Логика – смирительная рубашка фантазии.

Х.Нар

Основы логики

Формы мышления

Логика – это наука о формах и способах мышления.

Логика позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны.

*Мышление всегда существует в каких – то формах – это **понятие**, **высказывание**, **умозаключение**.*

Формы мышления

Понятие – это форма мышления, которая фиксирует существенные признаки объекта или класса объектов, позволяющие отличать их от других.

Пример1: прямоугольник

проливной дождь,

...

Формы мышления

Высказывание – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними.

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать: истинно оно или ложно.

Пример2: «Днепр впадает в Черное море.»
«Апельсин созревает летом»
...

Формы мышления

Умозаключение – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений может быть получено новое суждение (заключение).

Умозаключение позволяет на основе известных фактов, выраженных в форме высказываний, получить заключение, т.е. новое знание

Пример3: Из утверждения «Все углы равнобедренного треугольника равны.» получить высказывание «Этот треугольник равносторонний»

Алгебра логики

Алгебра логики – это наука изучающая логические связи и отношения, лежащие в основе дедуктивного метода.

В алгебре логики не рассматривается конкретное содержание высказывания и принимается во внимание только истинность или ложность высказывания.

Алгебра логики

Логическая переменная – это простое высказывание, содержащее только одну мысль.

Логическая переменная обозначается латинской буквой (A, B, X, Y, и тд.).

Значением логической переменной могут быть только константы ***ИСТИНА*** *(1) и* ***ЛОЖЬ*** *(0).*

Алгебра логики

Логическая функция – это составное высказывание, содержащее несколько простых мыслей, соединенных между собой с помощью логических операций.

Логическая функция обозначается – F(A, B, …)

*Значения логической функции при различных наборах входных переменных обычно задают специальной **таблицей истинности**.*

Логические операции

БАЗОВЫЕ

- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Инверсия

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ

- Импликация
- Эквивалентность

Конъюнкция – логическое умножение

Обозначение: **A & B, A ^ B, A и B**

Конъюнкция двух логических переменных истинна тогда и только тогда, когда истинны обе логические переменные.

Таблица истинности

A	B	**A^B**
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Примеры: «Число 10 четное **и** отрицательное.»

«Нижний Новгород расположен на берегах реки Волга **и** реки Ока.»

Дизъюнкция – логическое сложение

Обозначение: **A v B, A или B**

Дизъюнкция двух логических переменных ложна тогда и только тогда, когда ложны обе логические переменные.

Таблица истинности

A	B	**AvB**
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Примеры: «Число 10 четное **или** отрицательное.»

«Нижний Новгород расположен на берегу реки Енисей **или** реки Лена.»

Инверсия – отрицание

Обозначение: **$\overline{A}$, ¬A, не A**

Таблица истинности

Инверсия логической переменной ложна тогда и только тогда, когда сама логическая переменная истинна и наоборот.

A	**¬A**
0	**1**
1	**0**

Примеры: «**Неверно,** что число 10 - четное.»

«**Неверно,** что Нижний Новгород расположен на берегу реки Енисей.»

Импликация – логическое следование

Обозначение: **A → B,** где A – условие, B – следствие.

Таблица истинности

Импликация двух логических переменных ложна тогда и только тогда, когда из истинного основания (А) следует ложное следствие.

A	B	**A→B**
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Примеры: «**Если** число 10 четное, **то** оно является отрицательным.»

Эквивалентность – логическое равенство

Обозначение: **A ≡ B, A ↔ B**

Эквивалентность двух логических переменных истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.

Таблица истинности

A	B	**A≡B**
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Примеры: «Число 10 четное, **тогда и только тогда, когда** отрицательно.»

