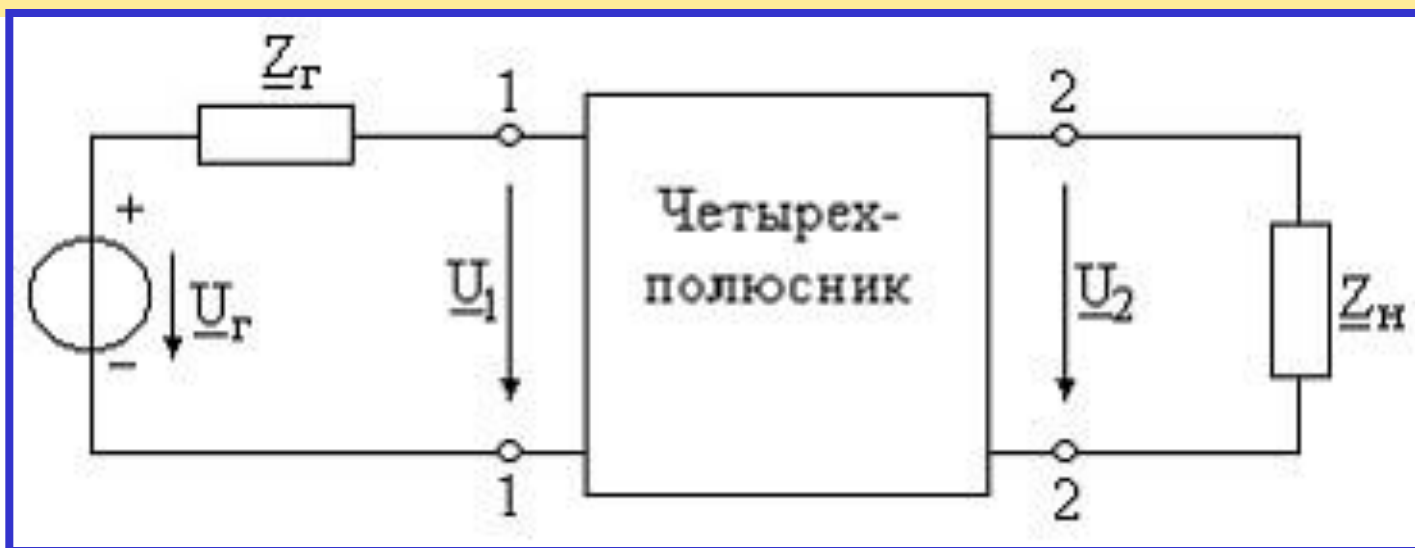


Дисциплина: Теория электрических цепей



Лекция №10

Тема: Основы теории четырёхполюсников





Учебные вопросы

- 1. Основные определения и классификация четырехполюсников.
- 2. Шесть форм записи уравнений четырехполюсника.
- 3. Уравнения четырехполюсника через Y -параметры.
- 4. Уравнения четырехполюсника через A -параметры.
- 5. Характеристические параметры четырехполюсника.
- 6. Каскадное соединение согласованных четырехполюсников.



Литература

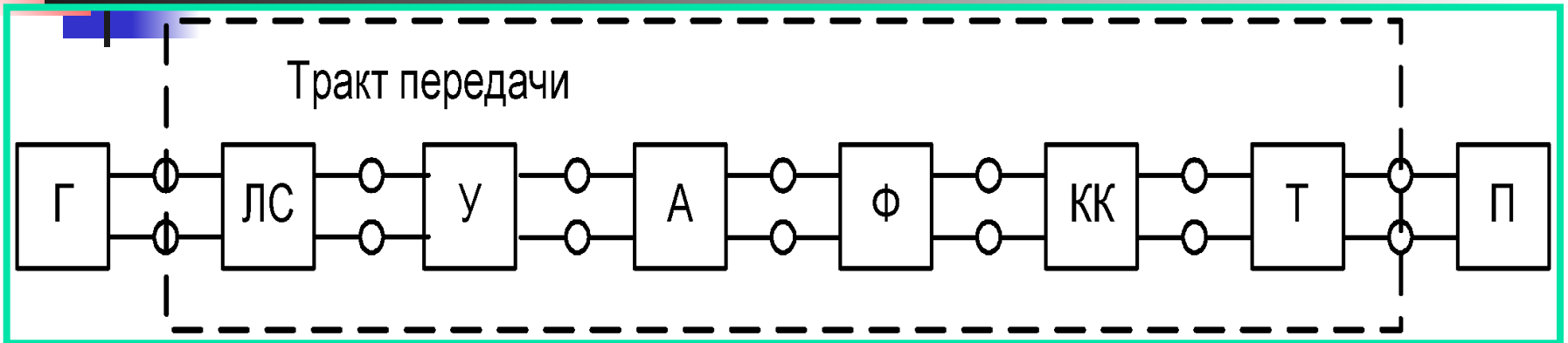
- **1. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. "Радиотехника".-М.: Высшая школа, 2007. с. 399-414, 419-431**

1. Основные определения и классификация четырехполюсников

Во многих случаях для анализа и синтеза электрических цепей важно знать токи **только в некоторых ветвях** и напряжения **только между некоторыми узлами**. В этом случае расчёт цепи упрощается, если цепь разделить на отдельные части, каждая из которых соединена с остальными **двумя, тремя, четырьмя или большим числом выводов – полюсов**.

