

Прямые и плоскости в пространстве

Часть 2_2



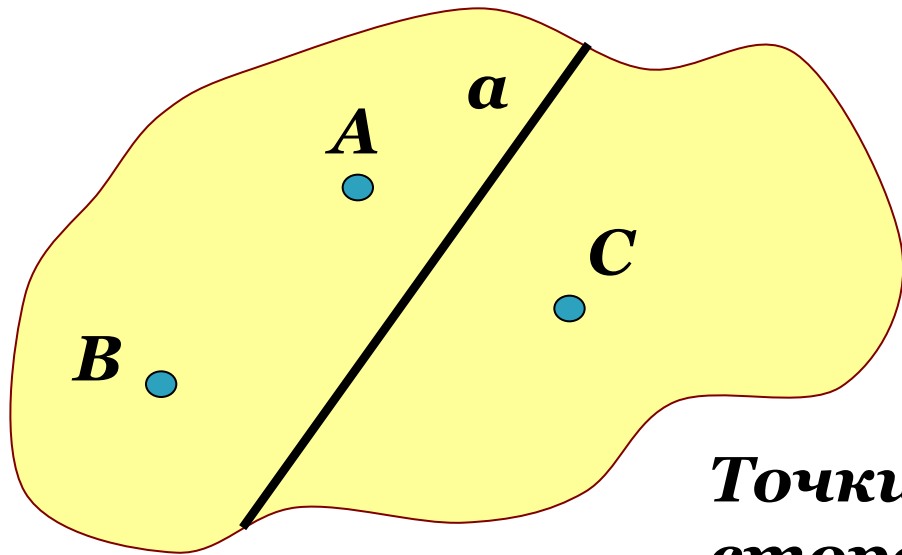
Презентацию подготовила учитель математики
МБОУ СОШ №4 г.Покачи ХМАО-Югра
Литвинченко Л.В.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Угол между прямыми.



Любая прямая a , лежащая в плоскости, разделяет плоскость на две части, называемые **полуплоскостями**.



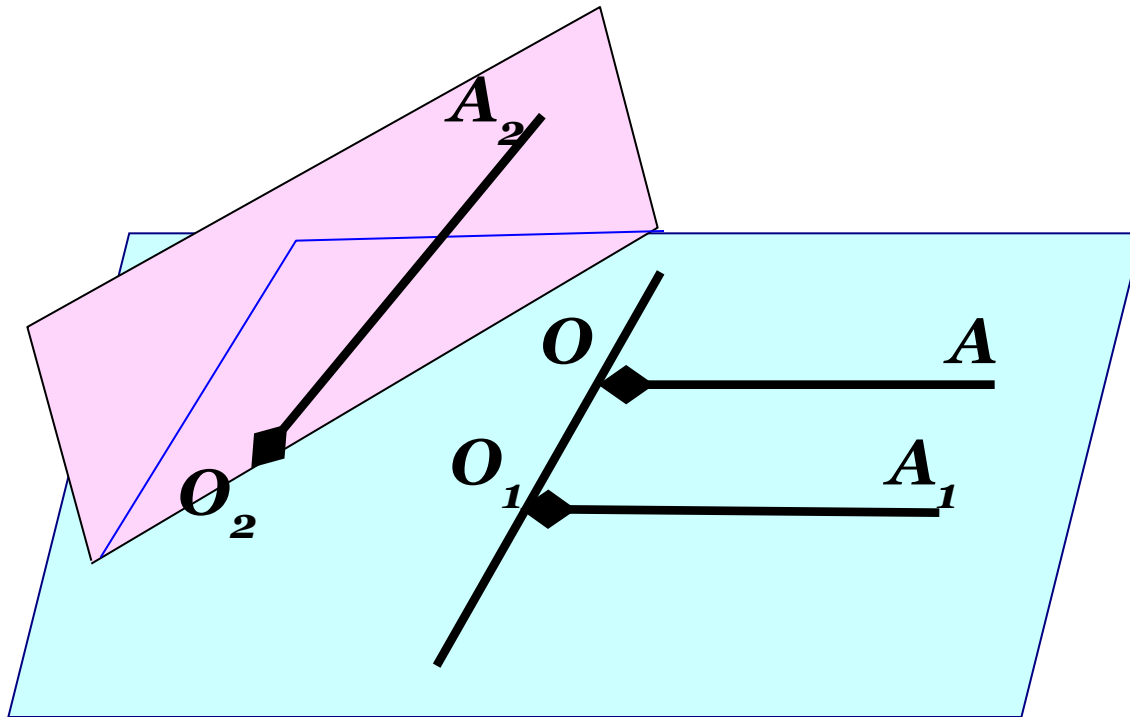
a – граница полуплоскостей.

Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a .

Точки A и C лежат по разные стороны от прямой a .



Углы с сонаправленными сторонами.



Лучи OA и O_1A_1 не лежат на одной прямой, параллельны, лежат в одной полуплоскости с границей $OO_1 \rightarrow$

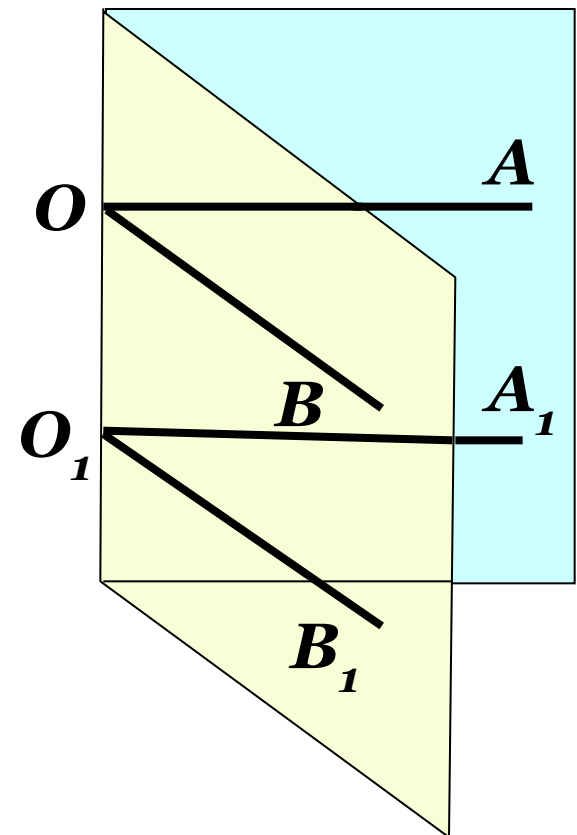
сонаправленные

Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

**Дано: угол O и угол O_1
с сонаправленными
сторонами.**

Доказать: $\angle O = \angle O_1$



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Доказательство:

Отметим точки A, B, A_1 и B_1 , такие что $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1$.

