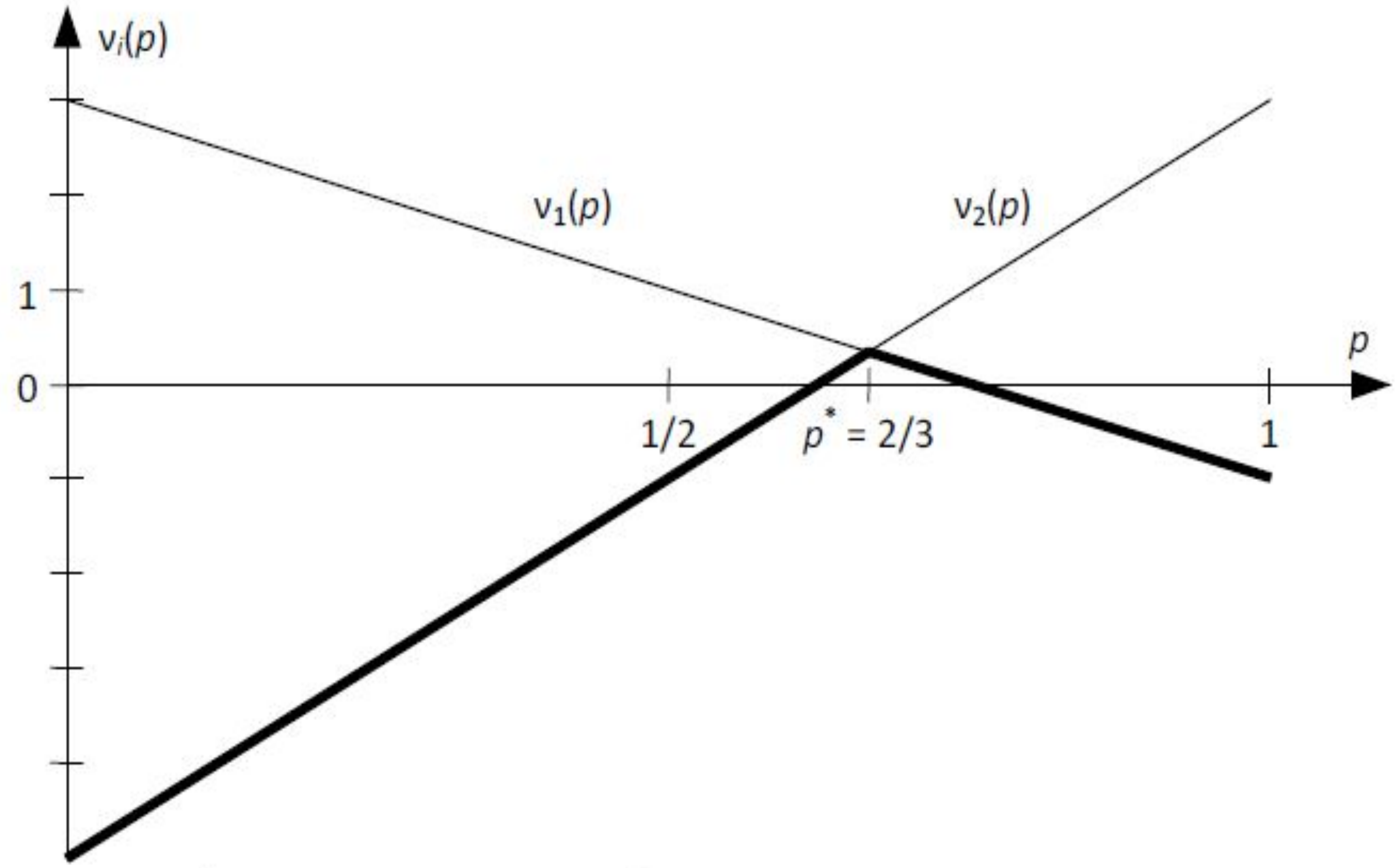
Решение в смешанных стратегиях для первого игрока

- Пусть первый игрок выбирает свою первую стратегию с вероятностью $p \in [0,1]$, а вторую стратегию — соответственно с вероятностью $(1 - p)$, т. е. первый игрок играет со смешанной стратегией $\mathbf{p}^* = (p, 1-p)$.
- Обозначим $\nu_j(p)$ ожидаемый выигрыш (т. е. математическое ожидание выигрыша) первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою j-ю стратегию.

