Теория игр. Основы

Актуальность

- В конфликтных ситуациях, **когда две или более оперирующие стороны преследуют несовпадающие цели**, значение целевой функции каждой стороны зависит не только от решения, выбранного данной стороной, но и от решений, выбранных другими сторонами
- Раздел исследования операций, ориентированный на разработку методов выбора оптимальных решений учитывающих решения, принимаемые каждой из сторон, участвующих в операции, называется ***теорией игр***

Области применения теории игр

- экономика;
- политика;
- военные действия и т. д.

Основные понятия

Конфликтная ситуация – это столкновение интересов двух или более сторон.

Игра – это математическая модель конфликтных ситуаций, а также система предварительно оговоренных правил и условий.

Партией называется частичная реализация правил и условий игры. Результатом игры всегда является число v, которое называется выигрышем, проигрышем или ничьей.

- если v **> 0** – выигрыш
- если v **< 0** – проигрыш
- если v **= 0** – ничья

КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР

По числу игроков:
игры одного игрока,
двух игроков,
n игроков

По характеру выигрышей:
с нулевой суммой и
игры с ненулевой суммой

По количеству стратегий:
конечные и бесконечные

По количеству шагов:
одношаговые и многошаговые

По виду функций выигрышей:
матричные, биматричные,
непрерывные,
выпуклые, сепарабельные, типа
дуэлей и др.

По характеру
взаимоотношений:
бескоалиционные,
коалиционные и
кооперативные

Основные понятия. Стратегии

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. В зависимости от стратегий игры делятся на ***конечные*** и ***бесконечные***.

Игра называется ***конечной***, если у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий (в противном случае игра называется ***бесконечной***).

Процесс игры состоит в выборе каждым игроком одной своей стратегии

В результате каждой партии игры складывается система стратегий $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, которая называется ***ситуацией***

Множество всех ситуаций обозначается $S = S_1, S_2, \ldots, S_n$ и представляет собой декартово произведение множеств, стратегий всех игроков

Наш пример

- ***Игра с нулевой суммой*** – это игра, в которой сумма выигрышей игроков равна нулю (т.е. каждый игрок выигрывает только за счет других). Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – ***антагонистическая игра,*** здесь два игрока четко играют друг против друга.
- Число игроков обозначим I, $I=(1, 2, \ldots, n)$.
- *Бескоалиционной игрой* называется система , в которой число игроков I и стратегии игрока S_i являются множествами, а платежная функция H_i – функция на множестве S, принимающая вещественные значения
- Игра **с нулевой суммой:** $$\sum_{i=1}^{n} H_i(s) = 0$$

Понятие «антагонистическая игра»

Игра
$$\Gamma = < I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >$$

называется *антагонистической*, если <u>число игроков в ней равно 2</u>, а значения функций **выигрышей этих игроков в каждой ситуации равны по величине и противоположны по знаку**

$$H_1(s) = -H_2(s)$$

- Следовательно, антагонистическая игра также является игрой с нулевой суммой

Матричная игра

Определение 5.1. *Матричная игра* – это парная игра, которая задается набором *чистых стратегий* $\{1, \ldots, n\}$ и $\{1, \ldots, m\}$ первого и второго игроков, а также *платежной матрицей* $(a_{ij})_{m\times n}$, определяющей выигрыш первого игрока при выборе игроками стратегий i и j соответственно. Целью первого игрока является максимизация своего выигрыша, а целью второго – минимизация выигрыша противника.

Пример 5.1 («камень–ножницы–бумага»). Каждый игрок во время своего хода независимо от другого выбирает одну из трех стратегий, называемых «камень», «ножницы» и «бумага». Выбранные стратегии сравниваются. Если они совпадают, выигрыш первого игрока составляет 0 (ничья), в противном случае побеждает игрок с более сильной стратегией. «Камень» считается сильнее «ножниц», которые, в свою очередь, сильнее «бумаги», которая сильнее «камня». Выигрыш победившего игрока составляет 1, проигравшего -1. Платежная матрица в этом случае имеет следующий вид:

Пример: “камень-ножницы-бумага”

- Выигрыш победившего игрока составляет 1, проигравшего -1
- Платежная матрица в этом случае имеет следующий вид:

