ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. КИНЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ 2

ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

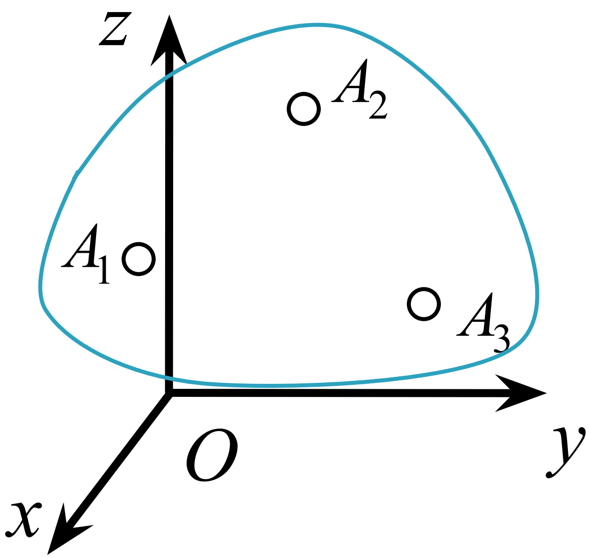
Очевидно,

что если известен закон движения всех N точек тела, то можно определить его положение и кинематические характеристики всех составляющих его точек.

Вопрос:

можно ли это сделать, имея сведения о движении (зная закон движения) лишь некоторой совокупности $n<N$ точек данного тела?

ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА



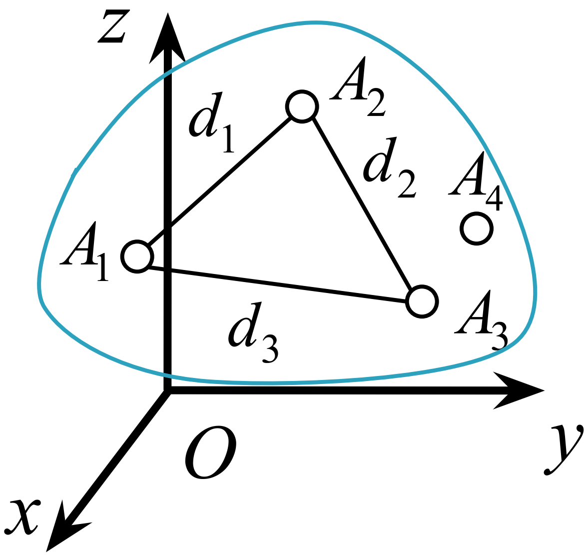
Покажем, что положение твердого тела вполне определяется заданием **6**-и независимых параметров.

Возьмем **3**-и не лежащие на одной прямой точки тела A_1, A_2, A_3 с координатами

$$x_k = x_k(t),\ \ y_k = y_k(t),\ \ z_k = z_k(t) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Их положение характеризуется **9**-ю параметрами (координатами).

ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА



Соединим точки между собой.

Так как расстояния d_1, d_2, d_3 не изменяются, то координаты точек должны удовлетворять уравнениям

$$
\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= d_1^2 \\
(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= d_2^2 \qquad (1) \\
(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= d_3^2
\end{aligned}
$$

Следовательно из девяти координат независимых только шесть, остальные три определяются из уравнений (1).

Если взять еще одну точку A_4 с координатами x_4, y_4, z_4, то эти координаты должны будут удовлетворять трем уравнениям вида (1).