Четырехполюсником называется часть электрической цепи, имеющая две пары зажимов, одна из которых может быть входной, а другая выходной. К входным зажимам четырехполюсников обычно присоединяют источники энергии (сигнала), а к выходам – приемники энергии (сигнала).

Канал связи как ряд четырёхполюсников



В тракт передачи обычно входят:

- **линии связи (ЛС) генератора и приемника, находящихся на значительных расстояниях один от другого;**
- **усилители (У), в которых увеличивается мощность (уровень сигналов);** **аттенюатор (А)-устройство для плавного, ступенчатого или фиксированного понижения интенсивности электрических сигналов;**
- **фильтры (Ф) для разделения сигналов;**
- **корректирующие контуры (КК), включаемые для устранения искажений сигналов;**
- **трансформаторы (Т), при помощи которых устраняется гальваническая связь между входной и выходной цепями.**

К четырёхполюсникам можно отнести различные по назначению технические устройства:

- 1) двухпроводную линию;**
- 2) двухобмоточные трансформаторы;**
- 3) электрические фильтры;**
- 4) усилители сигналов;**
- 5) участки линий передачи электрической энергии;**
- 6) транзисторы и многие другие устройства.**

Теория четырехполюсников

позволяет:

- 1) единым методом анализировать различные по структуре и назначению электрические цепи, которые могут быть отнесены к классу четырехполюсников;**
- 2) получить аналитическую зависимость между током и напряжением на входе и током и напряжением на выходе четырехполюсника, не производя расчетов токов и напряжений внутри его схемы.**

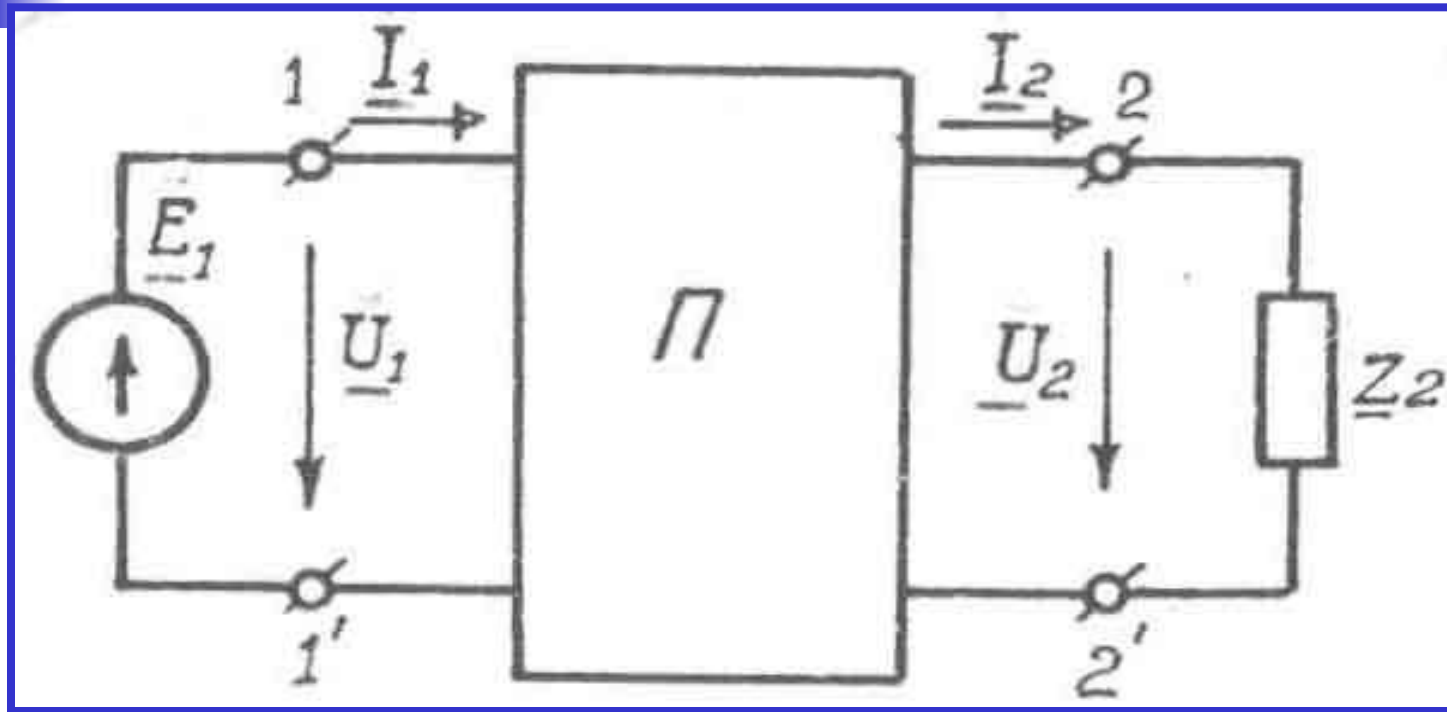
Основной смысл теории четырёхполюсников

закключаются в том, что с помощью обобщенных параметров, называемых коэффициентами четырехполюсника, и основных уравнений четырехполюсника можно находить токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника.