	Игрок 2			
		«Камень»	«Ножницы»	«Бумага»
Игрок 1	«Камень»	0	1	–1
	«Ножницы»	–1	0	1
	«Бумага»	1	–1	0

Платёжная матрица

- Предположим, что нам известны значения a_{ij} **при каждой паре стратегий**. Эти значения можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют стратегиям A_i, **а столбцы — стратегиям B_j.**
- Тогда, в общем виде матричная игра может быть записана следующей платежной матрицей

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Максиминные, минимаксные стратегии

Нижней чистой ценой игры называется

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Верхней чистой ценой игры называется

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Игра, для которой $\alpha = \beta$, называется ***игрой с седловой точкой***, где $\alpha = \beta = \nu$ называется ***ценой игры***.

Задача теории игр – поиск оптимальных стратегий (решений).

Решением игры называется пара оптимальных стратегий для игроков *A* и *B*, значение цены игры.

Наличие седловой точки означает **наличие равновесия в игре.**

ИГРА В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Стратегии игроков:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_m \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m \end{pmatrix}$$

Платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Нижняя цена игры: $\underline{v} = \max_i \min_j \{a_{ij}\}$

Верхняя цена игры: $\overline{v} = \min_j \max_i \{a_{ij}\}$

Условие существования седловой точки: $\max_i \min_j \{a_{ij}\} = \min_j \max_i \{a_{ij}\}$

Антагонистическая игра: $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$

Y – множество стратегий первого игрока,

X – множество стратегий второго игрока,

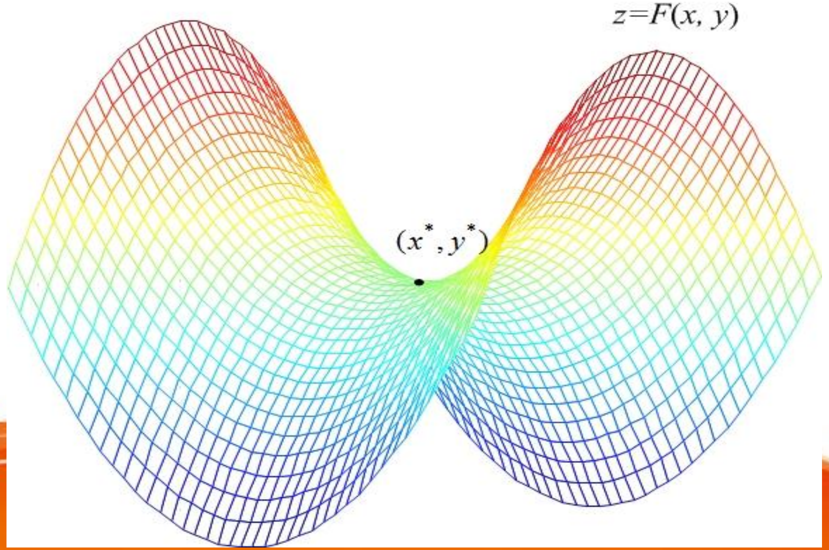
$F(x,y)$ – платежная функция или функция выигрыша.

<u>Определение</u>. Пару $(x^*, y^*) \in X \times Y$ называют **седловой точкой** функции $F(x,y)$ на $X \times Y$, если

$$F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y) \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

или
$$\max_{x \in X} F(x, y^*) = F(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} F(x^*, y)$$

Графическая интерпретация седловой точки:



Определение эффективных стратегий

$W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$ – оценка эффективности стратегии x первого игрока, или гарантированный результат

$\underline{v} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$ – наилучший гарантированный результат для первого игрока (**нижняя цена игры**)

$x^* \in X$ – **максиминная стратегия** первого игрока, если $\underline{v} = \min\limits_{y \in Y} F(x^*, y)$

$M(y) = \max\limits_{x \in X} F(x, y)$ – оценка эффективности стратегии y второго игрока, или гарантированный результат

$\bar{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x, y)$ – наилучший гарантированный результат для второго игрока (**верхняя цена игры**)

$y^* \in Y$ – **минимаксная стратегия** второго игрока, если $\bar{v} = \max\limits_{x \in X} F(x, y^*)$

Справедливо неравенство: $\underline{v} \le \overline{v}$

Теорема. 1) Для того, чтобы функция $F(x,y)$ на $X \times Y$ имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F(x,y). \qquad (1)$$

2) Пусть выполнено равенство (1). Пара (x^*, y^*) тогда и только тогда является седловой точкой, когда x^* максиминная, а y^* – минимаксная стратегии первого и второго игроков соответственно.