$$\nu_1(p) = (-1)p + 3(1 - p),$$

$$\nu_2(p) = 3p + (-5)(1 - p).$$

Гарантированный выигрыш первого игрока



Решение в смешанных стратегиях для первого игрока

- Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш:

$$v(p) = \min \{ v_1(p), v_2(p)\}.$$

Наилучший для первого игрока выбор соответствуе $v^* = \max\limits_{p\in[0;1]} v(p)$,

- Из условия $v_1(p) = v_2(p)$ или $- p + 3(1- p) = 3 p - 5(1- p)$ находим

$$p= p^* = 2/3.$$

- Оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия

$$\mathbf{p}^* = (2/3, 1/3).$$

- Цена игры равна $v^* = v_1(2/3) = v_2(2/3) = 1/3$.

Вне зависимости от того, какую стратегию выберет второй игрок, первый игрок будет выигрывать в среднем за большое число партий по 1/3 руб. за одну партию.

Решение в смешанных стратегиях для второго игрока

- Пусть второй игрок выбирает первую стратегию с вероятностью $q \in [0,1]$, а вторую — с вероятностью $(1-q)$,

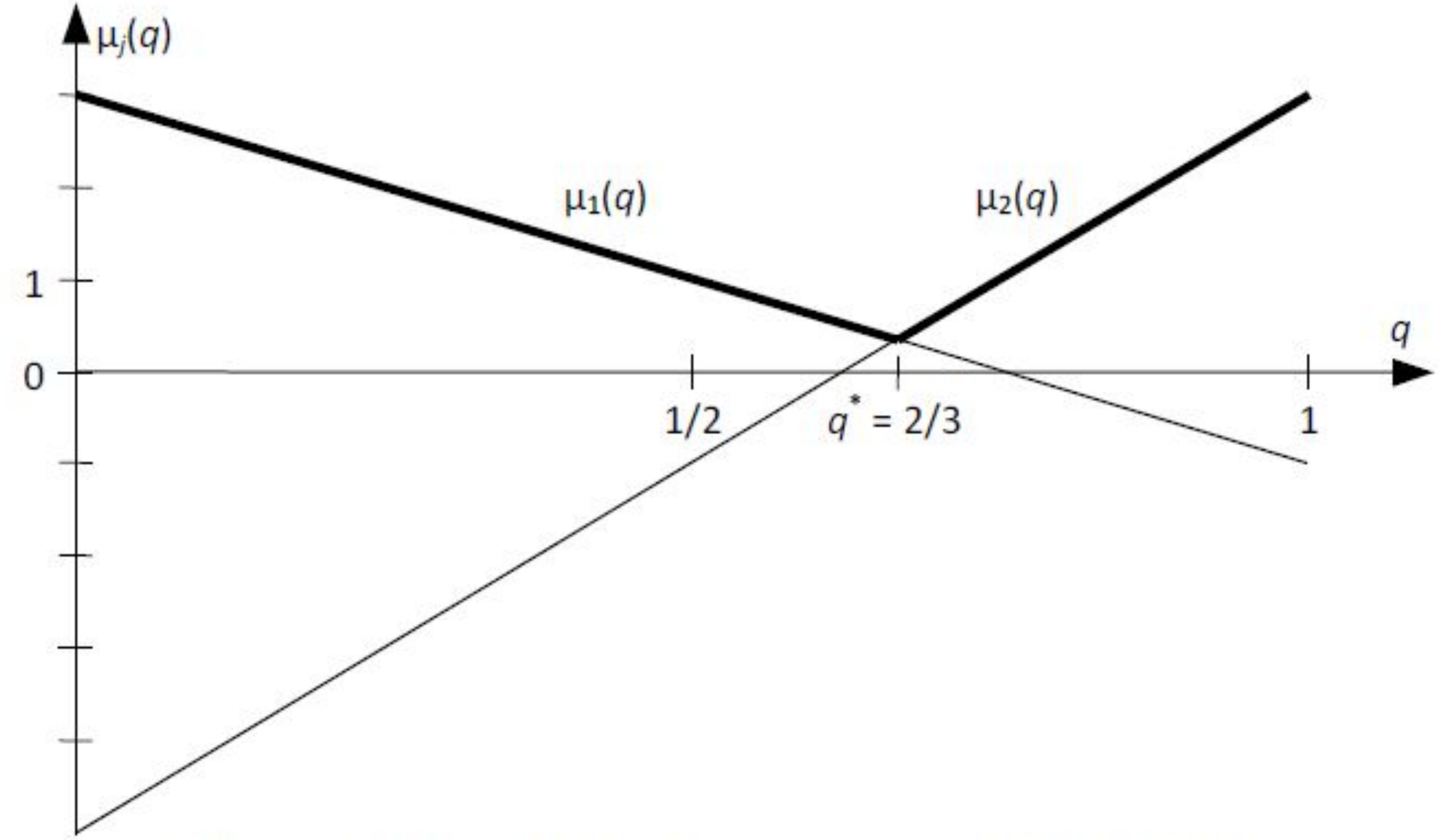
т.е. вектор смешанной стратегии второго игрока имеет вид $\mathbf{q} = (q, 1-q)$.

