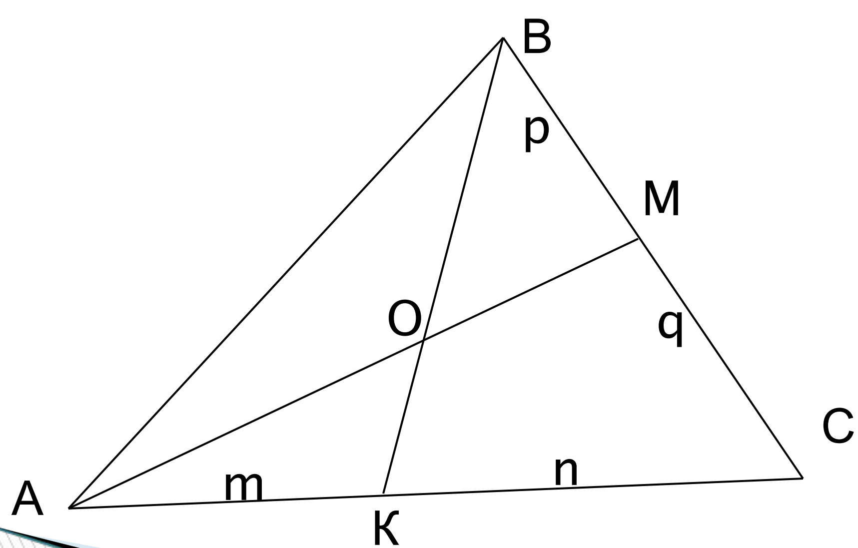
ТЕОРЕМА

ЧЕВЫ

Теорема
о пропорциональных отрезках.

- На сторонах АС и ВС треугольника АВС отмечены точки К и М так, что АК:КС = m:n, ВМ:МС= p:q. Отрезки АМ и ВК пересекаются в точке О. Тогда верно:



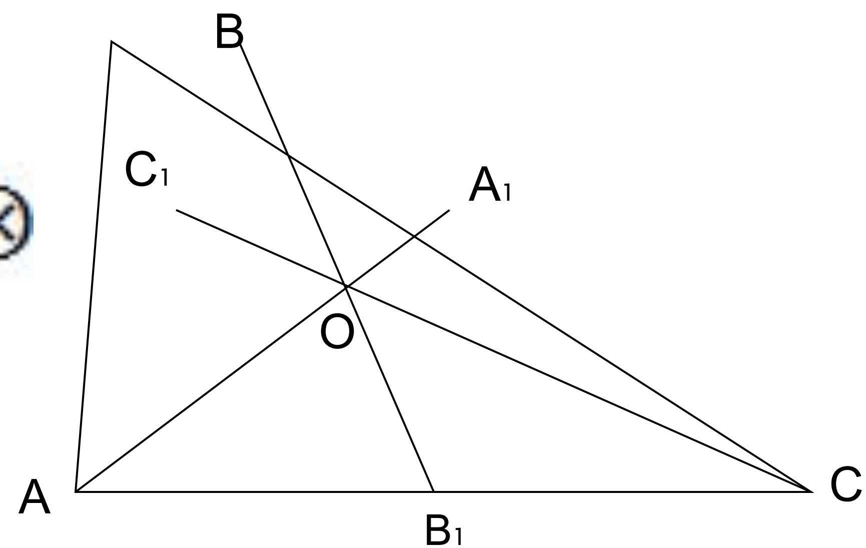
$$AO:OM = \frac{m}{n}\left(\frac{q}{p} + 1\right)$$

