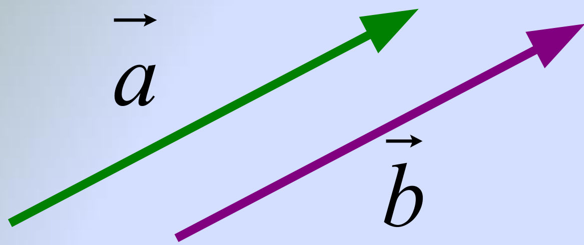
# Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

# Цели урока:

- ***Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.***
- ***Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.***
- ***Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.***

# Повторение:

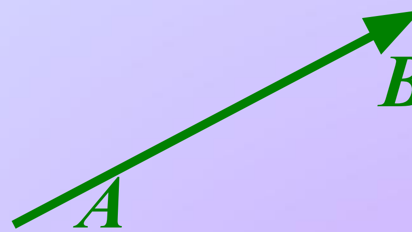
- ***Какие векторы называются равными?***



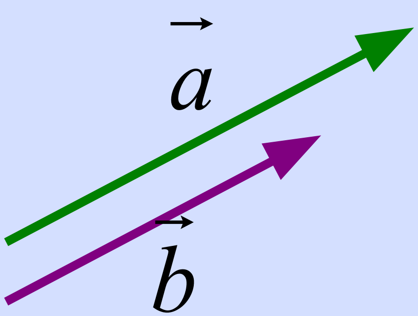

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b},\ \text{если}\ \ |\vec{a}| = |\vec{b}|;\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}}$$

- ***Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?***

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$




- ***Какие векторы являются коллинеарными?***




$$\boxed{\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \textit{или} \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}}$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

# Повторение

## Векторы в пространстве.

**1) Дано:** $A(-3;-2;4)$ $B(-4;3;2)$

**Найти:** $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

$\sqrt{30}$

**2) Дано:** $A(2;-3;1)$ $B(4;-5;0)$ $C(5;0;-4)$ $D(7;-2;-3)$

**Равны ли векторы** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$\overrightarrow{AB}\{2;-2;-1\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

**3) Дано:**

$A(1;-3;4)$

$B(9;1;-2)$

$C(2;0;1)$

$D(4;-2;2)$

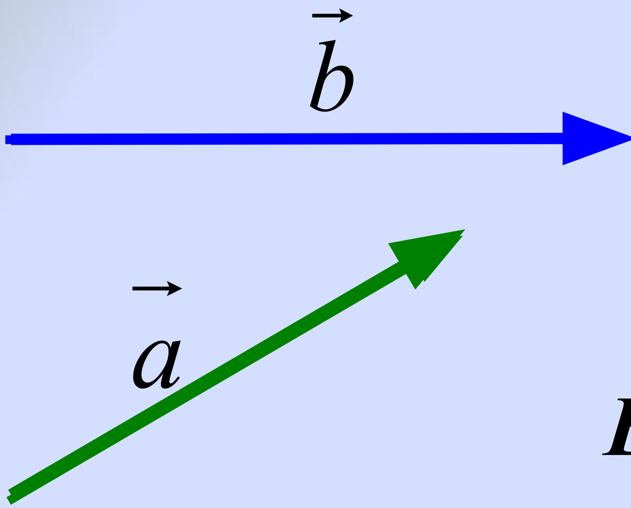
**? Коллинеарны ли векторы** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$\overrightarrow{AB}\{8;4;-6\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