- Проигрыш второго игрока равен

$\mu_1(q) = -q + 3(1-q)$, если первый игрок выбирает свою первую стратегию

$\mu_2(q) = 3q - 5(1-q)$, если первый игрок выбирает свою вторую стратегию

Верхняя граница проигрыша второго игрока



Решение в смешанных стратегиях для второго игрока

- Наилучшее с точки зрения второго игрока значение *q* определяется из условия

$$\min_{q\in[0,1]} \max\{\mu_1(q), \mu_2(q)\}$$

- Из условия $\mu_1(q) = \mu_2(q)$ находим $q^* = 2/3$.
- Поэтому оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна

$$\mathbf{q}^* = (2/3,\ 1/3).$$

Основная теорема теории матричных игр

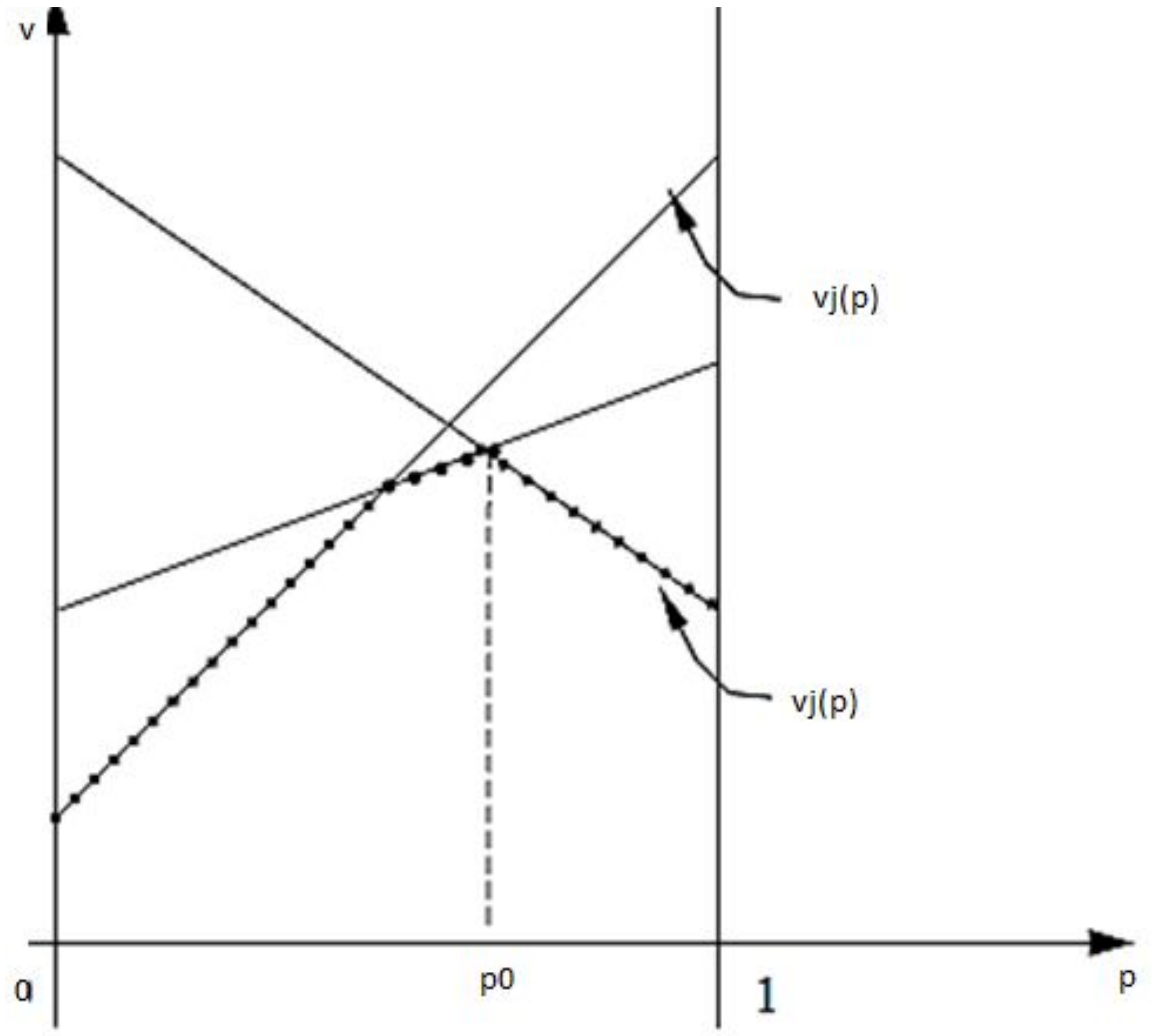
В любой матричной игре у игроков есть оптимальные смешанные стратегии.