$$BO:OK = \frac{p}{q}\left(\frac{n}{m} + 1\right)$$

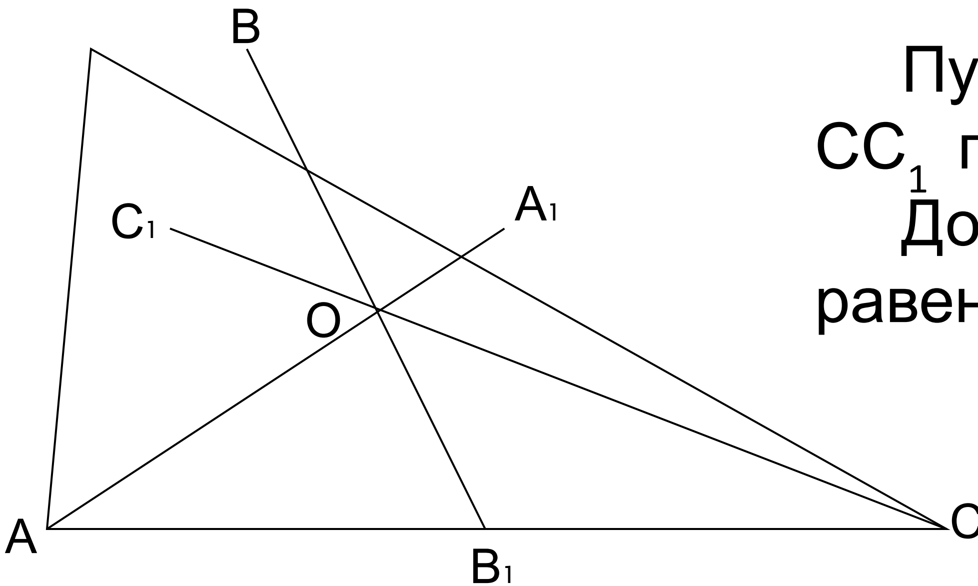
ТЕОРЕМА ЧЕВЫ.

- Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad \otimes$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.



Пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O.
Докажем, что выполнено равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$

По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике (по Т о проп. отр.) имеем:

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{CA_1}{A_1B}+1\right) \text{ и } \frac{AO}{OA_1}=\frac{AC_1}{C_1B}\left(\frac{BA_1}{A_1C}+1\right).$$

Левые части равны, приравняем правые части.

$$\frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{CA_1}{A_1B}+1\right)=\frac{AC_1}{C_1B}\left(\frac{BA_1}{A_1C}+1\right) \qquad \frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{A_1B+CA_1}{A_1B}\right)=\frac{C_1A}{BC_1}\left(\frac{CA_1+A_1B}{CA_1}\right);$$

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{BC}{A_1B}=\frac{C_1A}{BC_1}\cdot\frac{BC}{CA_1}$$

Разделив обе части на правую часть получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{BC}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{CA_1}{BC}=1;$$

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$

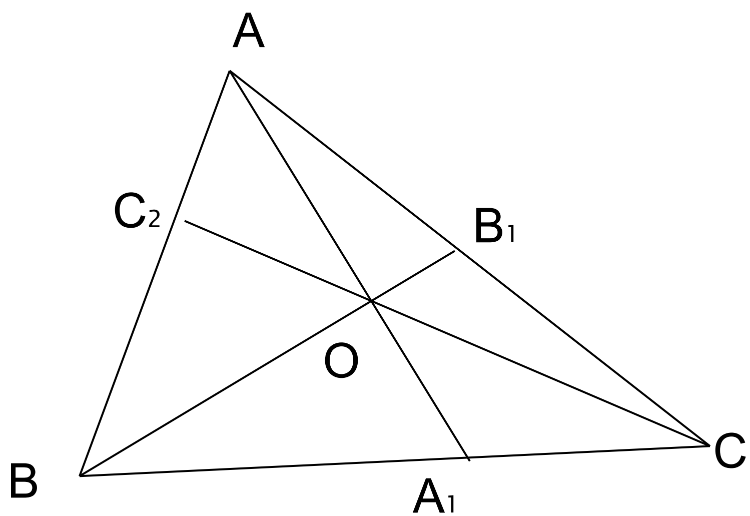
ч.т.д.

Докажем обратное:

Если выполняется равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1 \quad \otimes$$

то в CC_1 пересекаются в одной точке.



Обозначим буквой О точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 и проведём прямую СО.

Она пересекает сторону АВ в некоторой точке, которую обозначим C_2.

Так как отрезки AA_1, BB_1 и CC_2 пересекаются в одной точке, то по доказанному выполняется

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1 \quad \otimes\otimes$$

Итак, имеют место равенства $\otimes$ и $\otimes\otimes$

Сопоставим их:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1 \quad \text{и} \quad \frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1$$

и получим:

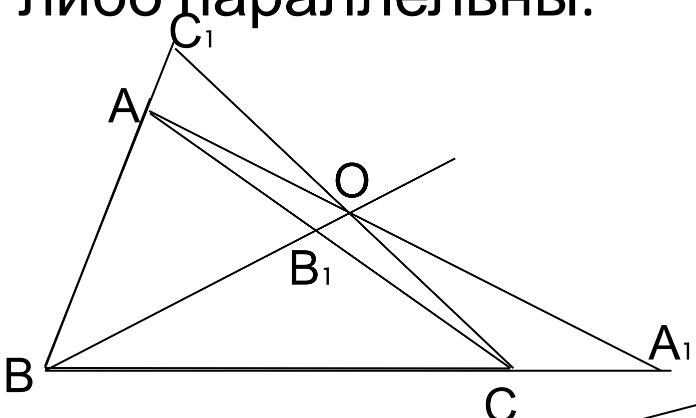
$$\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC_2}{C_2A}$$