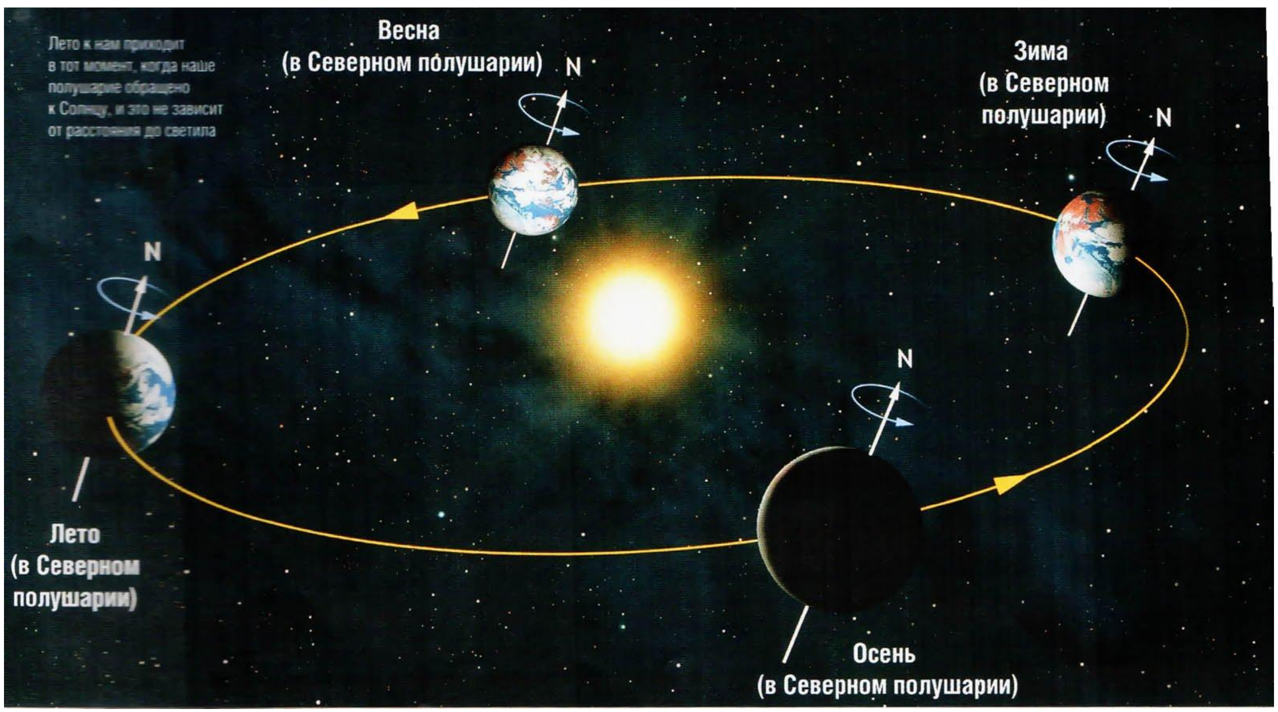
ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Положение твердого тела относительно произвольно выбранной системы координат вполне определяется 6-ю независимыми параметрами.

Число независимых параметров, определяющих положение системы в пространстве называют числом степеней свободы.

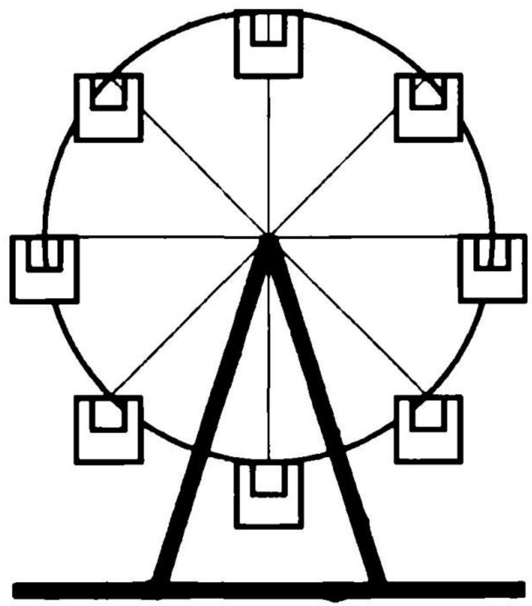
ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательным называется движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые его точки, остается в процессе движения параллельной самой себе



ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

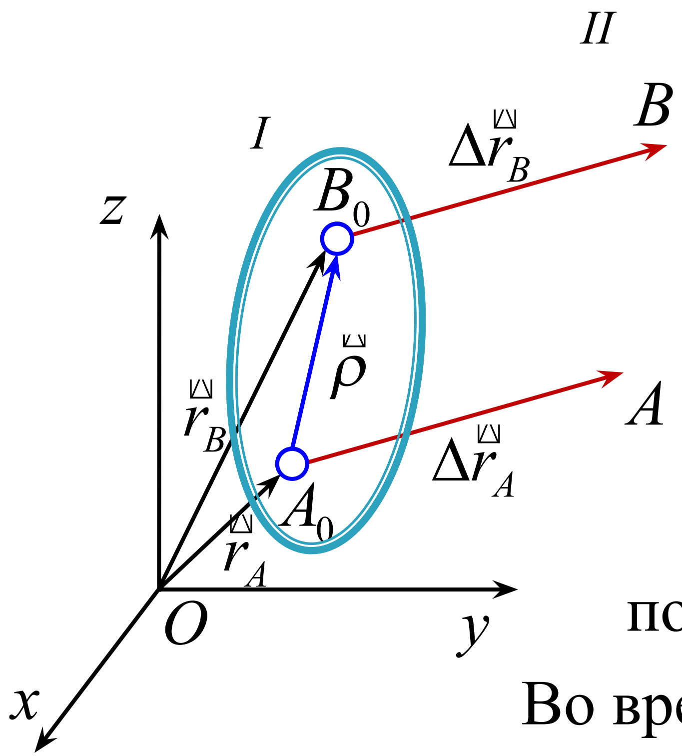
Поступательным называется движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые его точки, остается в процессе движения параллельной самой себе



ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

<u>Теорема</u> При поступательном движении тела все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Доказательство.

Пусть твердое тело движется поступательно относительно системы координат *Oxyz*. Из рисунка следует

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho} \qquad (2)$$

В момент времени t тело занимало положение *I*, а в момент $t+\Delta t$ положение *II*.

Во время движения вектор $\vec{\rho}$ не изменяется, A_0B_0 и AB равны и параллельны, A_0B_0BA – параллелограмм и $\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$, т. е. перемещения всех точек равны между собой.

Продифференцировав (2) по времени, получим

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \qquad (3)$$

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Так как $\vec{\rho} = \text{const}$, то $\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$ и $\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$

$$\text{или} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A. \qquad (4)$$

Дифференцируя (4) устанавливаем связь между ускорениями точек тела при поступательном движении

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

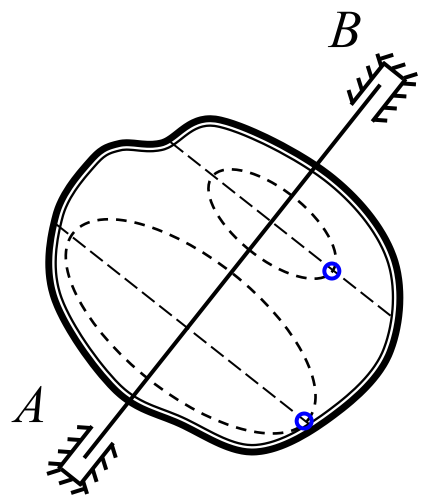
- ❑ **Теорема доказана**

Поступательное движение тела полностью определяется движением одной (любой) его точки.

Описание поступательного движения сводится к уже изученной кинематике точки.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА (вращение тела вокруг неподвижной оси)

Вращательным называется движение, при котором хотя бы две точки остаются неподвижными

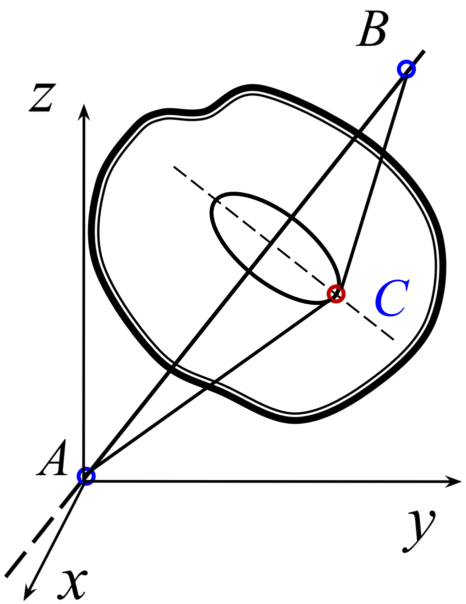


При движении тела с все точки на прямой *AB* остаются неподвижными.

Прямую *AB* называют осью вращения,

Все точки тела описывают дуги окружности с центрами в основаниях перпендикуляров, опущенных из этих точек на ось вращения.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Возьмем на оси вращения две точки A и B

.