Решение игры 2×n

- Матрица игры $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$
- Смешанные стратегии игрока 1 – вектор $\overline{p} = \left(p, 1 - p \right)$
- Ожидаемый выигрыш 1-го игрока при применении игроком 2 своей j-ой стратегии:
- $$\nu_j = a_{1j} p + a_{2j} (1 - p) = \left(a_{1j} + a_{2j} \right) p + a_{2j}, \quad j = \overline{1, n}$$

Гарантированный выигрыш игрока 1

- Строим графики ожидаемых выигрышей и по графику устанавливаем точку *M** - верхнюю точку нижней огибающей данного семейства прямых, которая соответствует оптимальной стратегии первого игрока



Пример

- Решить игру с платежной матрицей

$$П = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение в чистых стратегиях

- Нижняя цена игры $\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2,3,4} a_{ij} = \max\{-2, -4\} = -2,$
- Верхняя цена игры $\beta = \min_{j=1,2,3,4} \max_{i=1,2} a_{ij} = \min\{2, 3, 4, 1\} = 1,$
- $\alpha \neq \beta$, значит, седловой точки (в чистых стратегиях) в игре нет

Решение в смешанных стратегиях для первого игрока

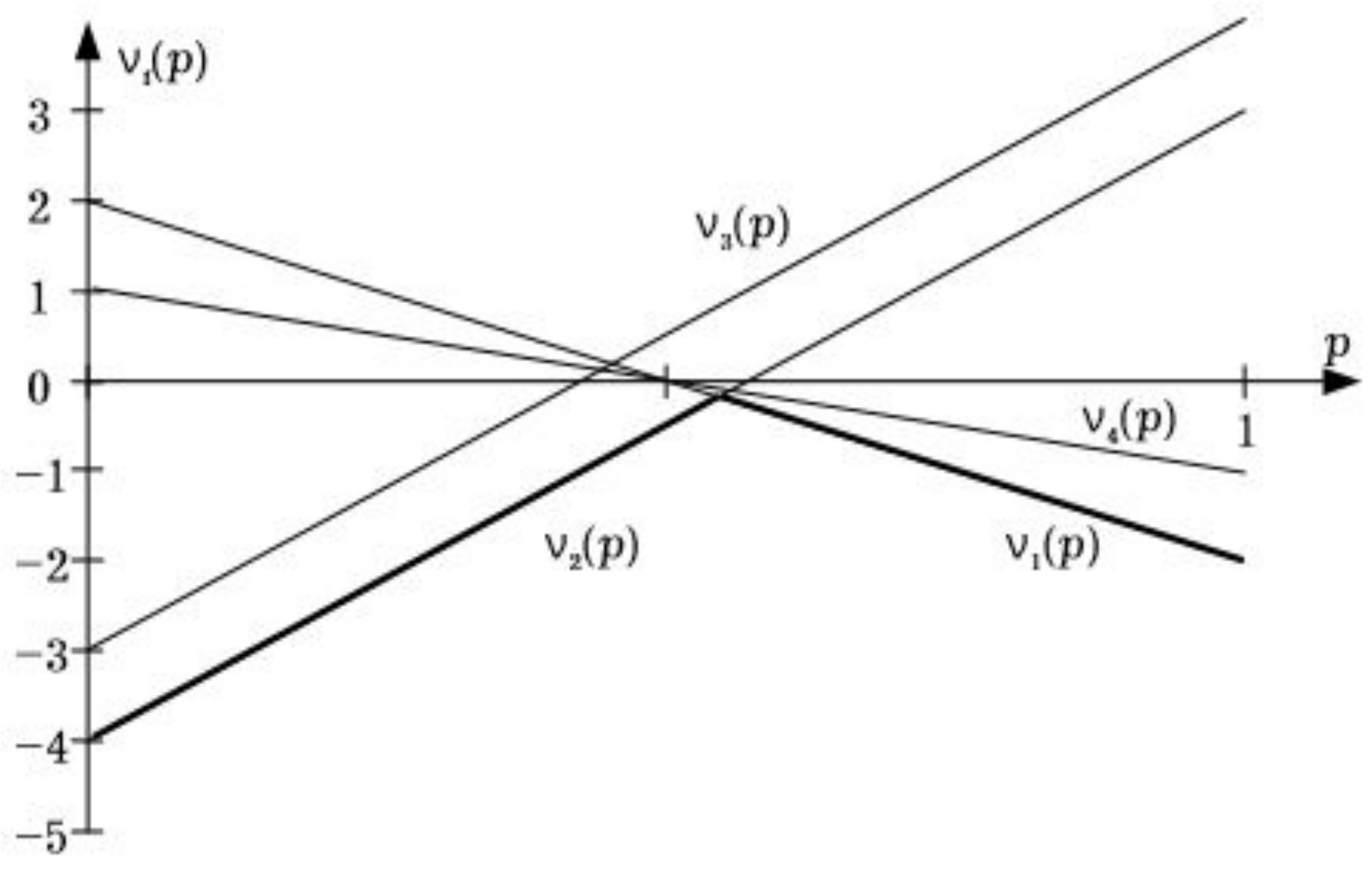
- Пусть первый игрок играет со смешанной стратеги $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$.