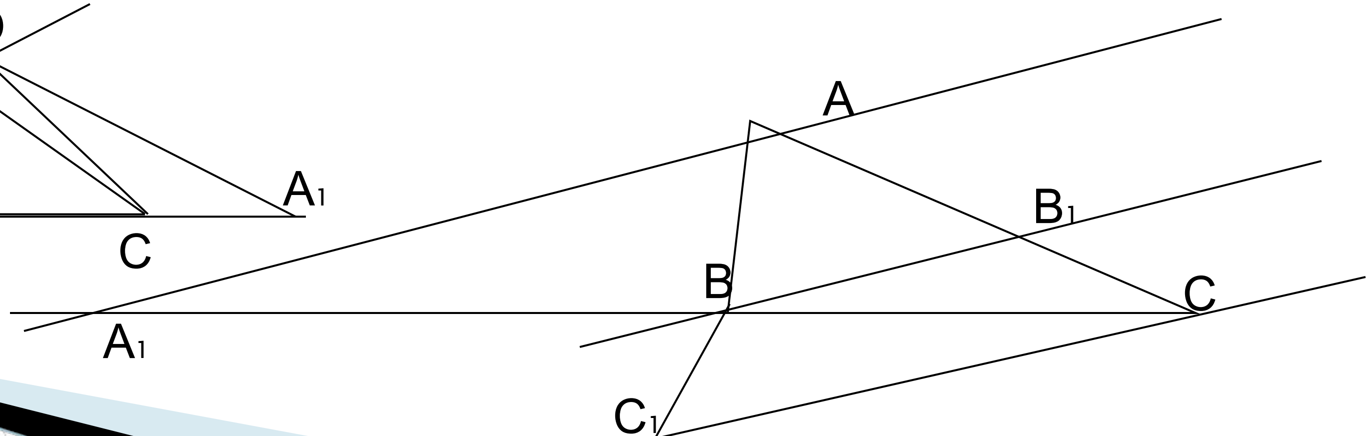
что доказывает, что точки C_1 и C_2 делят сторону AB в одном и том же отношении, т.е. C_1 и C_2 совпадают и значит отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O.

Теорема доказана.

Замечание.

Если одну из точек A_1, B_1 и C_1 взять на соответствующей стороне, а две другие на продолжениях сторон, то справедливо следующее утверждение:
если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке
либо параллельны, то выполняется равенство
и обратно, если выполняется равенство
то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке
либо параллельны.





ЗАДАЧА 1. На стороне АС треугольника АВС взяты точки Р и Е,
на стороне ВС – точки М и К, причём АР : РЕ : ЕС = СК : КМ : МВ.
Отрезки АМ и ВР пересекаются в точке О, отрезки АК и ВЕ – в точке Т. Докажите, что О, Т и С лежат на одной прямой.

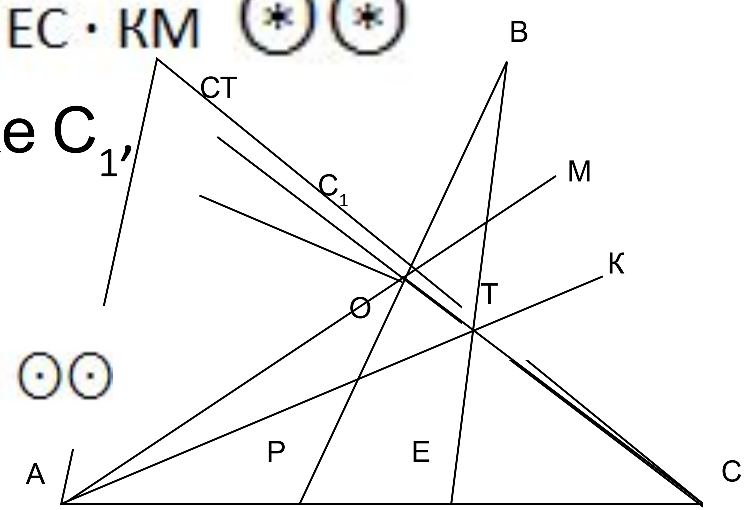
РЕШЕНИЕ.