Построение таблицы истинности

Пример:

Построить таблицу истинности для логической функции F(A,B,C)= ¬C^(AvB)

При построении таблицы истинности целесообразно руководствоваться последовательностью действий:

1. Определить количество строк в таблице, оно равно 2^n, где n-количество логических переменных.
2. Определить количество столбцов в таблице истинности, оно равно количеству логических переменных плюс количество логических операций.
3. Установить последовательность выполнения логических операций.

При выполнение операций определен следующий порядок их выполнения: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Изменить порядок действий можно с помощь расстановки скобок.

1. Количество строк = 2^3=8
2. Количество столбцов = 3+3 = 6
3. 1 действие ¬C,

   2 действие AvB,

   3 действие ¬C^(AvB)

Построение таблицы истинности

4. Построить таблицу истинности с указанием количества строк и столбцов, обозначить столбцы и внести все возможные наборы значений логических переменных:

4.1) разделить столбец значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть колонки нулями, а нижнюю – единицами;

4.2) разделить столбец значений второй переменной на четыре части и заполнить четверти чередующимися группами нулей и единиц, начиная с группы нулей;

4.3) продолжить деления столбцов значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнять их группами нулей и единиц, до тех пор пока группа нулей (единиц) не будет состоять из одного символа.

A	B	C	¬C	AvB	F()
0	**0**	**0**			
0	**0**	**1**			
0	**1**	**0**			
0	**1**	**1**			
1	**0**	**0**			
1	**0**	**1**			
1	**1**	**0**			
1	**1**	**1**			

Построение таблицы истинности

5. Заполнить таблицу истинности по столбцам выполняя базовые логические операции в соответствии с их таблицами истинности.

A	B	C	¬C	AvB	F(A,B,C)
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Законы логики

$$F(A) = A \vee \overline{A}$$

«Этот треугольник прямоугольный или косоугольный»

Логические функции, истинные на всех наборах значений входных переменных, называются тождественно-истинными.

$$F(A) = A \& \overline{A}$$

«Катя самая высокая девочка в классе, и в классе есть девочки выше Кати»

Логические функции, ложные на всех наборах значений входных переменных, называются тождественно-ложными.

Законы логики

$$X \& Y \vee X \& Y \& Z \vee X \& Z \& P \quad = \quad X \& (Y \vee Z \& P)$$

Логические функции называются равносильными, если их истинностные значения совпадают при любых значениях, входящих в них логических переменных.

Формула имеет **нормальную форму**, если в ней отсутствуют знаки эквивалентности, импликации двойного отрицания, при этом знаки отрицания находятся только при логических переменных.

Законы логики

Законы и правила	Для дизъюнкции	Для конъюнкции
Переместительный	$x \vee y = y \vee x$	$x \,\&\, y = y \,\&\, x$
Сочетательный	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \,\&\, (y \,\&\, z) = (x \,\&\, y) \,\&\, z$
Распределительный	$x \,\&(y \vee z) = x \,\&\, y \vee x \,\&\, z$	$x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$
Закон де Моргана и его следствие	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$ $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$	$\overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ $\overline{(x \rightarrow y)} = x \,\&\, \bar{y}$
Идемпотенции	$x \vee x = x$	$x \,\&\, x = x$
Поглощения	$x \vee x \,\&\, y = x$	$x \,\&\, (x \vee y) = x$
Склеивания	$(x \,\&\, y) \vee (\bar{x} \,\&\, y) = y$	$(x \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee y) = y$
Операция переменной с ее инверсией	$x \vee \bar{x} = 1$	$x \,\&\, \bar{x} = 0$
Операция с константой	$x \vee 0 = x$ $x \vee 1 = 1$	$x \,\&\, 0 = 0$ $x \,\&\, 1 = x$
Двойное отрицание	$\bar{\bar{x}} = x$	

Преобразование логического выражения

Упростить логическое выражение $F=\overline{(A \vee B)\to\overline{(B \vee C)}}$

1. Избавимся от импликации и отрицания.

$$\overline{(A \vee B)\to\overline{(B \vee C)}}=(A \vee B)\&\overline{\overline{(B \vee C)}}$$