Теория четырехполюсников применяется в тех случаях,

когда ставится задача определения напряжений и токов только на входе и на выходе четырехполюсника, а в определении токов и напряжений на различных элементах цепи внутри четырехполюсника нет необходимости.

Условное изображение четырёхполюсника



Задача анализа четырехполюсника состоит в том, что две из четырех величин, определяющих режим четырехполюсника, известны: они задаются воздействием. Требуется найти две остальные величины, т.е. отклик

Классификация четырёхполюсников

Четырёхполюсники

```
graph TD; A[Четырёхполюсники] --- B[Линейные]; A --- C[Нелинейные]; B --- D[Пассивные]; B --- E[Активные]; D --- F[Симметричные]; D --- G[Несимметричные]
```

Линейные

Нелинейные

Пассивные

Активные

Симметричные

Несимметричные

Классификация

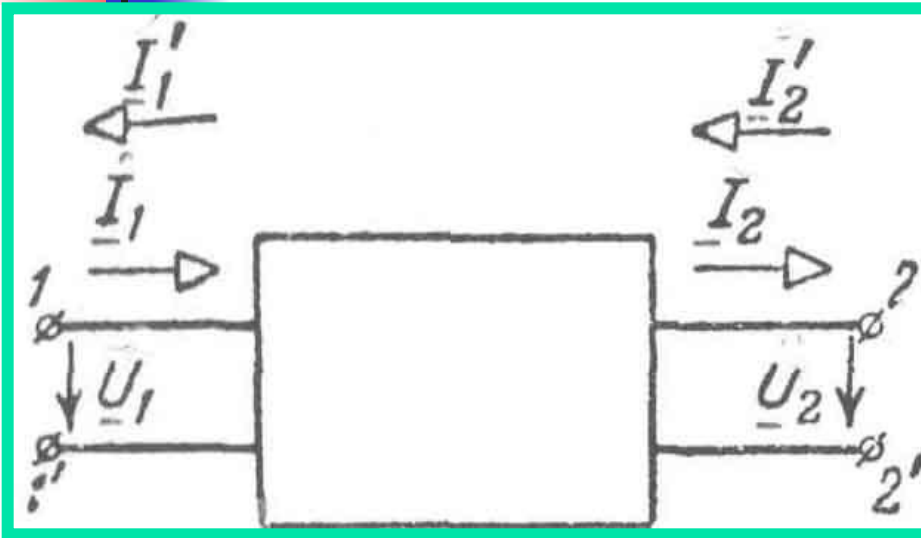
четырёхполюсников

Симметричный четырёхполюсник — это четырёхполюсник, у которого при перемене местами источника и приемника энергии входной и выходной токи не меняются.

Пассивный четырёхполюсник — это четырёхполюсник, который не содержит источников энергии, либо содержит скомпенсированные источники энергии.

Активный четырёхполюсник — это четырёхполюсник, который содержит нескомпенсированные источники энергии.

2. Шесть форм записи уравнений четырёхполюсника



1. Если за положительные направления токов выбрать \underline{I}_1 и \underline{I}_2 , то такой вариант называется **прямой передачей** (см. уравнения **A-формы**).

2. Если за положительные направления токов выбрать \underline{I}_1' и \underline{I}_2' , то такой вариант называется **обратной передачей** (см. уравнения **B-формы**)

3. Если за положительные направления токов выбрать \underline{I}_1 и \underline{I}_2' , то такой вариант называется **встречным направлением** (см. уравнения **Y-, Z-, H- и G-форм**).

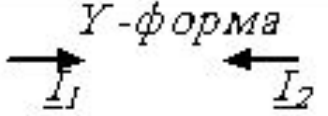
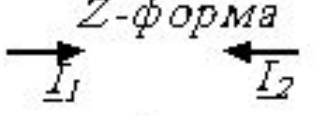
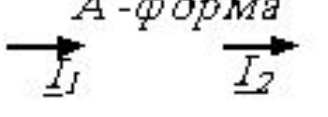
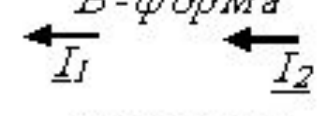
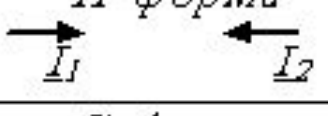
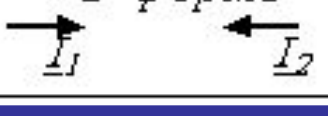
Линейный четырёхполюсник описывается четырьмя параметрами — два напряжения и два тока. Любые две величины из четырёх можно определить через оставшиеся две. Поскольку число сочетаний 2 из 4 равно 6, используется одна из шести форм записи уравнений четырёхполюсника