1. Рассмотрим OAA_1O_1 :

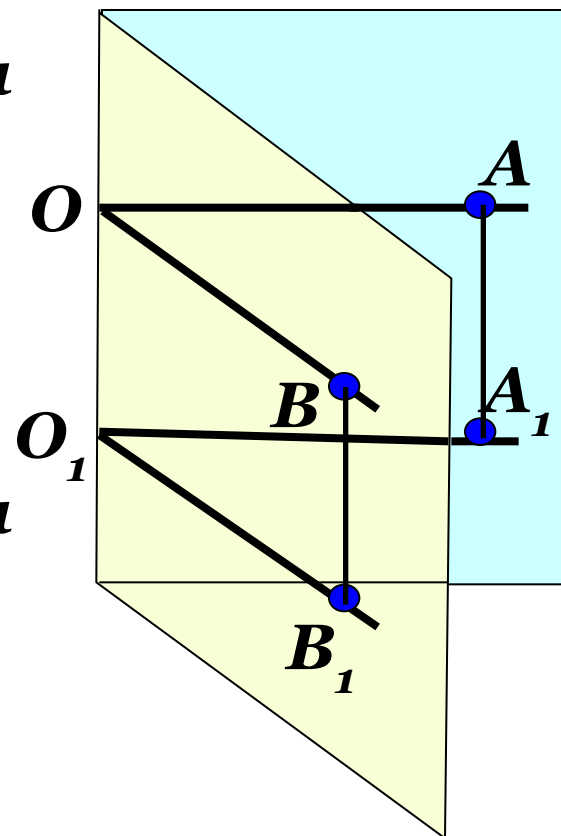
$OA \parallel O_1A_1 \xrightarrow{\text{---}}$
 $OA = O_1A_1 \mid OAA_1O_1$ – параллелограмм
(по признаку).

Значит, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$.

2. Рассмотрим OBV_1O_1 :

$OB \parallel O_1B_1 \xrightarrow{\text{---}}$
 $OB = O_1B_1 \mid OBV_1O_1$ – параллелограмм
(по признаку).

Значит, $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$.



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Вывод:

$$AA_1 \parallel OO_1 \text{ и } BB_1 \parallel OO_1, \implies AA_1 \parallel BB_1$$

$$AA_1 = OO_1 \text{ и } BB_1 = OO_1, \implies AA_1 = BB_1$$

Следовательно,
четырехугольник AA_1B_1B –
параллелограмм (по признаку).

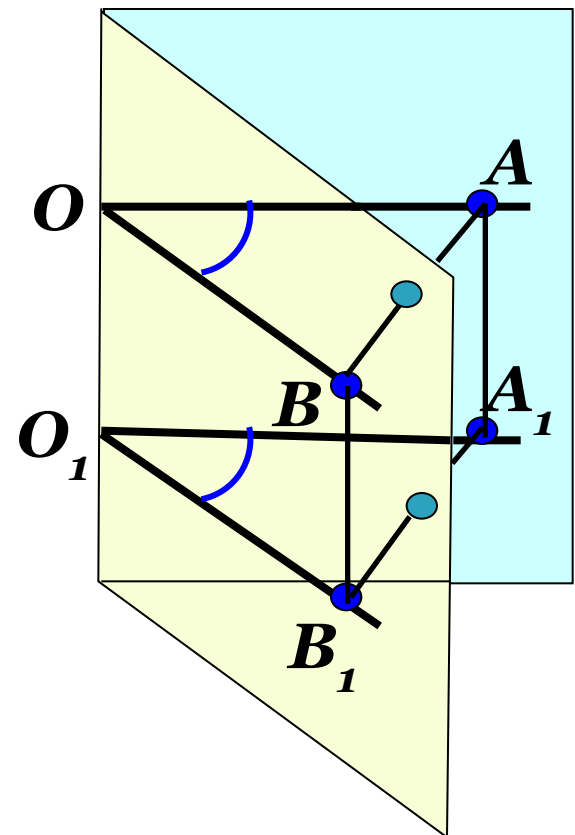
$$AB = A_1B_1$$

3. Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle A_1B_1O_1$.

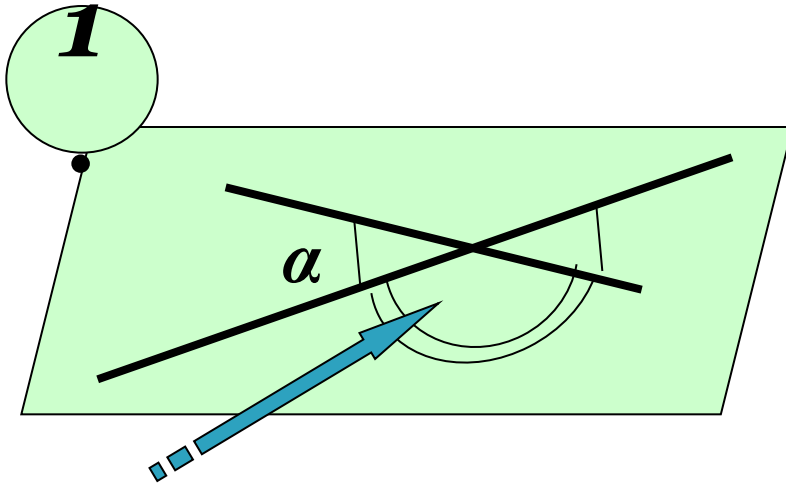
$$\triangle ABO = \triangle A_1B_1O_1$$

(по трем сторонам)

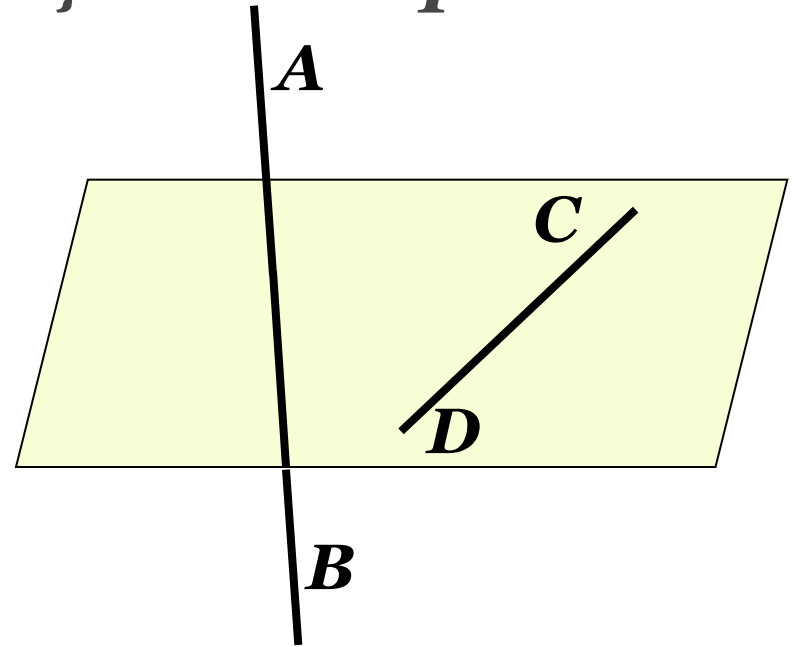
Вывод: $\angle O = \angle O_1$



Угол между скрещивающимися прямыми.