**Нет**

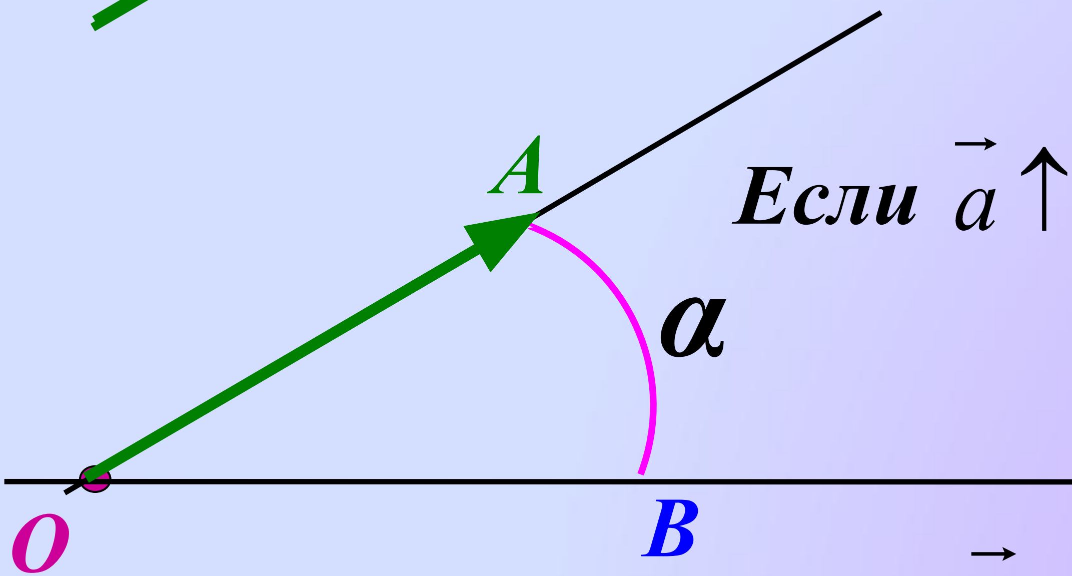
*ы р в е к т о р ы и м е ю т р а*

# Угол между векторами.




$\overrightarrow{OA}=\vec{a}\qquad\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

$$\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\alpha$$

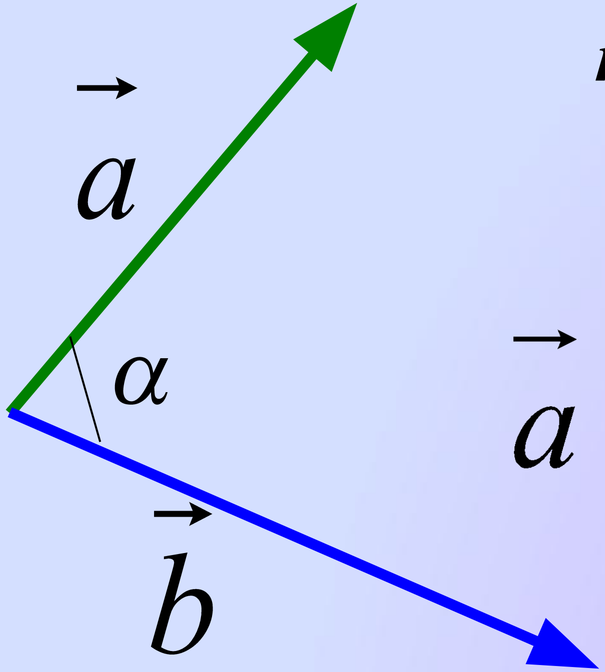



***Если*** $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=0^0$

***Если*** $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=180^0$

***Если*** $\vec{a}\perp\vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=90^0$

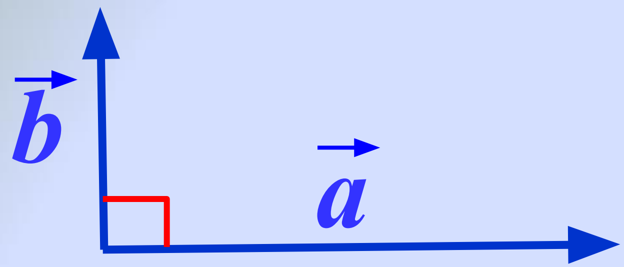
# Скалярное произведение векторов.




***Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.***

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

## Частный случай №1




$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$$

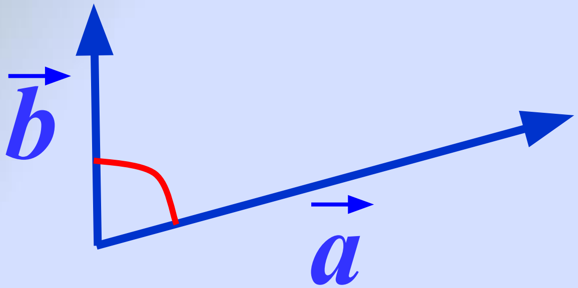
$$= 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

**Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

## Частный случай №2




$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

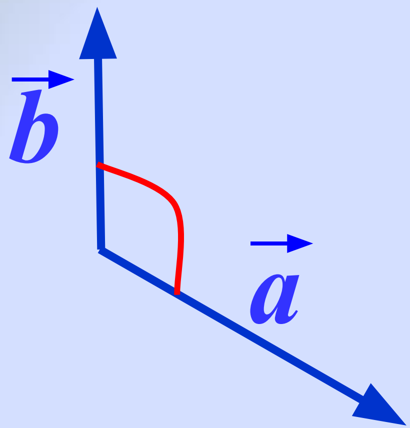
$> 0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

# Частный случай №3




$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

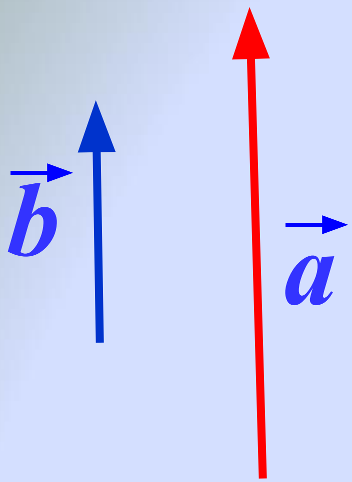
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha \quad < 0$$

$< 0$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

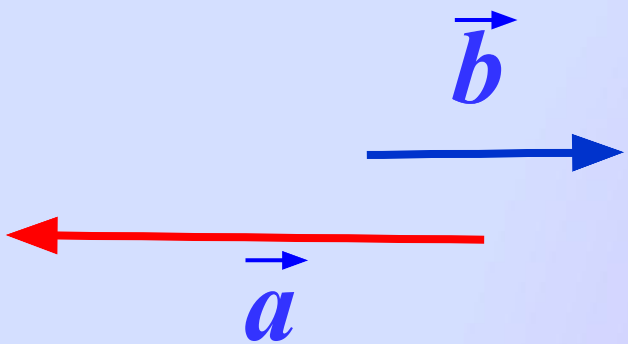
# Частный случай №4




$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$




$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

-1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

# Частный случай №5

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$$

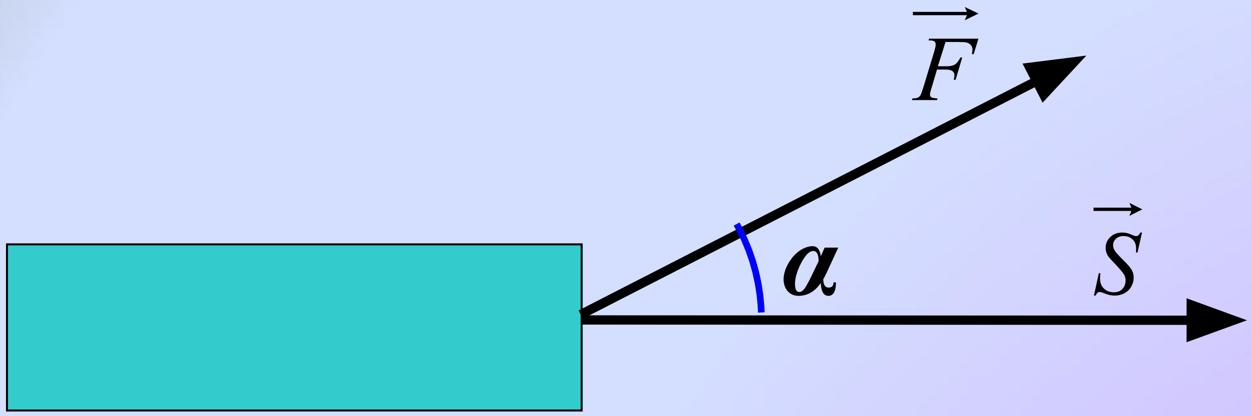
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\overbrace{\cos 0^0}^{1} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
**скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