Варианты	1	2	3	4	5	6
Заданные воздействия	$\underline{U}_1, \underline{U}_2$	$\underline{I}_1, \underline{I}_2$	$\underline{U}_2, \underline{I}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_1$	$\underline{I}_1, \underline{U}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_2$
Определяемые отклики	$\underline{I}_1, \underline{I}_2$	$\underline{U}_1, \underline{U}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_1$	$\underline{I}_2, \underline{U}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_2$	$\underline{I}_1, \underline{U}_2$
Комплексные параметры	\underline{Y}	\underline{Z}	\underline{A}	\underline{B}	\underline{H}	\underline{G}

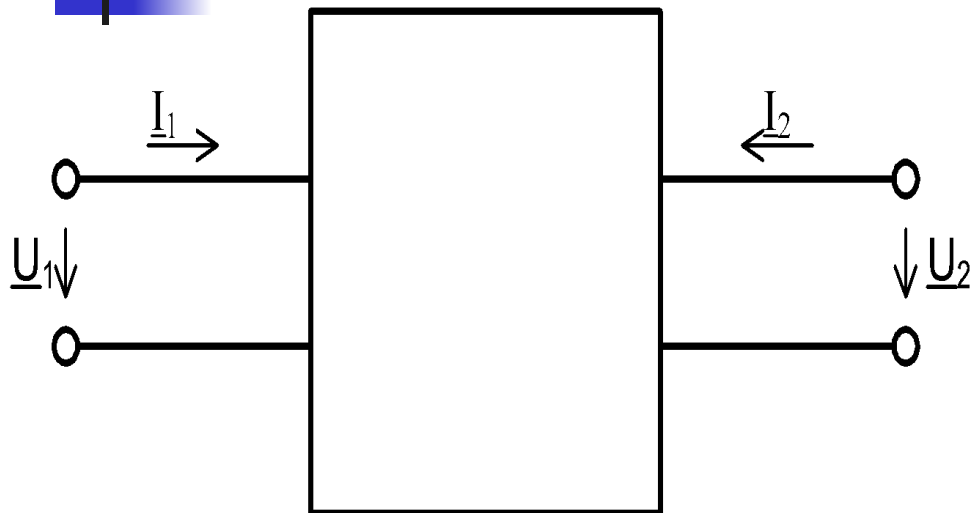
Шесть форм записи уравнений четырёхполюсника.

Конкретная система выбирается из соображений удобства.

Выбор зависит от того, какой параметр (напряжение или ток) является входным и какой — выходным сигналом для данного четырёхполюсника

Форма уравнений, направление токов	Уравнения	Матрица комплексных параметров
<p><i>Y-форма</i></p> 	$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$	$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>Z-форма</i></p> 	$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$	$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>A-форма</i></p> 	$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2$	$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>B-форма</i></p> 	$\underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}_1$ $\underline{I}_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}_1$	$[\underline{B}] = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>H-форма</i></p> 	$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2$	$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>G-форма</i></p> 	$\underline{I}_1 = \underline{G}_{11}\underline{U}_1 + \underline{G}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{G}_{21}\underline{U}_1 + \underline{G}_{22}\underline{I}_2$	$[\underline{G}] = \begin{bmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{bmatrix}$

3. Уравнения четырехполюсника через Y-параметры



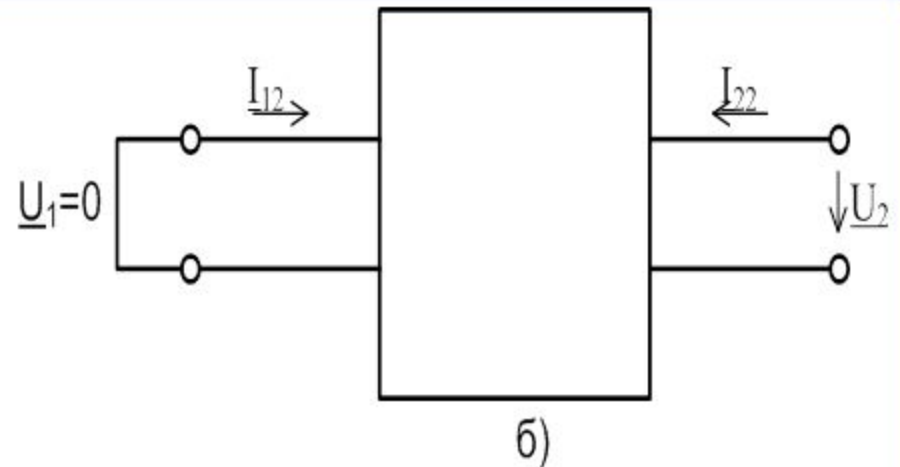
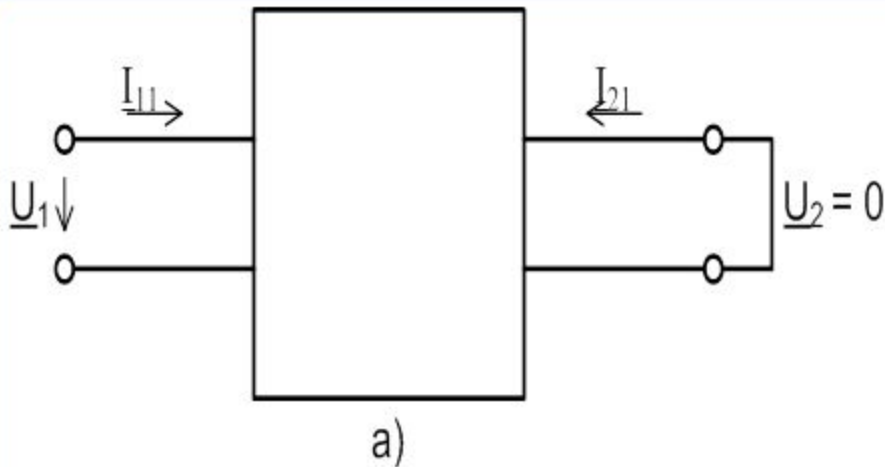
Для записи уравнения четырёхполюсника используем принцип наложения