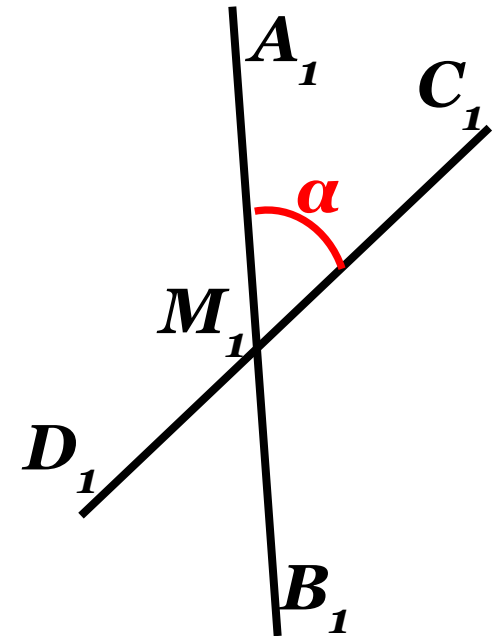


$$180^\circ - \alpha \quad 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$



2

Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как угол между пересекающимися прямыми A_1B_1 и C_1D_1 , при этом $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$.



3

Практическое задание.

- ▣ Выбрать любую точку M_2 .
- ▣ Построить $A_2B_2 \parallel AB$ и $C_2D_2 \parallel CD$.
- ▣ Ответить на вопросы:

1. Почему $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ и $C_2D_2 \parallel C_1D_1$?

2. Являются ли углы $A_1M_1D_1$ и $A_2M_2D_2$ углами с соответственно параллельными сторонами?

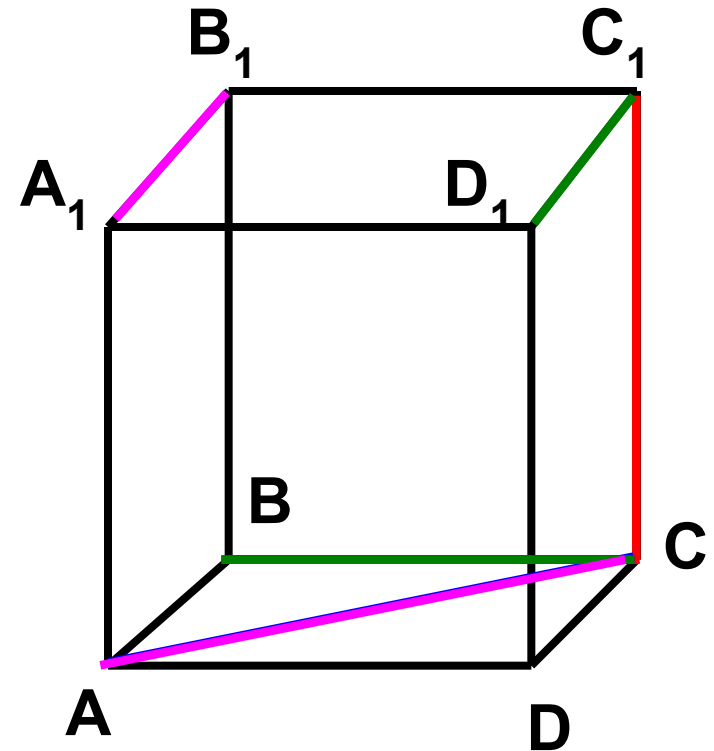
Вывод:

1. $\angle A_1M_1D_1 = \angle A_2M_2D_2$

2. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки.

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
Найдите угол между прямыми:

1. BC и CC_1 90°
2. AC и BC 45°
3. $D_1 C_1$ и BC 90°
4. $A_1 B_1$ и AC 45°



Задача

Дано: $OB \parallel CD$,

OA и CD – скрещивающиеся.

Найти угол между OA и CD , если:

а) $\angle AOB = 40^\circ$

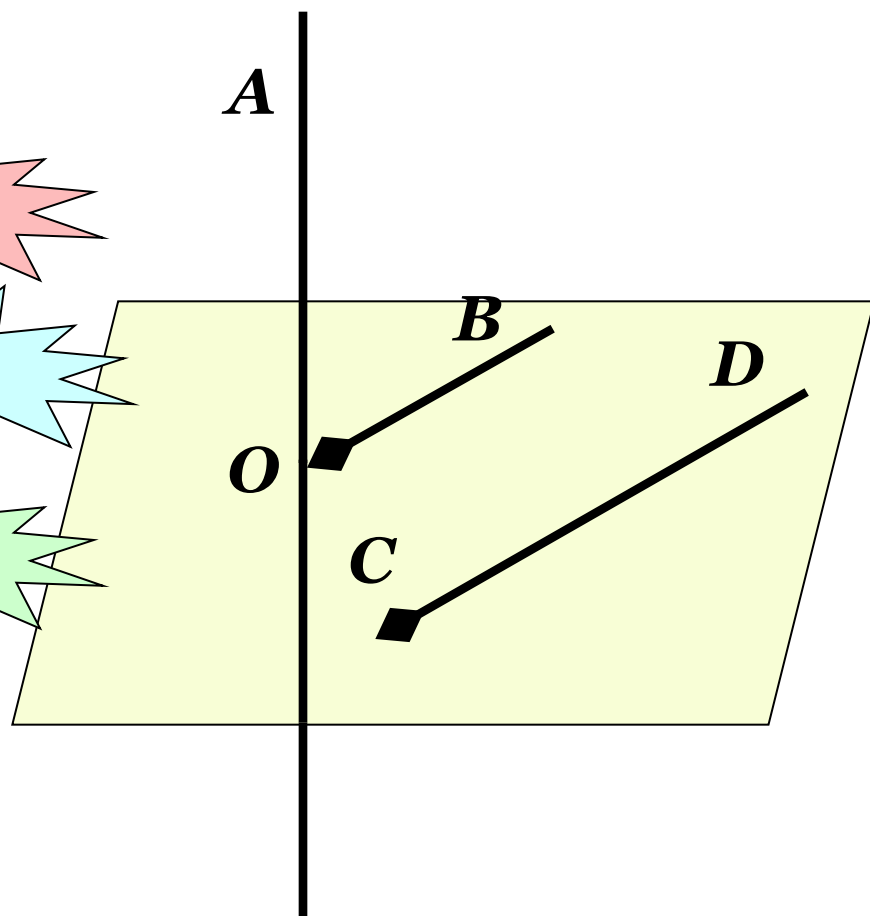
40°

б) $\angle AOB = 135^\circ$

45°

в) $\angle AOB = 90^\circ$

90°



Дополнительная задача.