2. Применим закон двойного отрицания.

$$(A \vee B)\&\overline{\overline{(B \vee C)}}=(A \vee B)\&(B \vee C)$$

3. Применим закон дистрибутивности.

$$(A \vee B)\&(B \vee C)=(A \vee B)\&B \vee (A \vee B)\&C$$

Преобразование логического выражения

4. Применим закон коммутативности и закон дистрибутивности.

$$(A \vee B)\&B \vee (A \vee B)\&C = A\&B \vee B\&B \vee A\&C \vee B\&C$$

5. Применим закон идемпотенции.

$$A\&B \vee B\&B \vee A\&C \vee B\&C = A\&B \vee B \vee A\&C \vee B\&C$$

6. Применим закон дистрибутивности, вынесем за скобки В.

$$A\&B \vee B \vee A\&C \vee B\&C = B\&(A \vee 1) \vee A\&C \vee B\&C$$

Преобразование логического выражения

7. Применим правило операции с константой.

$$B \& (A \vee 1) \vee A \& C \vee B \& C = B \vee A \& C \vee B \& C$$

8. Применим переместительный закон и вынесем B за скобки используя дистрибутивный закон.

$$B \vee A \& C \vee B \& C = B \& (1 \vee C) \vee A \& C$$

9. Применим правило операции с константой.

$$B \& (1 \vee C) \vee A \& C = B \vee A \& C$$

Ответ: $F = \overline{(A \vee B) \to \overline{(B \vee C)}} = B \vee A \& C$

Решение логических задач

Задача №1

Маша, Саша и Миша во время летней практики нашли старинную амфору и показали учителю истории. Он попросил высказать каждого из них предположение о том, что это за амфора. Ребята сказали:

Маша: «Эта амфора греческая и изготовлена в 5 веке»;
Саша: «Эта амфора финикийская и изготовлена в 3 веке»;
Миша: «Эта амфора не греческая и изготовлена в 4 веке».

Каждый из ребят оказался прав только в одном предположении. Где и в каком веке была изготовлена амфора.

Решение

1. A – «Греческая амфора» C – «Изготовлена в III веке»

   B – «Изготовлена в V веке» D – «Изготовлена IV в веке»

2. Маша: «Греческая и изготовлена в V веке» $\overline{A} \& B \vee A \& B$

   Саша: «Не греческая и изготовлена в III веке» $\overline{\overline{A}} \& C \vee \overline{A} \& \overline{C}$

   Миша: «Не греческая и изготовлена в IV веке» $\overline{\overline{A}} \& D \vee \overline{A} \& \overline{D}$

Решение логических задач

3. $\left(\overline{A}\,\&\,B \vee A\,\&\,\overline{B}\right)\&\left(\overline{\overline{A}}\,\&\,C \vee \overline{A}\,\&\,\overline{C}\right)\&\left(\overline{\overline{A}}\,\&\,D \vee \overline{A}\,\&\,\overline{D}\right)=1$

1 способ – решение задачи путем построения таблицы истинности

Таблица истинности

Ответ: это финикийская амфора, которая была изготовлена в v веке.

Решение логических задач

3. $\left(\overline{A}\,\&\,B \vee A\,\&\,\overline{B}\right)\&\left(\overline{\overline{A}}\,\&\,C \vee \overline{A}\,\&\,\overline{C}\right)\&\left(\overline{\overline{A}}\,\&\,D \vee \overline{A}\,\&\,\overline{D}\right)=1$