# Пример применения скалярного произведение векторов в физике.



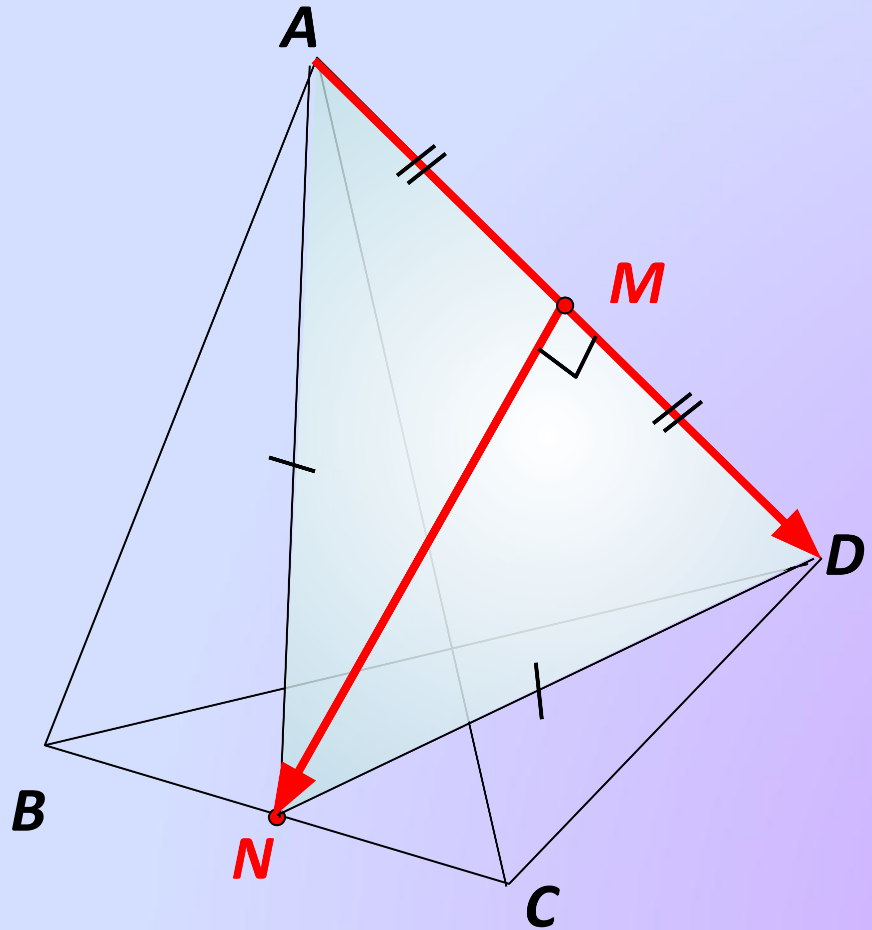

*Если* $\left(\widehat{\vec F \vec S}\right) = \alpha$, *то*

$$A = \underbrace{\left|\vec F\right| \cdot \left|\vec S\right| \cdot \cos\alpha}$$

***Скалярное произведение векторов.***

## Задача №1

Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



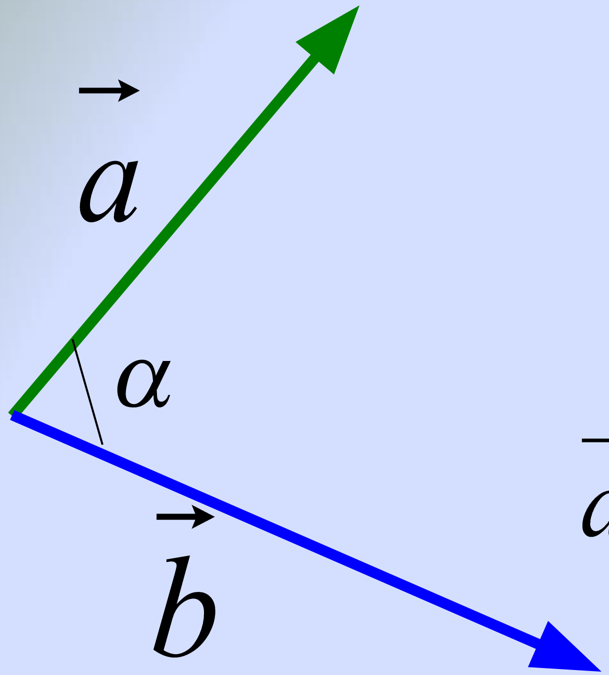
# Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

***Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.***

# Скалярное произведение векторов.




$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}\quad\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

# Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

## Задача №2

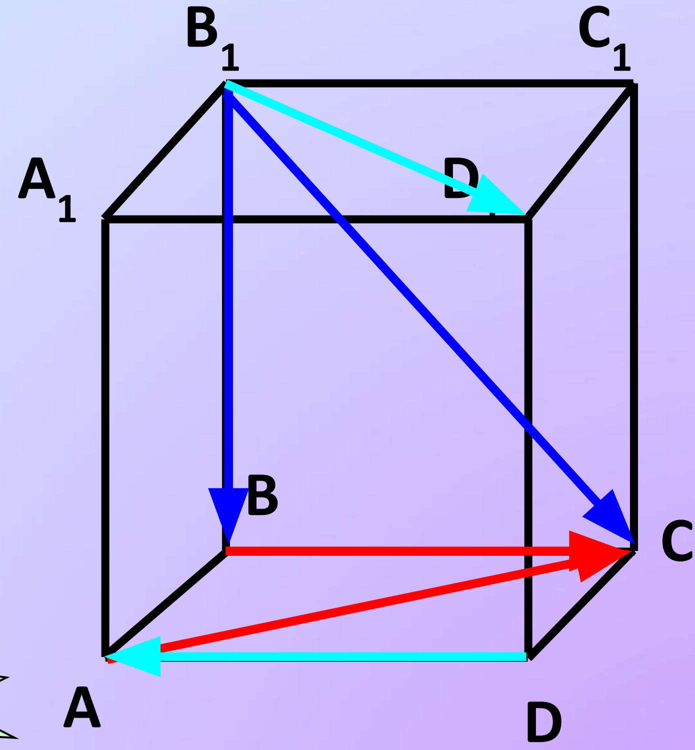
***Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.***

***Найдите угол между векторами:***

**а)** $\overrightarrow{B_1B}$ **и** $\overrightarrow{B_1C}$ — $45^0$

**б)** $\overrightarrow{BC}$ **и** $\overrightarrow{AC}$ — $45^0$

**в)** $\overrightarrow{DA}$ **и** $\overrightarrow{B_1D_1}$ — $135^0$



## № 443 (г)

*Дано:* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$

**Найти:** $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

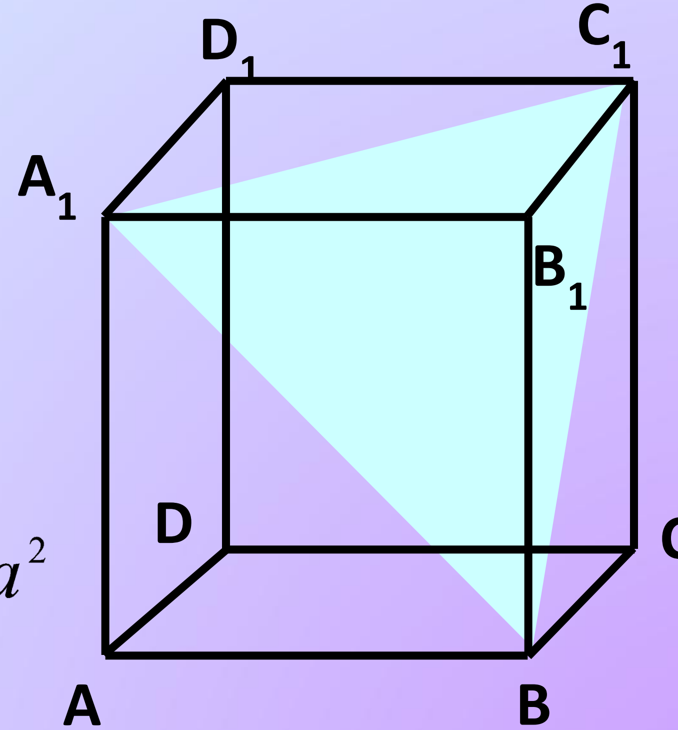
**1 способ:**

$\Delta BA_1C_1$ – правильный

$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$

$\left(\overrightarrow{BA_1} \hat{\ } \overrightarrow{BC_1}\right) = 60^0$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^0 = a^2$