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{12}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{21} + \underline{I}_{22}$$

Принцип наложения: токи всех ветвей линейной цепи при воздействии нескольких ЭДС определяются как сумма частичных токов, получаемых последовательным подключением каждой из этих ЭДС при условии, что все остальные ЭДС равны нулю.

Определение частичных токов



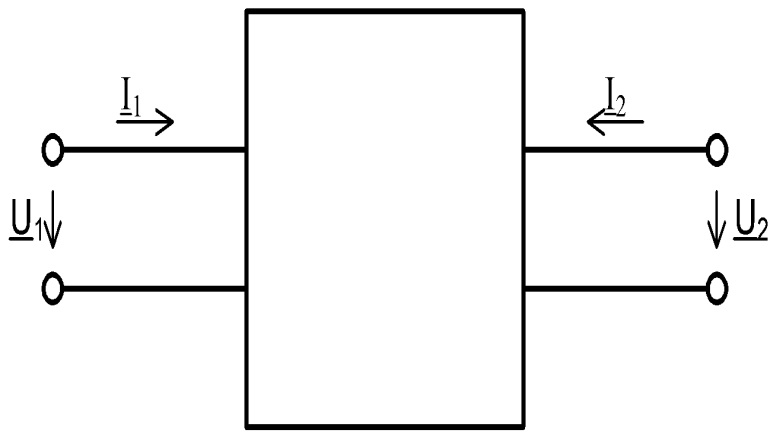
$$\underline{I}_{11} = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1$$

$$\underline{I}_{12} = \underline{Y}_{12} \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_{21} = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1$$

$$\underline{I}_{22} = \underline{Y}_{22} \underline{U}_2$$

УРАВНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ЧЕРЕЗ Y-ПАРАМЕТРЫ



$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2; \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \times \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$



Физический смысл Y - параметров

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \Big|_{\underline{U}_2=0}$$

– комплексная входная
проводимость со стороны зажимов
1-1' в режиме короткого замыкания
на зажимах 2-2';



Физический смысл Y - параметров

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{U}_1=0}$$

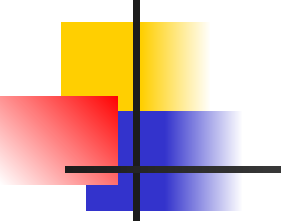
– комплексная передаточная проводимость обратной передачи от зажимов 2-2' к зажимам 1-1' в режиме короткого замыкания на зажимах 1-1';



Физический смысл Y - параметров

$$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \Big|_{\underline{U}_2=0}$$

– комплексная передаточная проводимость прямой передачи от зажимов 1-1' к зажимам 2-2' в режиме короткого замыкания на зажимах 2-2';



Физический смысл Y - параметров

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{U}_1=0}$$

– комплексная входная
проводимость со стороны
зажимов 2-2' в режиме короткого
замыкания на зажимах 1-1'.

Свойства Y - параметров:

1) у обратимых четырехполюсников

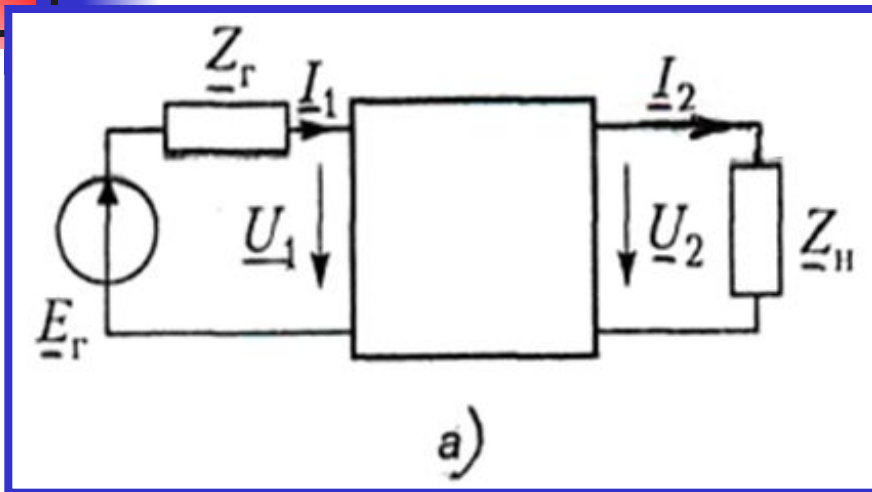
Y_{12} = Y_{21} , т.е. только три коэффициента в основных уравнениях линейных пассивных четырехполюсников являются независимыми;

2) у симметричных четырехполюсников

Y_{12} = Y_{21} и Y_{11} = Y_{22} ; в этом случае число независимых коэффициентов равно двум.