2 способ – решение задачи путем упрощения логического выражения

$$\left(\overline{A}\,\&\,B \vee A\,\&\,\overline{B}\right)\&\left(\overline{\overline{A}}\,\&\,C \vee \overline{A}\,\&\,\overline{C}\right)\&\left(\overline{\overline{A}}\,\&\,D \vee \overline{A}\,\&\,\overline{D}\right)=$$

$$=\left(\overline{A}\,\&\,B\,\&\,A\,\&\,C \vee A\,\&\,\overline{B}\,\&\,A\,\&\,C \vee \overline{A}\,\&\,B\,\&\,\overline{A}\,\&\,\overline{C} \vee A\,\&\,\overline{B}\,\&\,\overline{A}\,\&\,\overline{C}\right)$$

$$\&\left(A\,\&\,D \vee \overline{A}\,\&\,\overline{D}\right)=\left(A\,\&\,\overline{B}\,\&\,C \vee \overline{A}\,\&\,B\,\&\,\overline{C}\right)\&\left(A\,\&\,D \vee \overline{A}\,\&\,\overline{D}\right)=$$

$$=A\,\&\,\overline{B}\,\&\,C\,\&\,A\,\&\,D \vee \overline{A}\,\&\,B\,\&\,\overline{C}\,\&\,A\,\&\,D \vee A\,\&\,\overline{B}\,\&\,C\,\&\,\overline{A}\,\&\,\overline{D} \vee$$

$$\vee\,\overline{A}\,\&\,B\,\&\,\overline{C}\,\&\,\overline{A}\,\&\,\overline{D}= A\,\&\,\overline{B}\,\&\,C\,\&\,D \vee \underline{\overline{A}\,\&\,B\,\&\,\overline{C}\,\&\,\overline{D}}$$

Ответ: это финикийская амфора, которая была изготовлена в v веке.

Решение логических задач

Этапы решения логических задач

1. Изучить условие задачи.
2. Ввести логические переменные для обозначения простых высказываний.
3. Формализовать условие задачи с помощью языка алгебры логики.
4. Составить конечную логическую формулу, описывающую все логические связи сформулированные условием задачи, прировнять к 1.
5. Упростить формулу и/или построить таблицу истинности.
6. Проанализировать условие задачи.
7. Записать ответ.

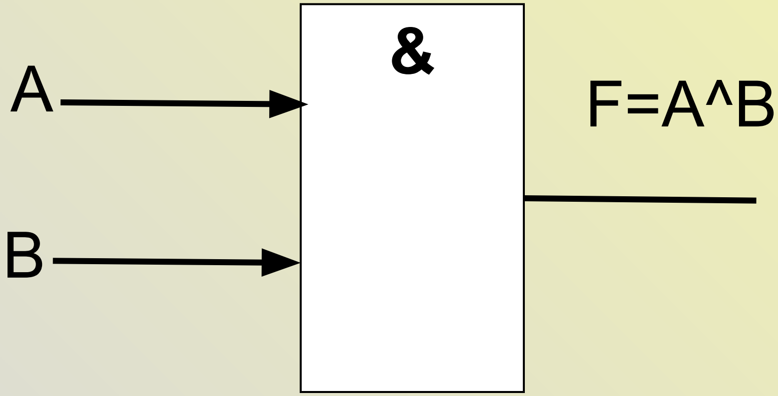
Логические схемы

Базовые логические элементы реализуют три основные логические операции:

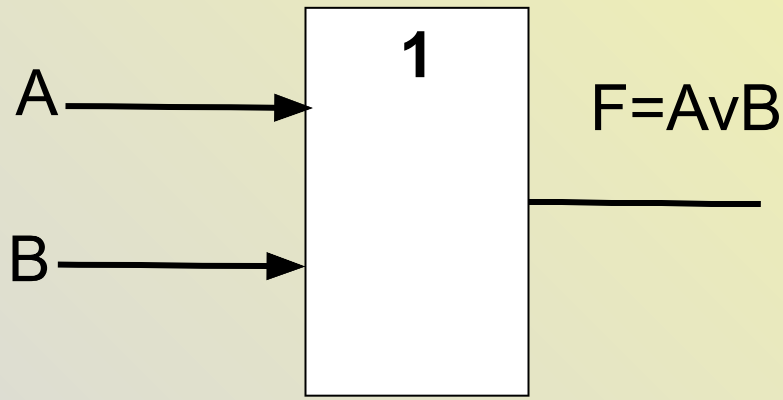
- Логический элемент «И» - конъюнктор.
- Логический элемент «ИЛИ»-дизъюнктор.
- Логический элемент «НЕ»-инвертор.