- Обозначим $v_j(p)$ ожидаемый выигрыш первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою j-ю стратегию:

$$\nu_1(p) = (-2)p + 2(1-p), \qquad \nu_2(p) = 3p + (-4)(1-p),$$

$$\nu_3(p) = 4p + (-3)(1-p), \qquad \nu_4(p) = (-1)p + 1(1-p).$$

Гарантированный выигрыш первого игрока



Оптимальная стратегия первого игрока

- Из условия $v_1(p) = v_2(p)$ находим $p=6/11$,

т.е. оптимальная стратегия первого игрока рав $\mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 5/11 \end{pmatrix}$

- Цена игры равна $v* = v_1(6/11) = v_2(6/11) = -2/11$.

Решение в смешанных стратегиях для первого игрока

- Второй игрок, действуя разумно, никогда не будет выбирать третью и четвертую стратегии, поэтому вектор оптимальной смешанной стратегии второго игрока имеет вид

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Проигрыш второго игрока равен

$\mu_1(q) = -2q + 3(1-q)$, если первый игрок выбирает свою первую стратегию, $\mu_2(q) = 2q - 4(1-q)$, если первый игрок выбирает свою вторую стратегию.

Оптимальная стратегия второго игрока

- Из условия $\mu_1(q) = \mu_2(q)$ находим $q=7/11$.
- Оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} 7/11 \\ 4/11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Игра $m \times n$

При решении матричной игры размерностью $n \times m$ могут быть применены два приема:

- сведение задачи к задаче $m \times 2$ или $2 \times n$;
- сведение задачи к задаче линейного программирования.

Доминирующие стратегии

- Говорят, что **стратегия A1 первого игрока доминирует стратегию A2**, если для всех j = 1, 2, …, n имеет место $a_{1j} \geq a_{2j}$. В этом случае стратегия A2 заведомо хуже стратегии A1. Стратегия A2 называется доминируемой и может быть исключена из рассмотрения.
- Говорят, что **стратегия B1 доминирует стратегию B2 второго игрока**, если для любого i справедливо $a_{i1} \leq a_{i2}$. Здесь стратегия B2 заведомо хуже стратегии B1, она называется доминируемой и может быть удалена из рассмотрения.