5. Характеристические параметры четырехполюсника

5.1 Входное сопротивление четырехполюсника



При прямой передаче:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2$$

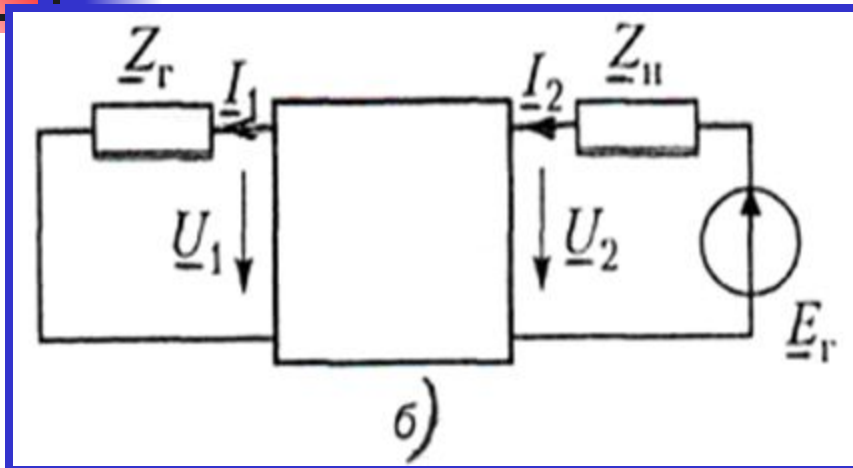
$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_H + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_H + \underline{A}_{22}}$$

В частных случаях, когда $Z_H = 0$ (режим короткого замыкания) и $Z_H = \infty$ (режим холостого хода), входные сопротивления четырехполюсника определяются соответственно соотношениями:

$$\underline{Z}_{BX \text{ .к.з.}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_{BX \text{ .х.х.}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$$

5.2 Выходное сопротивление четырёхполюсника



При обратной передаче:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 - \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 - \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{\text{ВЫХ}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{22} \underline{Z}_r + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_r + \underline{A}_{11}}$$

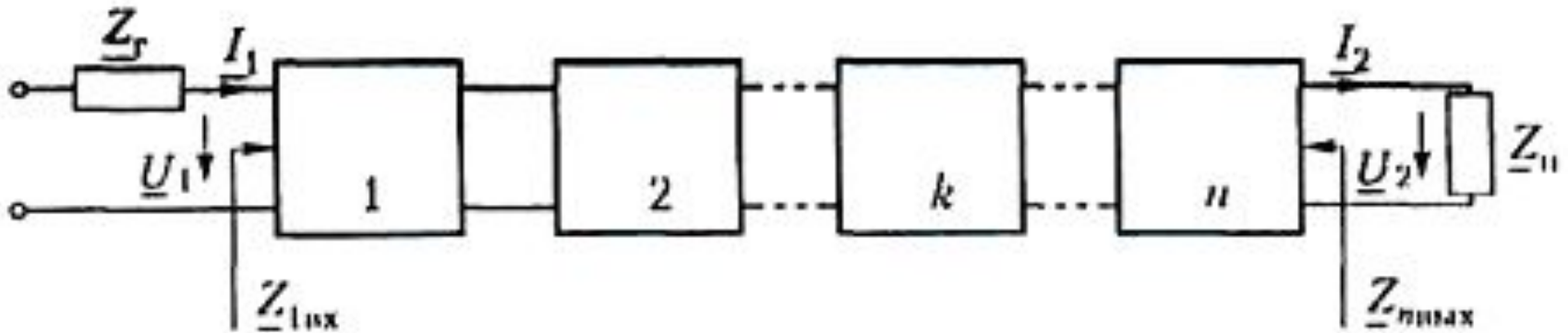
В частных случаях, когда $Z_r = 0$ (режим короткого замыкания) и $Z_r = \infty$ (режим холостого хода), выходные сопротивления четырёхполюсника определяются соответственно соотношениями:

$$\underline{Z}_{\text{ВЫХ.к.з.}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$$

$$\underline{Z}_{\text{ВЫХ.х.х.}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$$