Чистые и смешанные стратегии

!!! Чистой стратегией называют ход, выбранный с вероятностью 1.

Смешанной стратегией игрока *A* называется вектор

$$\vec{p} = (p_1, \ldots\ldots p_m) \quad p_i \geq 0 \, (i = \overline{1, m}), \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Смешанной стратегией игрока *B* называется вектор

$$\vec{q} = (q_1, \ldots\ldots q_n) \quad q_j \geq q \, (j = \overline{1, n}), \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j -$$ *платежная функция*.

$$\vec{P_i}\,(0,0,0,\ldots,1,0\ldots) -$$ *чистая стратегия*

Пара стратегий $\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}$ называется ***оптимальной***, если

$$f(\vec{p}, \overrightarrow{q^*}) \leq f(\overrightarrow{p^*}, \overrightarrow{q^*}) \leq f(\overrightarrow{p^*}, \vec{q}).$$

Активные стратегии

Активной стратегией называется стратегия, входящая в оптимальную смешанную стратегию с ненулевой вероятностью.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{array} \\
\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

p_i – вероятность применения игроком i – *ой* стратегии

$$
\begin{cases}
a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \geq v \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \leq v
\end{cases}
$$

Решение матричной игры 2×2

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \end{array}$$

$$\quad q_1 \qquad q_2$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

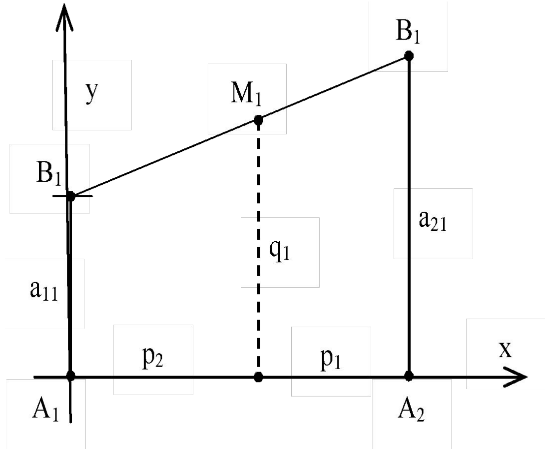
$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = v$$
$$a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1) = v$$
$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = v$$
$$p_1(a_{12} - a_{22}) + a_{22} = v$$
$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = p_1(a_{12} - a_{22}) + a_{22}$$
$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = v$$

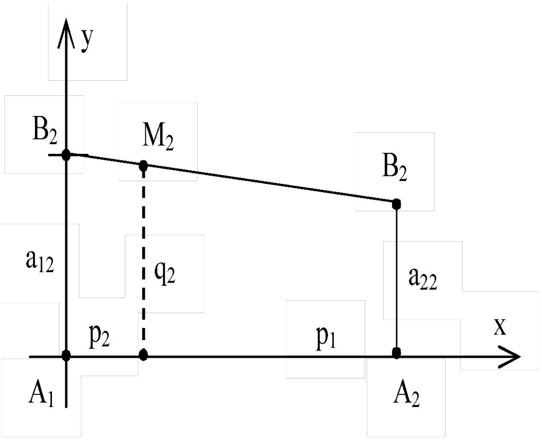
$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}$$ – аналитический метод решения

Для q_i: $a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = v$

Геометрическая интерпретация игры 2×2

Пусть имеется два игрока А и В. У каждого из игроков по две стратегии (A_1 и A_2 у игрока А, B_1 и B_2 у игрока В). Игра с нулевой суммой.
По оси абсцисс отложим отрезок A_1A_2, то есть точка A_1 изображает стратегию A_1 ($x=0$), A_2 – стратегию A_2, все промежуточные точки – смешанные стратегии. **На оси ординат откладываем выигрыш первого игрока, если второй применил стратегию B_1.** Аналогично строим второй график, если второй график выбрал стратегию B_2.