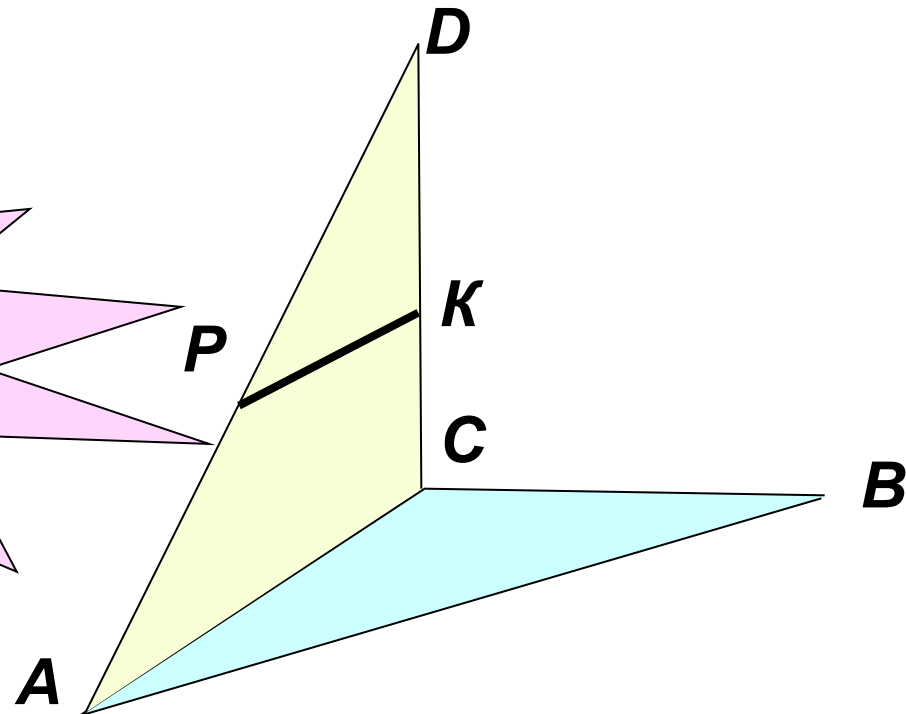
Треугольники ABC и ACD лежат в разных плоскостях. PK – средняя линия $\triangle ADC$ с основанием AC .

Определить взаимное расположение прямых PK и AB , найти угол между ними, если $\angle C = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$

Ответ:

1) AB и PK
скрещивающиеся

2) 60°

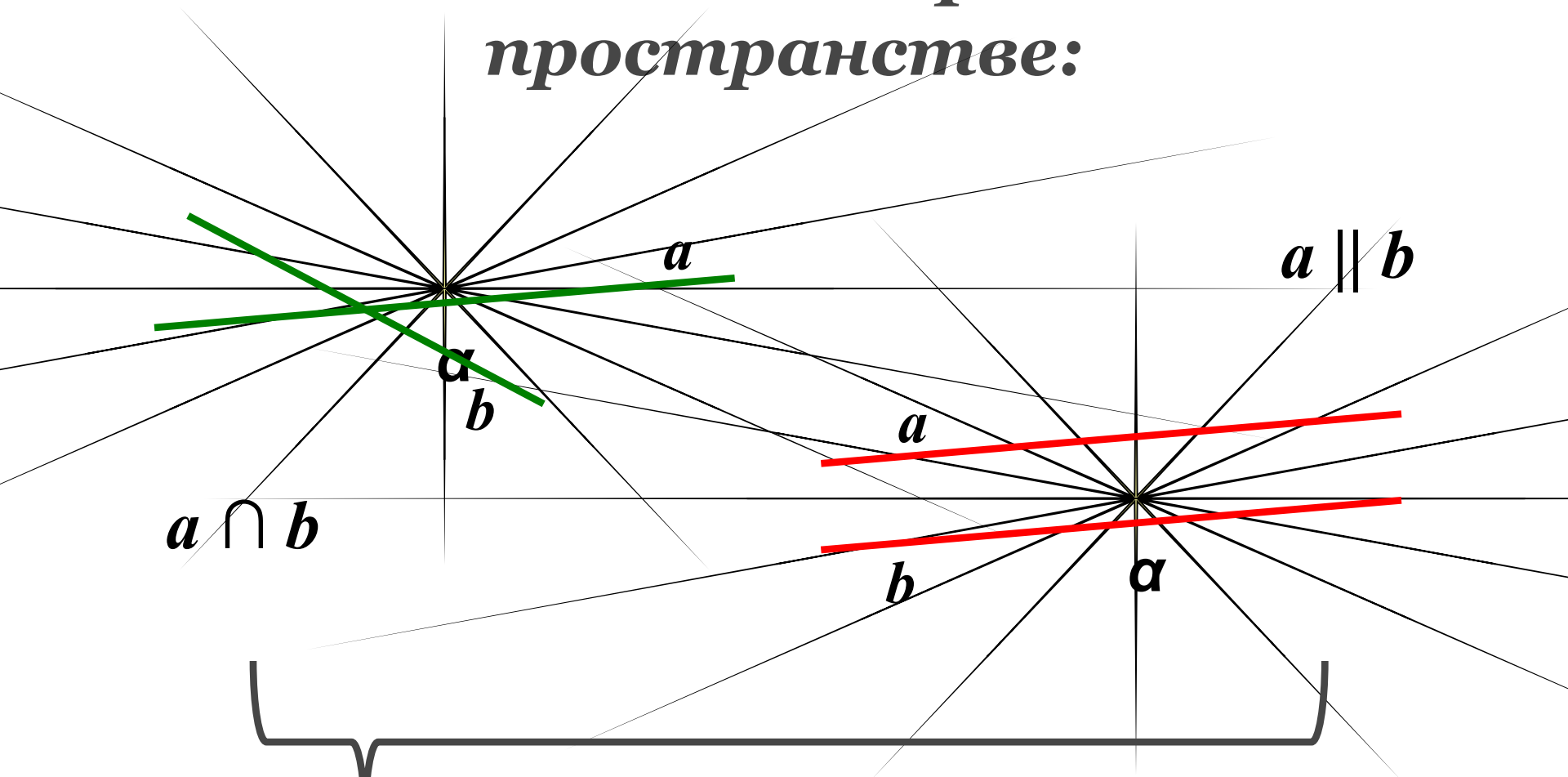


*Взаимное расположение
прямых в пространстве.*

Скрещивающиеся прямые.