**Ответ: $a^2$**

# № 443 (г)

***Дано:*** *куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

$AB = a$

***Найти:*** $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

**2 способ:**

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

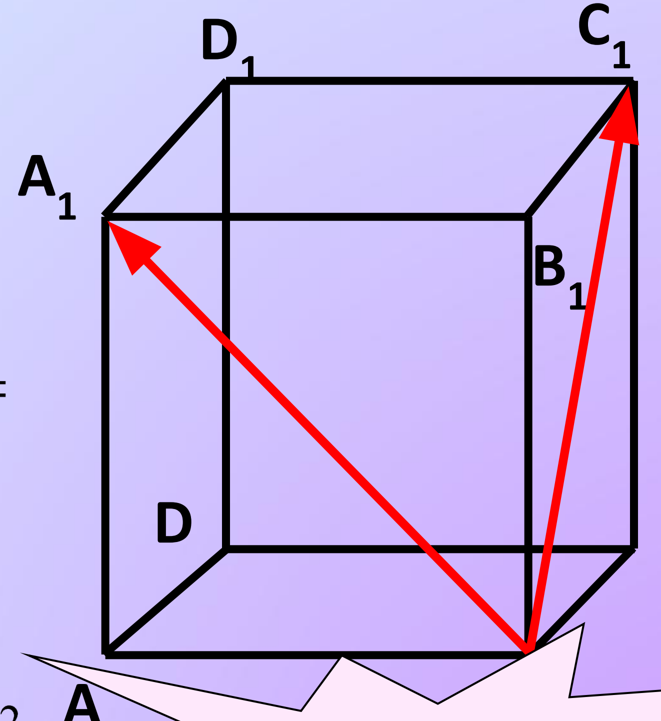
$$\boxed{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} - ?}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}\right) =$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} +$$