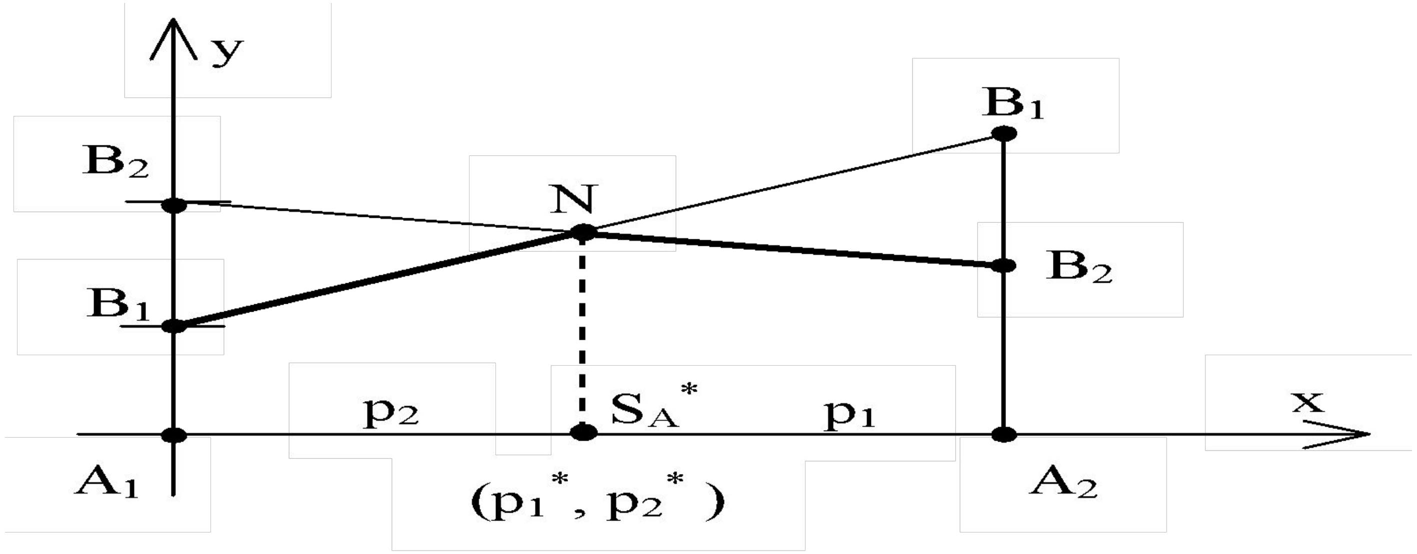
$q_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$

$q_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2$

(ордината точки M_1 и M_2, соответственно)

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = 1$$

В соответствии с принципом минимакса оптимальная стратегия S_A^* такова, что **минимальный выигрыш игрока А (при наихудшем поведении игрока В) обращается в максимум.**



Решение игры графическим способом

Отрезок B_1N – минимальный выигрыш игрока А при использовании любой смешанной стратегии,

если игрок В выбрал стратегию B_1. Аналогично, отрезок B_2N – выигрыш игрока А,

если игрок В выбрал стратегию B_2.

Следовательно, оптимальную стратегию определяет точка N, то есть минимальный выигрыш достигает максимума

Квадратная матрица

Решение. Пусть $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ – оптимальная стратегия первого игрока. В силу теоремы об активных стратегиях, если первый игрок использует оптимальную стратегию, то второй достигает цены игры ν при любой своей смешанной стратегии, в которой используются только активные чистые стратегии, например при $q^1 = (1,0)$ и $q^2 = (0,1)$.

Записывая для них выражения соответствующей цены игры, получаем

$$\nu_1 = a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = \nu,$$

$$\nu_2 = a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = \nu$$

и, учитывая соотношение $p_1^* + p_2^* = 1$, имеем систему из трех уравнений с тремя неизвестными, решив которую, находим

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \quad p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};$$

$$\nu = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Поменяв игроков местами и проведя аналогичные вычисления, получаем выражения для оптимальной стратегии второго игрока:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \quad q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Прямоугольная матрица