Логические элементы оперируют с сигналами, импульсами. Есть импульс - логический смысл сигнала - 1, нет импульса – 0. На входы поступают сигналы – значения аргументов, на выходе появляется сигнал – значение функции.

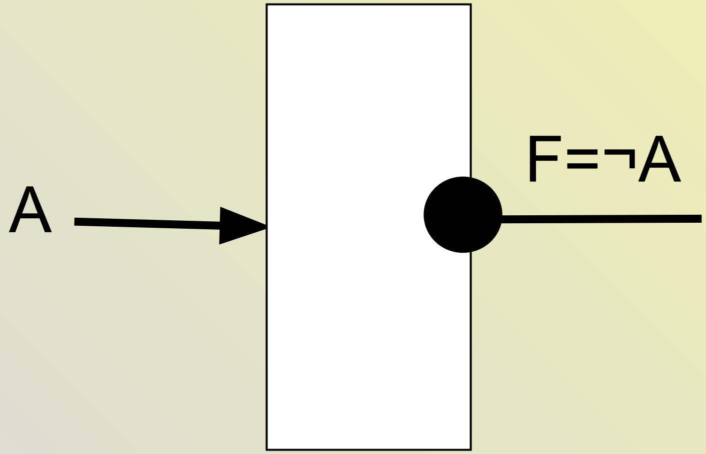
Логический элемент «И»



Логический элемент «ИЛИ»



Логический элемент «НЕ»



Так как сигнал, выработанный одним логическим элементом, можно подавать на вход другого, то эта дает возможность образовывать цепочки из отдельных логических элементов. Каждую такую цепочку будем называть схемой логического устройства.

Правила построения логических схем:

1) определить число логических переменных;
2) определить количество базовых логических операций и их порядок;
3) изобразить для каждой логической операции соответствующий элемент;
4) составить элементы в порядке выполнения логических операций.

Задание 1.

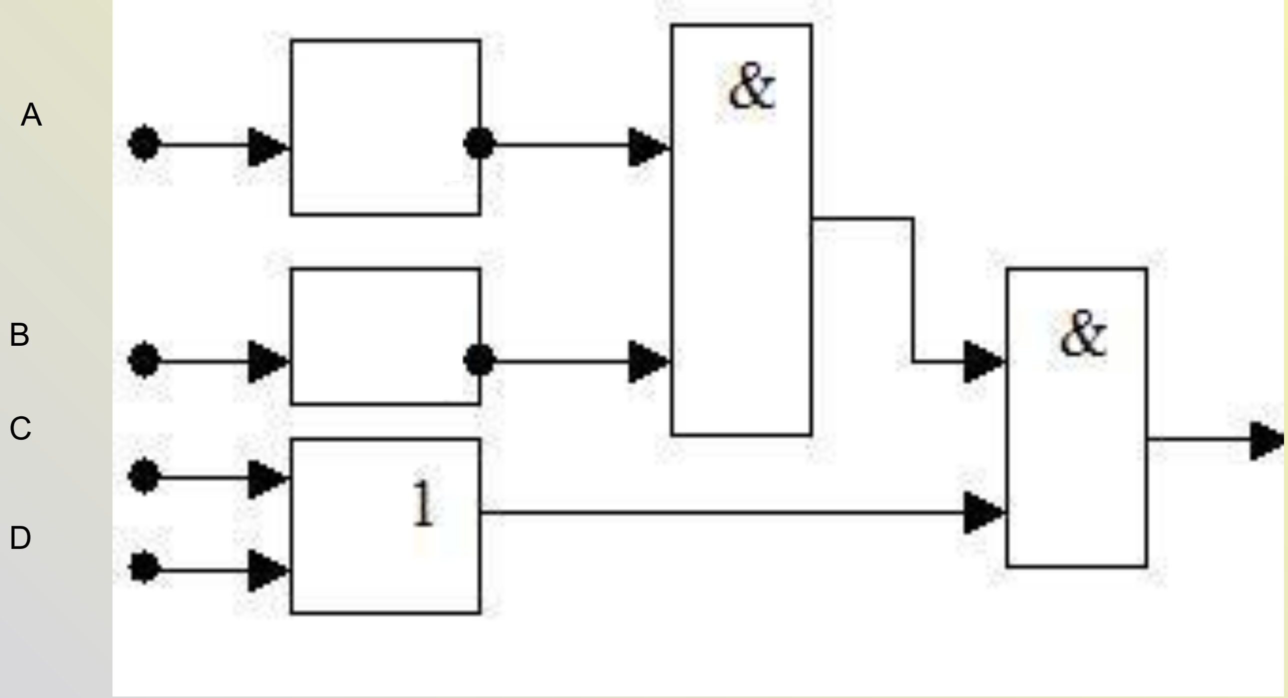
1. Построить логическую схему по логической функции: **F = (⌐A & ⌐B)&(CvD)**