$$+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^0 = a^2$$




***Ответ:*** $a^2$

# № 443 (г)

***Дано:*** *куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

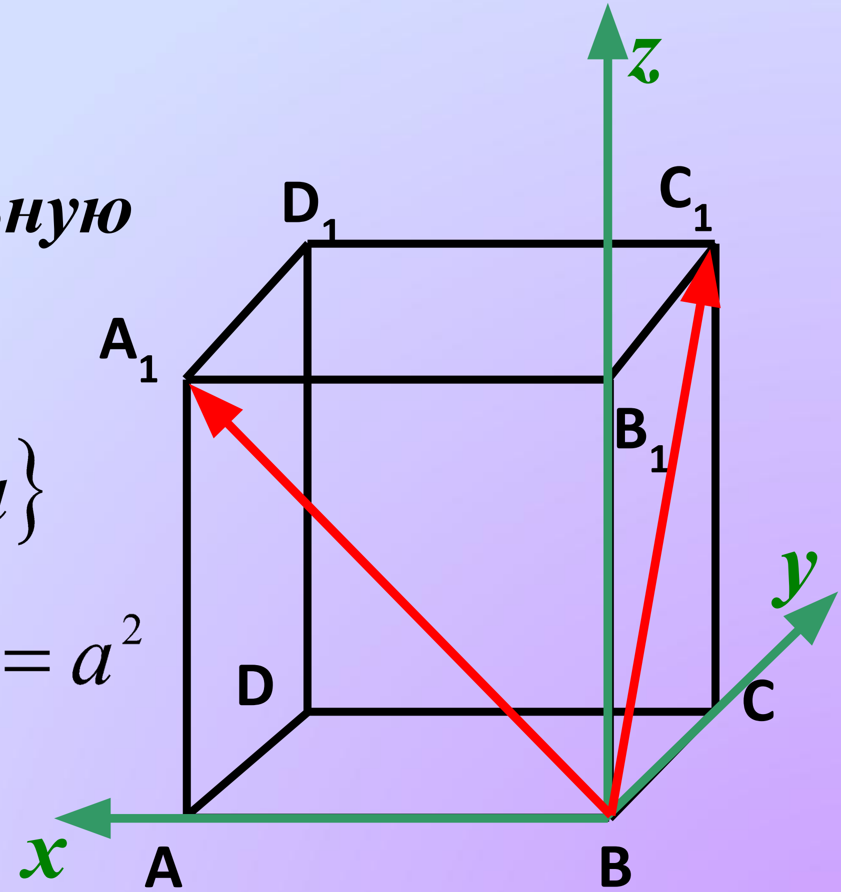
$AB = a$

***Найти:*** $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

**3 способ:** ***Введем прямоугольную систему координат.***

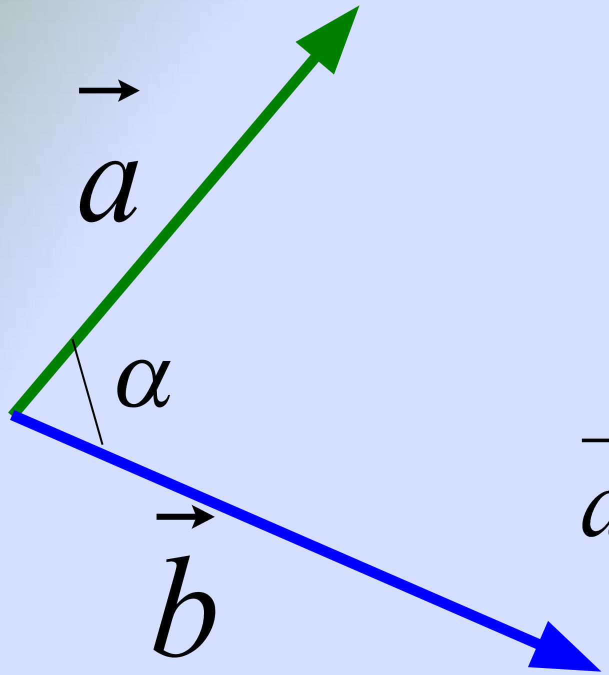
$\overrightarrow{BA_1}\{a;0;a\}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC_1}\{0;a;a\}$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$$




***Ответ:*** $a^2$

# Скалярное произведение векторов.




$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}\quad \vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

## Задание №1

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-6;\ 9;\ 5\}$ $\vec{b}\ \{-1;\ 0;\ 7\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6\cdot(-1) + 9\cdot0 + 5\cdot7 = 41$$

## Задание №2

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{0;\ 0;\ 4\}$ $\vec{b}\ \{22;\ 1;\ 8\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot 22 + 0\cdot 1 + 4\cdot 8 = 32$$

## Задание №3

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{1;\ 7;\ 9\}$ $\vec{b}\ \{-2;\ 4;\ 0\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot(-2) + 7\cdot4 + 9\cdot0 = 26$$

## Проверочная работа

1. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{1;\ 10;\ 7\}$ $\vec{b}\ \{0;\ 7;\ 0\}$

# Проверочная работа

2. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\,\{7;\ 25;\ 0\}$ $\qquad$ $\vec{b}\,\{11;\ 0;\ 54\}$

## Проверочная работа

3. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{|-2|;\ 0;\ |3|\}$ $\vec{b}\ \{1;\ |-11|;\ 1\}$

# Проверочная работа

4. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a}\ \{\sin(90^0);\ 2;\ 3\} \qquad \vec{b}\ \{3;\ 2;\ 1\}$$

## Проверочная работа

5. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-1;\ 2;\ 8\}$ $\vec{b}\ \{5;\ 5;\ 0\}$

## Проверочная работа

Работа закончена.
Перейдём к проверке.

## Проверочная работа

1. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\,\{1;\ 10;\ 7\}$ $\vec{b}\,\{0;\ 7;\ 0\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 10\cdot 7 = 70$$

## Проверочная работа

2. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{7;\ 25;\ 0\}$ $\vec{b}\ \{11;\ 0;\ 54\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 11 = 77$$

# Проверочная работа

3. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{|-2|;\ 0;\ |3|\}$     $\vec{b}\ \{1;\ |-11|;\ 1\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 5$$

# Проверочная работа

4. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a}\,\{\sin(90^0);\ 2;\ 3\} \qquad \vec{b}\,\{3;\ 2;\ 1\}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot3 + 2\cdot2 + 3\cdot1 = 10$$

## Проверочная работа

5. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-1;\ 2;\ 8\}$

$\vec{b}\ \{5;\ 5;\ 0\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 5 + 2\cdot 5 = 5$$

# Домашнее задание

**П.50, 51**

**№ 441, № 444, 446 (а)**