Основные теоремы теории игр

- Ни одна из строго доминирующих чистых стратегий не содержится в спектре оптимальных решений.
- Если некоторая чистая стратегия А, доминируется смешанной стратегией В, в спектре которой нет А, то удаление А приводит к тождественной игре.
- Решения игр будут тождественными, если каждый элемент платежной матрицы преобразуется следующим образом

$$п_{ij} = ka_{ij} + b, \text{ где } k>0,\ b>0 \text{ – любые числа.}$$

Без изменения оптимального решения каждый элемент платежной матрицы можно умножить на любое положительное число и сложить с любым положительным числом. При этом новая цена игры v будет связана с реальной ценой соотношением $v_{ij} = kv^{*}_{ij} + b$

Пример

- Решить игру, заданную платежной матрицей

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	4	7	2	3	4
A2	3	5	6	8	9
A3	4	4	2	2	8
A4	3	6	1	2	4
A5	3	5	6	8	9

Решение

- Стратегия А5 дублирует стратегию А2, поэтому любую из них можно отбросить. Отбросим А5. Заметим, что в строке А1 все выигрыши больше (или равны) выигрышам строки А4. Стратегия А1 доминирует над стратегией А4. Отбрасываем строку А4. Получим игру 3×5.

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	4	7	2	3	4
A2	3	5	6	8	9
A3	4	4	2	2	8

Решение

- Стратегия B3 доминирует над B4 и над B5, а B1 – над B2. Отбрасываем столбцы B2, B4, B5. Получим игру 3×2.

	B1	**B3**
A1	4	2
A2	3	6
A3	4	2

- Стратегия A3 дублирует стратегию A1, поэтому любую из них можно отбросить. Отбросим A3. Получим игру 2×2.

Решение матричной игры сведением к задаче линейного программирования

- Пусть рассматривается игра с платежной матрицей, все элементы которой строго положительны
- Смешанные стратегии первого и второго игро

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

- Если стратегия p является оптимальной, то средний выигрыш первого игрока независимо от того, какую стратегию выберет второй игрок, будет не меньше цены игры v*:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \geqslant \nu^*, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \geqslant \nu^*, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \geqslant \nu^*. \end{cases} \qquad p_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1.$$

Постановка задачи линейного программирования для первого игрока

- Введем новые обозначения $y_i = p_i / \nu^*, \quad i = 1, 2, \ldots, m$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geqslant 1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geqslant 1, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geqslant 1. \end{cases}$$

$$y_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \qquad \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\nu^*} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{\nu^*} = \frac{1}{\nu^*}.$$

- Цель первого игрока — максимизировать цену игры, т. е. минимизировать величину

$$1/\nu^* = \sum_{i=1}^{m} y_i .$$

Постановка двойственных задач линейного программирования для первого и второго игроков

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков

- Цена игры

$$\nu^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*},$$

- Оптимальные смешанные стратегии игроков

$$\mathbf{p}^* = \nu^* \mathbf{y}^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} y_i^* \\ y_2^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} y_i^* \\ \vdots \\ y_m^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} y_i^* \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{q}^* = \nu^* \mathbf{x}^* = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \Big/ \sum_{j=1}^{n} x_j^* \\ x_2^* \Big/ \sum_{j=1}^{n} x_j^* \\ \vdots \\ x_n^* \Big/ \sum_{j=1}^{n} x_j^* \end{pmatrix}.$$

Замечание

- Если же в платежной матрице есть отрицательные элементы или нули, то можно добавить ко всем элементам матрицы одно и то же достаточно большое положительное число b, так чтобы все элементы матрицы стали положительными, затем поставить и решить пару двойственных задач линейного программирования, найти оптимальные смешанные стратегии игроков, а цену игры скорректировать путем вычитания из нее числа b.

Пример

- В условиях предыдущего примера решить игру с платежной матрицей сведением ее к задаче линейного программирования

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение с помощью сведения задачи к паре взаимно двойственных задач линейного программирования

- От платежной матрицы $$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

путем добавления положительного числа b = 5 перейдем к матрице

$$\Pi' = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Пара двойственных задач линейного программирования

$$y_1 + y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 7y_2 \geqslant 1, \\ 8y_1 + y_2 \geqslant 1, \\ 9y_1 + 2y_2 \geqslant 1, \\ 4y_1 + 6y_2 \geqslant 1, \end{cases}$$

$$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 4x_4 \leqslant 1, \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0.$$

Оптимальные решения

- Оптимальные решения задач Л $\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 6/53 \\ 5/53 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 7/53 \\ 4/53 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- Оптимальные смешанные стратегии игроков

$$\mathbf{p}^* = \frac{1}{6/53+5/53}\begin{pmatrix} 6/53 \\ 5/53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 5/11 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{q}^* = \frac{1}{7/53+4/53+0+0}\begin{pmatrix} 7/53 \\ 4/53 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/11 \\ 4/11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- Цена игры

$$\nu^* = \frac{1}{6/53+5/53} - 5 = -2/11.$$