АР:РЕ:ЕС=СК:КМ:МВ

$$\begin{array}{c} AP \\ \hline PE \\ \hline EC \end{array} = \begin{array}{c} CK \\ \hline KM \\ \hline MB \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{AP}{EP} = \frac{CK}{KM} \Rightarrow$$

АР·КМ=РЕ·СК (*)

$$\searrow \quad \frac{PE}{EC} = \frac{KM}{MB} \Rightarrow PE \cdot MB = EC \cdot KM \quad (*)(*)$$



Пусть луч СТ пересекает АВ в точке C_1, а луч СО в точке C_2, тогда по теореме Чевы:

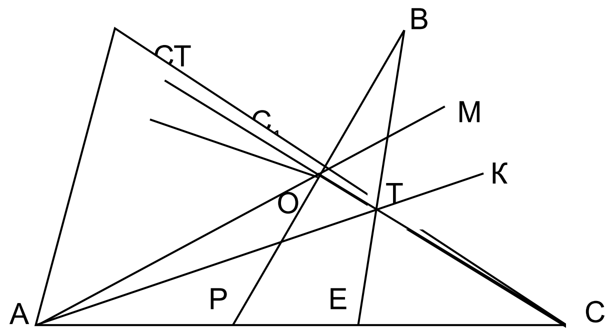
$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1 \ \odot \quad \text{или} \quad \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} = 1 \ \odot\odot$$

Преобразуем:

$$\odot\ \frac{BK}{KC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{(BM+MK)}{KC}\cdot\frac{CE}{(AP+PE)}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

$$\odot\odot\ \frac{BM}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{BM}{(MK+KC)}\cdot\frac{(CE+EP)}{AP}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=1$$

Приравняем и раскроем скобки:



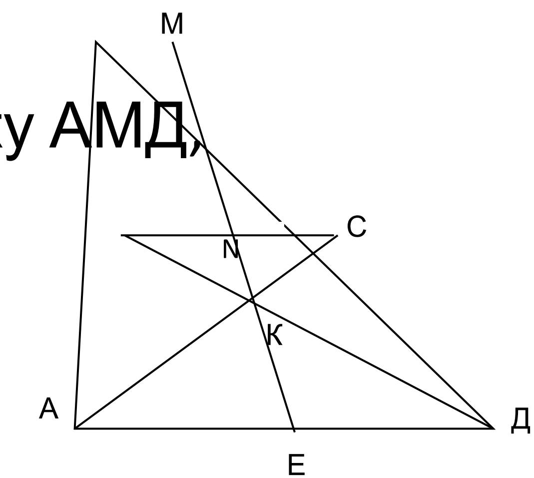
$$\frac{BM\cdot CE+MK\cdot CE}{KC\cdot AP+KC\cdot PE}=\frac{BM\cdot CE+BM\cdot EP}{MK\cdot AP+KC\cdot AP}$$

Из данного равенства следует, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC_2}{C_2B}$$

т.е. точки C_1 и C_2 делят AB в одном отношении, т.е. они совпадают, значит лучи CT и CO совпадают и точки C,T и O лежат на одной прямой. Ч.т.д.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений её боковых сторон лежат на одной прямой.



РЕШЕНИЕ.

1) В треугольнике АМД: МЕ – медиана треугольника АМД, MN- медиана треугольника ВМС, т.к. треугольник ВМС подобен треугольнику АМД, значит точка N принадлежит отрезку МЕ.

2) Докажем, что К принадлежит отрезку МЕ.

По теореме Чевы, если МЕ, ДВ и АС Пересекаются в одной точке К, то верно равенство:

$$\frac{\text{АВ}}{\text{ВМ}}\cdot\frac{\text{МС}}{\text{СД}}\cdot\frac{\text{ДЕ}}{\text{ЕА}}=1 \quad (*) \qquad \frac{\text{ДЕ}}{\text{ЕА}}=1,\text{т.к. Е} - \text{середина АД}$$

$$\frac{\text{АВ}}{\text{ВМ}}=\frac{\text{СД}}{\text{МС}} \Rightarrow \frac{\text{АВ}}{\text{ВС}}\cdot\frac{\text{МС}}{\text{СД}}=1$$

, т.е равенство (*) верно, следовательно К принадлежит МЕ, следовательно точки M,N,К,Е лежат на одной прямой.

ЗАДАЧА 3. Вписанная (или невписанная) окружность в треугольник ABC касается прямых BC, CA, AB в точках A1, B1, C1 . Доказать, что прямые AA1, BB1, CC1 пересекаются в одной точке.


Спасибо за внимание!