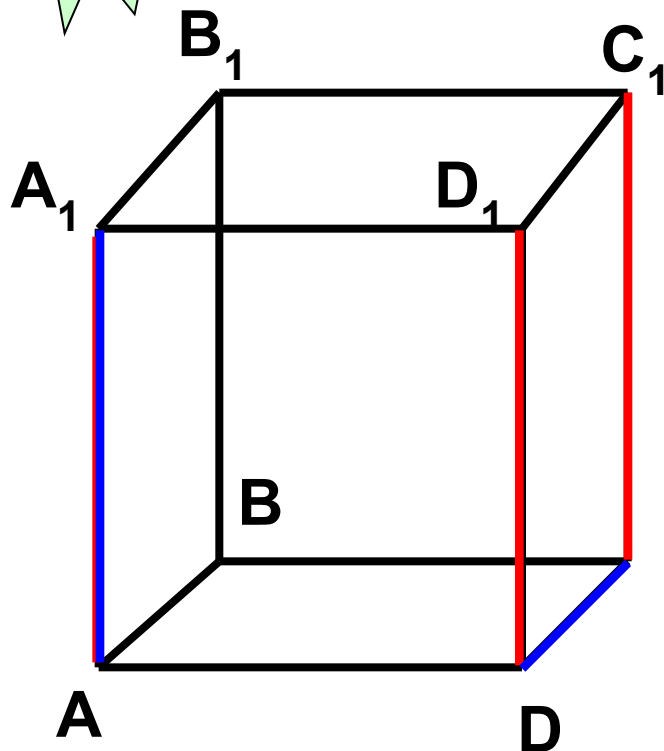


Расположение прямых в пространстве:



Лежат в одной плоскости!

???



Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, как

противоположные стороны квадрата, лежат в одной

плоскости и не

$$AA_1 \parallel DD_1; DD_1 \parallel CC_1 \rightarrow AA_1 \parallel CC_1$$

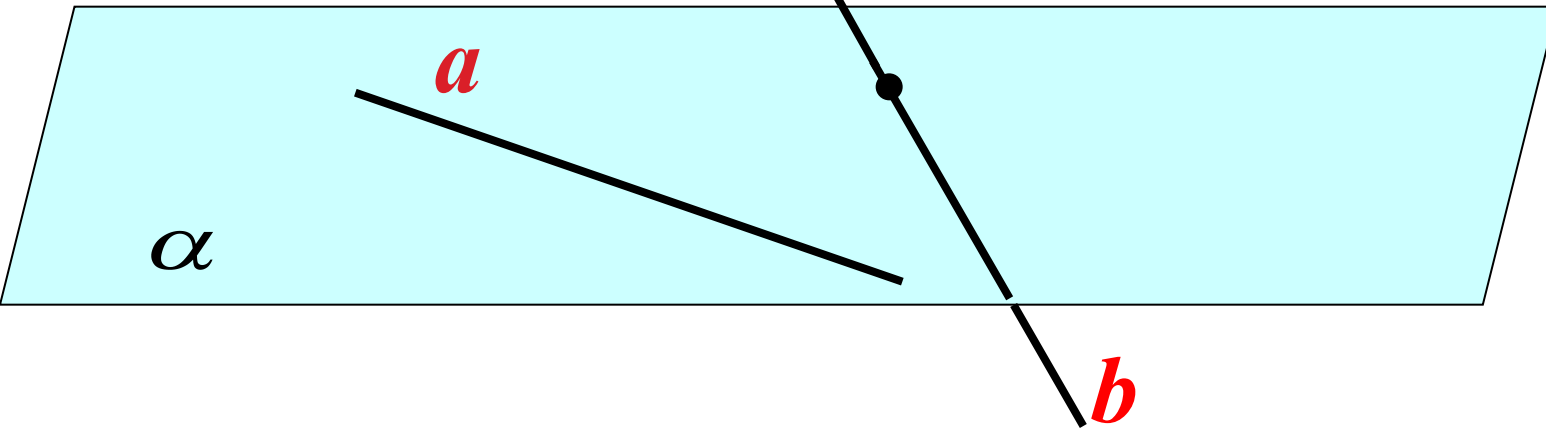
по теореме о трех

параллельных прямых.

2. Являются ли AA_1 и DC параллельными? Они пересекаются?

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

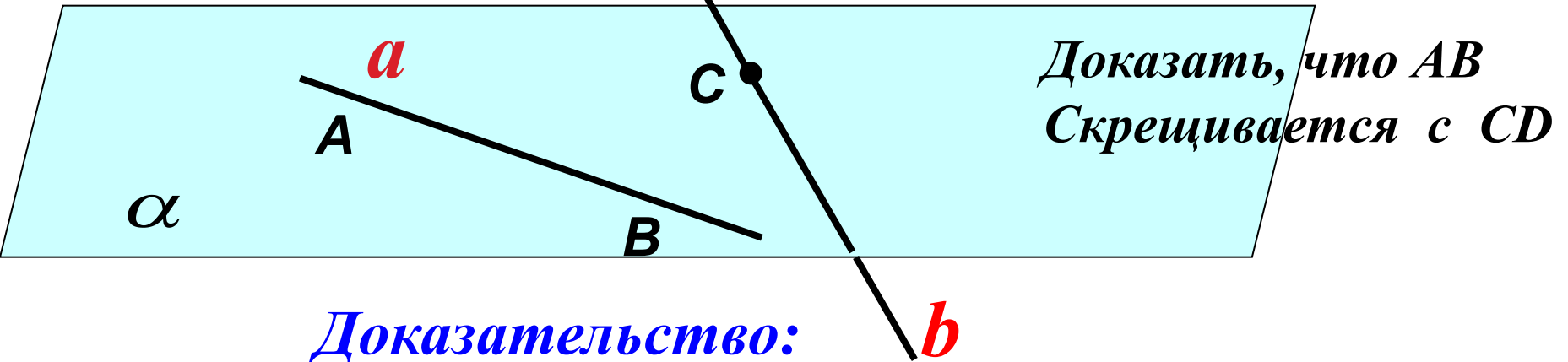
Признак скрещивающихся прямых.



- Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые **скрещивающиеся**.

Признак скрещивающихся прямых.

Дано: $AB \subset \alpha$, $CD \cap \alpha = C$, $C \in AB$.



Доказательство:

Допустим, что CD и AB лежат в одной плоскости.

Пусть это будет плоскость β .

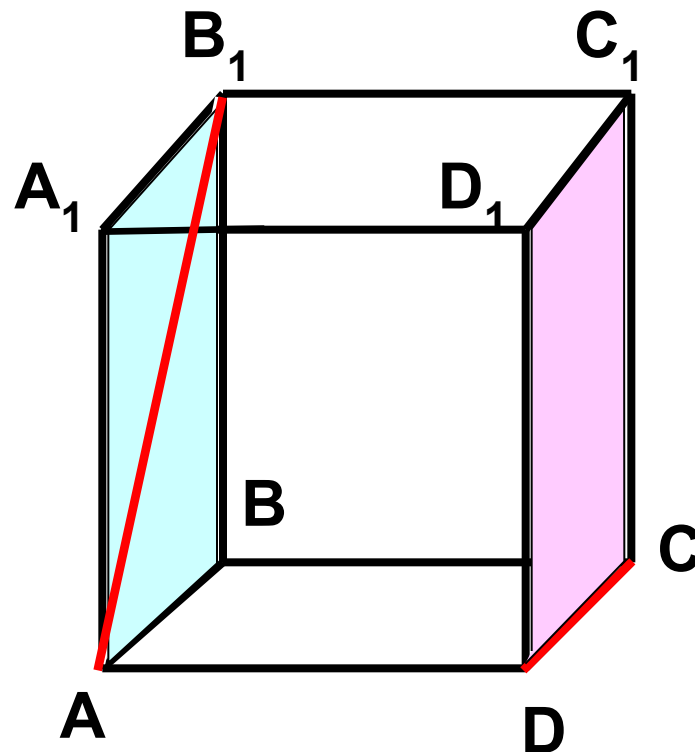
$C \in \alpha$ и $C \in \beta$		→	α совпадает с β
$AB \subset \alpha$ и $AB \subset \beta$			

Плоскости совпадают, чего быть не может, т.к. прямая CD пересекает α . Плоскости, которой принадлежат AB и CD не существует и следовательно по определению скрещивающихся прямых AB скрещивается с CD .

Ч.т.д.

Закрепление изученной теоремы:

1. Определить взаимное расположение прямых AB_1 и DC .
2. Указать взаимное расположение прямой DC и плоскости AA_1B_1B .
3. Является ли прямая AB_1 параллельной плоскости DD_1C_1C ?



Теорема:

- ▣ **Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой плоскости, и притом только одна.**

Дано: AB скрещивается с CD .

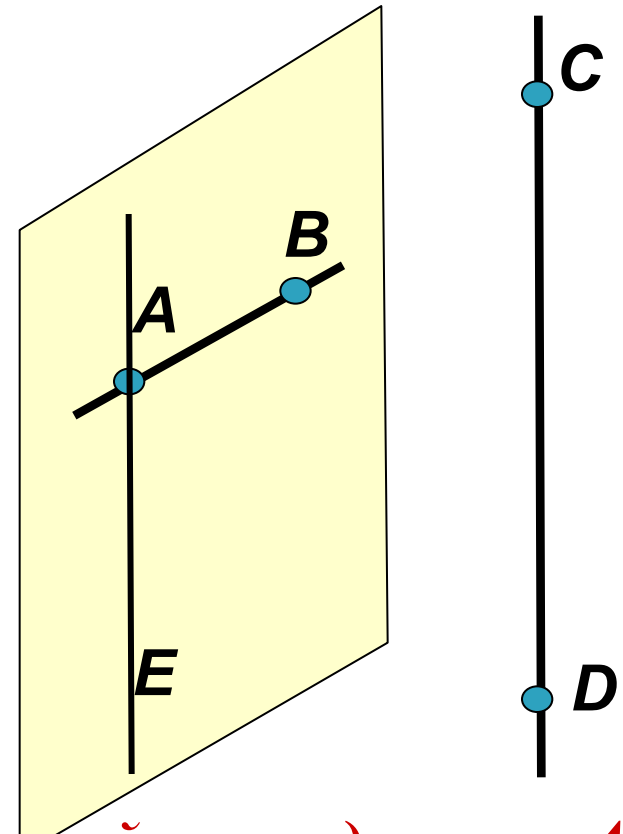
Построить α : $AB \subset \alpha$, $CD \parallel \alpha$.

Доказать, что α – единственная.

- 1. Через точку A проведем прямую AE , $AE \parallel CD$.*
- 2. Прямые AB и AE пересекаются и образуют плоскость α . $AB \subset \alpha$, $CD \parallel \alpha$. α – единственная плоскость.*

3. Доказательство:

α – единственная по следствию из аксиом. Любая другая плоскость, которой принадлежит AB , пересекает AE и, следовательно, прямую CD .