Решение:

У нас в формуле имеется 4 логических переменных A,B,C,D. С помощью них составлено 5 базовых логических операций. Порядок выполнения операций будет следующий:

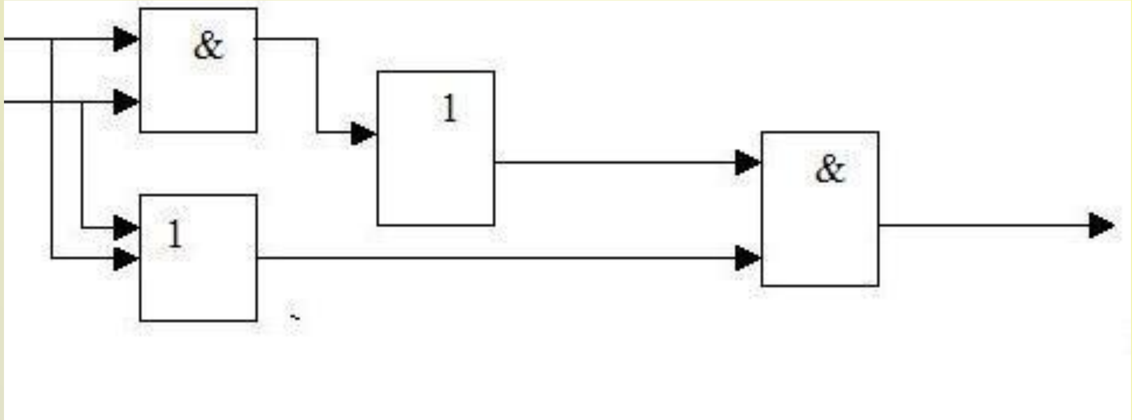
1) ⌐A- логический элемент «НЕ»
2) ⌐B - логический элемент «НЕ»
3) (⌐A& ⌐B) - логический элемент «И»
4) (CvD) - логический элемент «ИЛИ»
5) (⌐A & ⌐B)&(CvD) - логический элемент «И»

Логическая схема:



Задание 2.

Дана функциональная схема рисунок, составить логическую формулу.



Обозначим входные сигналы А и В, эти сигналы одновременно поступают на логические элементы "И" и "или", но учитывая иерархию выполнения операций сначала выполним:

1) A&B
2) AvB
3) ⌐(A&B)
4) (AvB)& ⌐(A&B)

Ответ: логическая формула **F=(AvB)& ⌐(A&B)**.