5.3 Режим согласованного включения

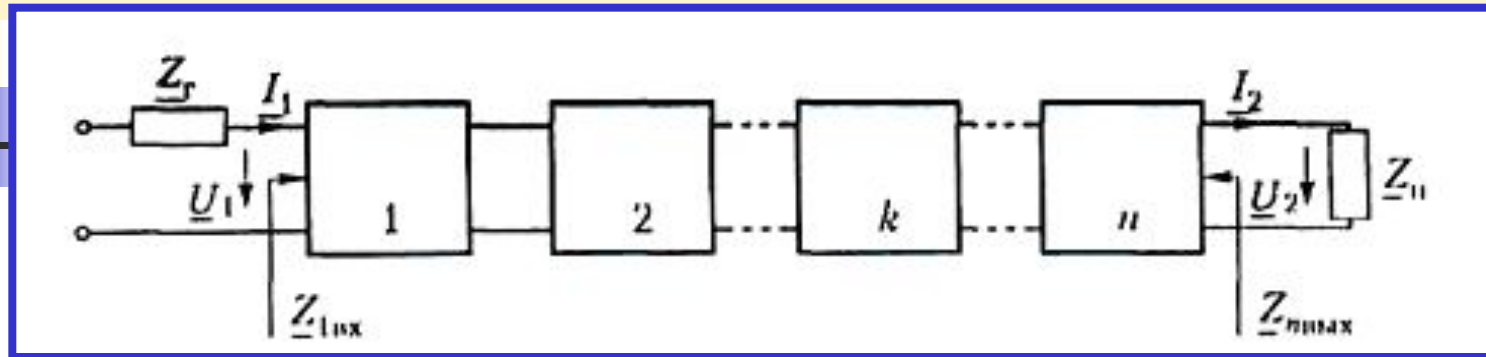
Каскадное соединение четырёхполюсников – соединение, при котором входные выводы одного четырёхполюсника соединяются с выходными выводами другого



Часто каскадно-соединенные элементы находятся в режиме согласованного включения, при котором выходное сопротивление каждого звена равно входному сопротивлению последующего.

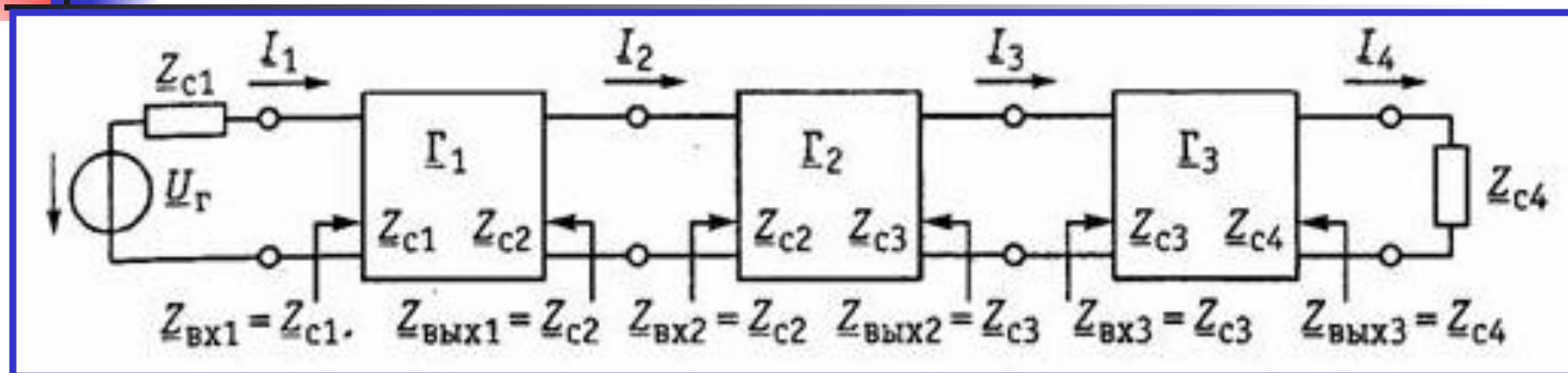
Согласованное включение обеспечивает передачу максимальной мощности в нагрузку.

Условия согласованного включения:



1. Входное сопротивление $Z_{1вх}$ на зажимах первого звена равно сопротивлению генератора Z_G , т.е. $Z_{1вх} = Z_G$;
2. Для любых соседних звеньев входное сопротивление $Z_{k вх}$ последующего, k -го, звена равно выходному сопротивлению $Z_{(k-1)вых}$ предыдущего, $(k-1)$ -го, звена, т.е. $Z_{(k-1)вых} = Z_{k вх}$;
3. Выходное сопротивление $Z_{n вых}$ последнего, n -го, звена равно сопротивлению Z_H нагрузки, т.е. $Z_{n вых} = Z_H$.