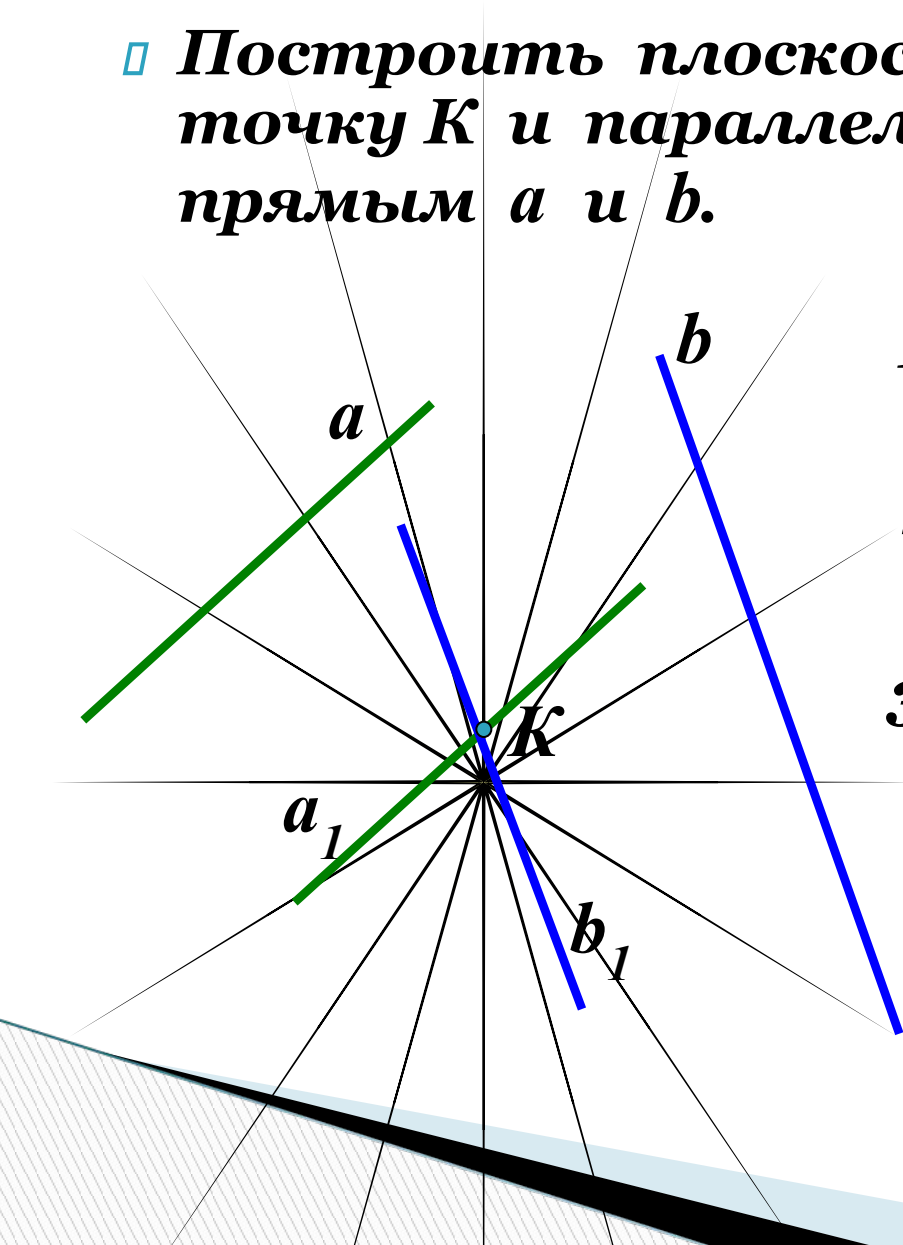


Задача.

▣ Построить плоскость α , проходящую через точку K и параллельную скрещивающимся прямым a и b .

Построение:

1. Через точку K провести прямую $a_1 \parallel a$.
2. Через точку K провести прямую $b_1 \parallel b$.
3. Через пересекающиеся прямые проведем плоскость α . α – искомая плоскость.



Задача

Дано: $D \notin (ABC)$,

$AM = MD$; $BN = ND$; $CP = PD$

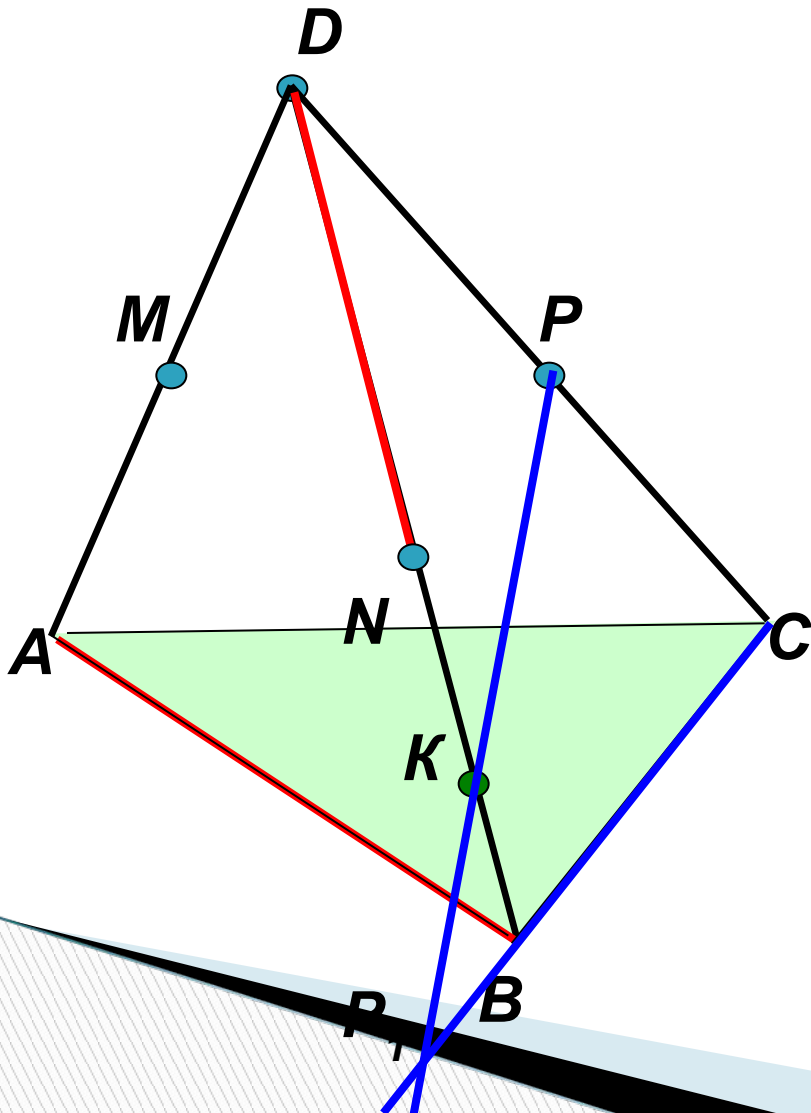
$K \in BN$.

Определить взаимное
расположение прямых:

а) ND и AB

б) PK и BC

в) MN и AB



Задача

Дано: $D \notin (ABC)$,

$AM = MD$; $BN = ND$; $CP = PD$

$K \in BN$.