Рассмотрим игру $2 \times n$. Найдем оптимальную смешанную стратегию первого игрока $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, на которой достигается максимум

$$\alpha(p) = \min_{q \in Q_n} \mathrm{E}(p,q) \to \max_{p \in P_n} .$$

Положим $x = p_2, 1 - x = p_1, 0 < x < 1$. Обозначим $f(x) = \alpha(p)$. Тогда по теореме об активных стратегиях

$$f(x) = \min_{q \in Q_m} \sum_{j=1}^{n} [a_{1j} + (a_{2j} - a_{1j})x] q_j = \min_{1 \le j \le n} \nu_j(x),$$

где $\boxed{\nu_j(x) = a_{1j} + (a_{2j} - a_{1j})x, \ j = 1, \ldots, n.}$ В итоге получаем задачу максимизации миноранты семейства линейных функций в интервале (0, 1):

$$\min_{1 \le j \le n} \nu_j(x) \to \max_{0<x<1} .$$

Пример

Пример 5.7. Решить матричную игру с платежной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

где $\nu_j(x) = a_{1j} + (a_{2j} - a_{1j})x,\ j = 1, \ldots, n.$

Решение. Запишем уравнения прямых $\nu_j(x)$:

$\nu_1(x) = 4 - 8x,\ \ \nu_2(x) = 2 - 2x,\ \ \nu_3(x) = 3 - 5x,\ \ \nu_4(x) = -1 + 3x.$

Максимум миноранты достигается на пересечении прямых $\nu_1(x)$ и $\nu_4(x)$ (рис. 5.2), поэтому для решения исходной задачи используем матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

Максимум миноранты достигается на пересечении прямых $\nu_1(x)$ и $\nu_4(x)$ (рис. 5.2), поэтому для решения исходной задачи используем матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

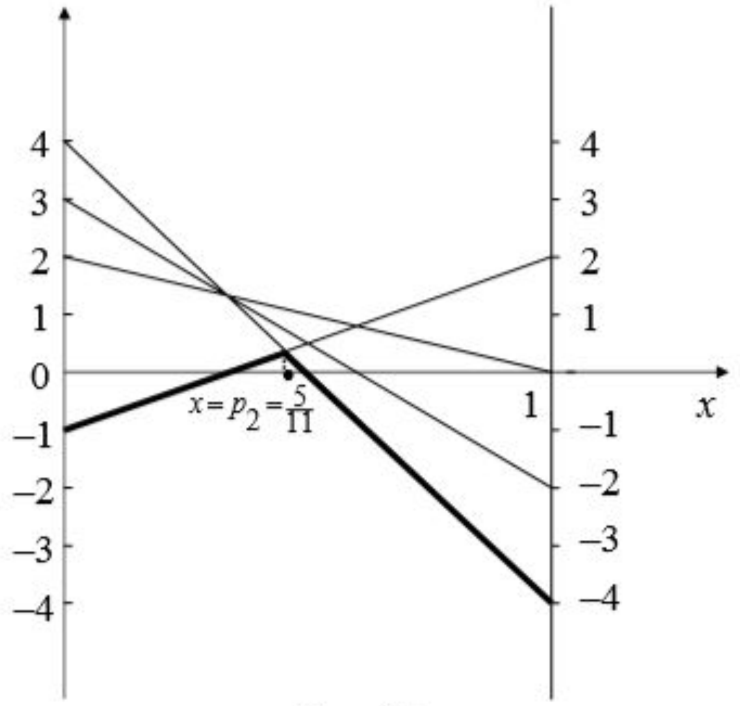


Рис. 5.2

Применяя полученные ранее формулы, получаем

$$p^* = \left(\frac{6}{11}, \frac{5}{11}\right), q^* = \left(\frac{3}{11}, 0, 0, \frac{8}{11}\right), \nu = \frac{4}{11}.$$

Пояснение

- приравниваем v1=v4
- 4-8x= -1+3x; 11x=5; x=**5/11**
- 1-x= 1-5/11= **6/11**
- **v= -1+3x = -1+3*(5/11)= 4/11**

Для q_i: $a_{11} q_1 + a_{12} (1-q_1) = v$

- **a11=4; a12= -1; v=4/11; подставляем в формулу, получаем q1=3/11. Аналогично q4=8/11.**
- **q2 и q3 = 0, поскольку эти столбцы не соответствуют точке перечения v1=v4**