5.4 Характеристические сопротивления четырёхполюсника



Сопротивление, включенное во входной цепи четырехполюсника $Z_{c1} = Z_{\Gamma} = Z_{вх}$, и сопротивление, включенное в его выходной цепи $Z_{c2} = Z_{н} = Z_{вых}$, обеспечивающие режим согласованного включения на обеих парах его зажимов, называются соответственно входным и выходным характеристическими сопротивлениями четырехполюсника

Характеристические сопротивления четырёхполюсника: расчётные соотношения

Ранее было
получено:

$$\underline{Z}_{ВХ} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_H + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_H + \underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_{ВЫХ} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_Г + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_Г + \underline{A}_{11}}$$

В режиме согласованного включения:

$$\underline{Z}_{с1} = \underline{Z}_Г = \underline{Z}_{ВХ}, \quad \underline{Z}_{с2} = \underline{Z}_H = \underline{Z}_{ВЫХ}$$

$$\underline{Z}_{с1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{с2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{с2} + \underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_{с2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{с1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{с1} + \underline{A}_{11}}$$

$$\underline{Z}_{с1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}}$$

$$\underline{Z}_{с2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}$$

$$\underline{Z}_{с1} = \sqrt{\underline{Z}_{вх.к.з} \underline{Z}_{вх.х.х}}$$

$$\underline{Z}_{с2} = \sqrt{\underline{Z}_{вых.к.з} \underline{Z}_{вых.х.х}}$$

Выводы

1. Входное характеристическое сопротивление равно среднему геометрическому из входных сопротивлений при коротком замыкании и холостом ходе.

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\underline{Z}_{вх.кз} \underline{Z}_{вх.хх}}$$

2. Выходное характеристическое сопротивление равно среднему геометрическому из выходных сопротивлений при коротком замыкании и холостом ходе.

$$\underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{вых.кз} \underline{Z}_{вых.хх}}$$

3. Эти выражения позволяют определить характеристические сопротивления из опытов холостого хода и короткого замыкания

5.5 Мера передачи четырёхполюсника

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\underline{K}_U} \frac{1}{\underline{K}_I}$$

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}})^2 = \ln(\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}})$$

Мера передачи четырёхполюсника характеризует отношение мощности на входе четырёхполюсника к мощности на его выходе в логарифмическом масштабе

Коэффициент ослабления четырёхполюсника

$$\underline{\Gamma} = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u2})} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{u1} - \psi_{u2}) = \alpha + j\beta,$$

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}$$

[Нп] или [Непер] –
основная
единица
измерения
коэффициента
ослабления

Вещественная часть меры передачи – коэффициент ослабления (затухание) –
показывает в логарифмическом масштабе во сколько раз уменьшается действующее значение напряжения и тока при переходе от входных к выходным зажимам четырёхполюсника при согласованной нагрузке

Коэффициент ослабления четырёхполюсника

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}$$

Затухание в 1Нп соответствует уменьшению модуля величины в $e = 2,72$ раза. На практике для измерения затухания сигналов применяется другая, более удобная для практики единица, а именно: 1 децибелл [дБ], которая определяется согласно уравнению:

$$\alpha = 20 \lg \frac{|U_1|}{|U_2|} \text{ [дБ]} ; \quad 1 \text{ дБ} = 10^{\frac{1}{20}} \approx 1,122 \text{ раза.}$$

Соотношение между единицами затухания: 1Нп = 8,086 дБ ;
1дБ = 0,115Нп.

Коэффициент фазы четырёхполюсника

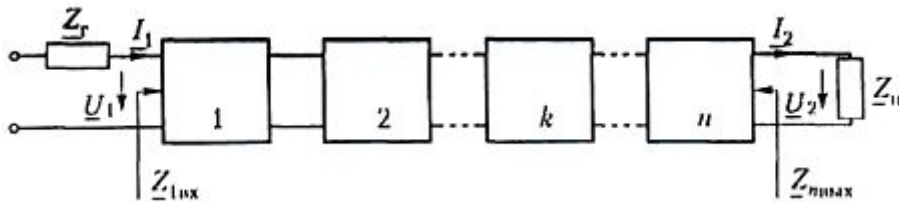
$$\underline{\Gamma} = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \ln \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u2})} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + j(\psi_{u1} - \psi_{u2}) = \alpha + j\beta,$$

$$\beta = \psi_{U1} - \psi_{U2} = \psi_{I1} - \psi_{I2}$$

**Мнимая часть меры передачи
– коэффициент фазы - показывает
насколько изменяется фаза напряжения и
тока при переходе сигнала через
согласованно нагруженный
четырёхполюсник**

β измеряется в радианах (рад)

6. Каскадное соединение согласованных четырёхполюсников



$$Z_{c2(k)} = Z_{c1(k+1)} \quad Z_{\Gamma} = Z_{c11}$$

$$Z_{c2H} = Z_H$$

$$\Gamma_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n \Gamma_k$$

$$K_U = \frac{U_H}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \dots \frac{U_n}{U_{n-1}} = \prod_{k=1}^n K_{U_k} = \sqrt{\frac{Z_H}{Z_{\Gamma}}} e^{-\sum_{k=1}^n \Gamma_k} = \sqrt{\frac{Z_{c2H}}{Z_{c11}}} e^{-\Gamma}$$

$$K_I = \prod_{k=1}^n K_{I_k} = \sqrt{\frac{Z_{\Gamma}}{Z_H}} e^{-\Gamma}$$

При каскадном соединении меры передачи отдельных четырёхполюсников суммируется

Для каскада из n одинаковых симметричных звеньев с мерой передачи каждого $\Gamma_k = \Gamma$ имеем:

$$K_U = K_I = e^{-\sum_{k=1}^n \Gamma_k}$$

$$K_U = K_I = e^{-n\Gamma}$$