Определить взаимное
расположение прямых:

а) ND и AB

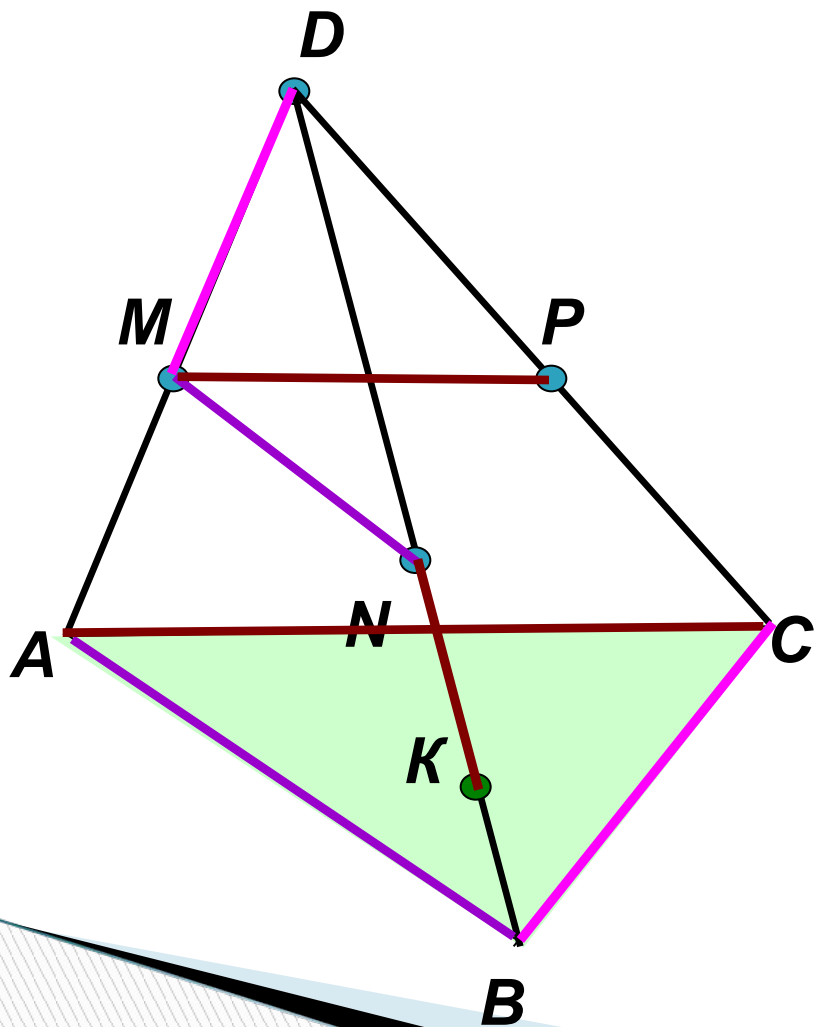
б) PK и BC

в) MN и AB

г) MP и AC

д) KN и AC

е) MD и BC

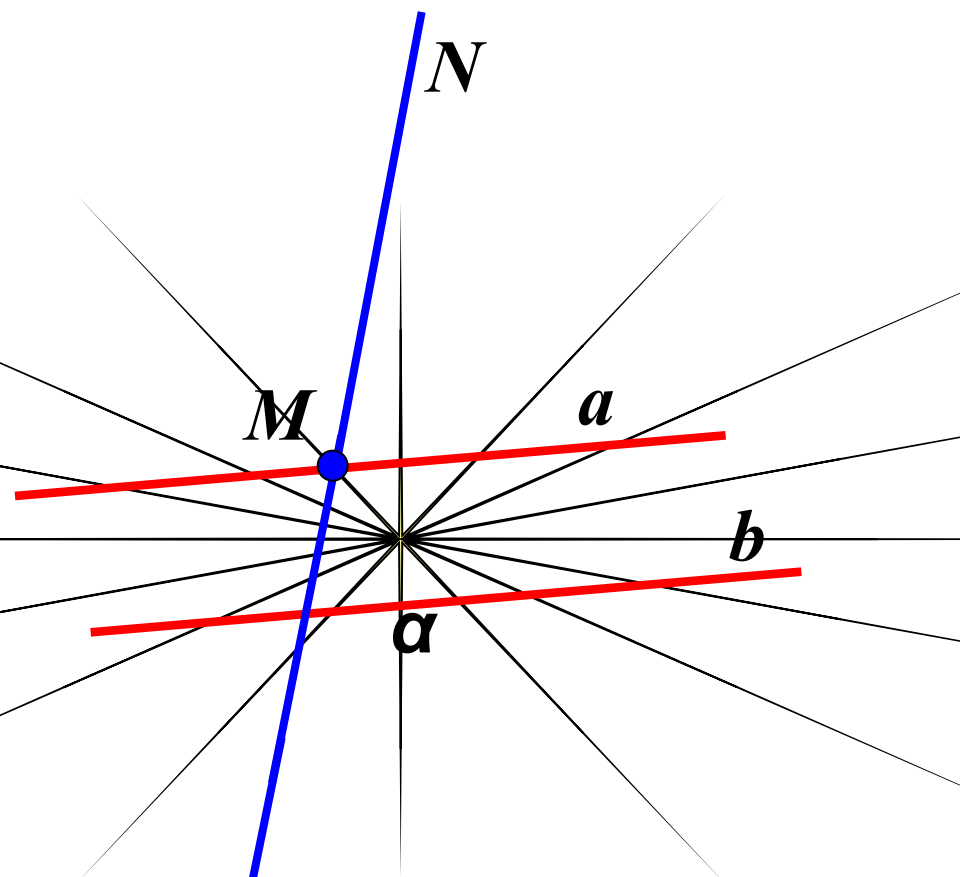


Задача

Дано: $a \parallel b$

$MN \cap a = M$

Определить
взаимное расположение
прямых MN и b .



Скрещивающиеся.

Взаимное расположение плоскостей

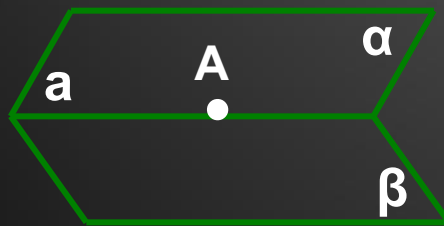
Плоскости имеют одну общую точку

Плоскости не имеют общих точек

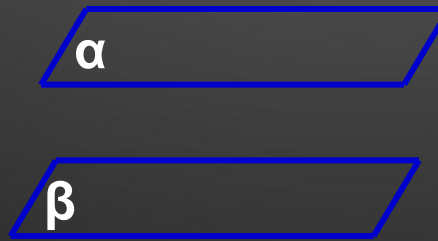
Плоскости совпадают

Плоскости пересекаются по прямой

Плоскости параллельны



$$\begin{array}{l} A \in \alpha, \\ A \in \beta \end{array} \Rightarrow \alpha \cap \beta = a, \quad A \in a$$



$$\alpha \parallel \beta$$



$$\alpha = \beta$$

Начало и продолжение теории: часть 1, 2_1,3