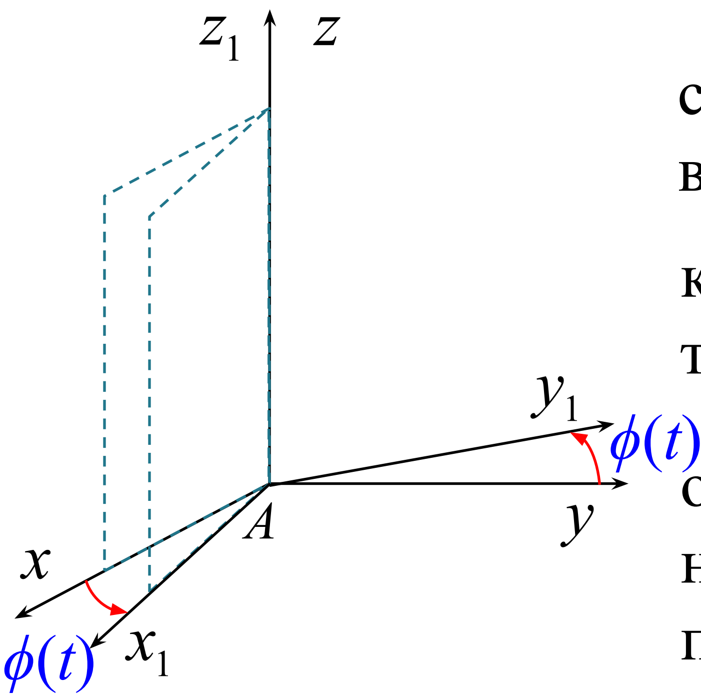
Так как положение точек A и B – известно, то *положение тела будет полностью определено, если мы будем знать в любой момент времени положение какой-либо не лежащей на оси вращения* ***точки С тела***.

Из трех координат этой точки независимой будет только одна, так как расстояния AC и BC постоянны

$$(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2=AC^2,$$
$$(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2+(z_B-z_C)^2=BC^2.$$

Положение тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется одним параметром

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Направим ось Az неподвижной системы координат $Axyz$ вдоль оси вращения тела.

Возьмем подвижную систему координат $Ax_1y_1z_1$, жестко связанную с телом.

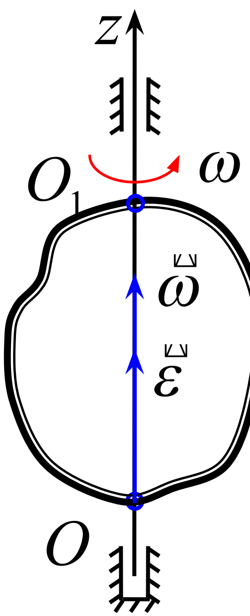
Положение тела будет полностью определено, если задан угол $\phi(t)$ между неподвижной Axz и подвижной Ax_1z_1 плоскостями.

$\phi(t)$ – *угол поворота тела*

$\phi > 0$ – поворот против часовой стрелки, $\phi < 0$ – поворот по часовой стрелки.

УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ, УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

Угловой скоростью тела называется вектор, равный по величине производной от угла поворота по времени и направленый вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение видно проходящим против часовой стрелки

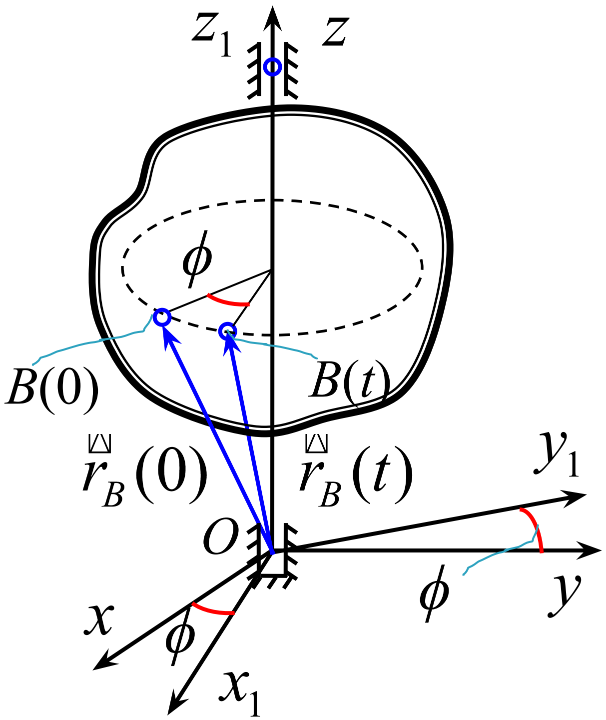


$$\omega_Z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Угловым ускорением называется вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

СКОРОСТИ ТОЧЕК ПРИ ВР. ДВИЖЕНИИ



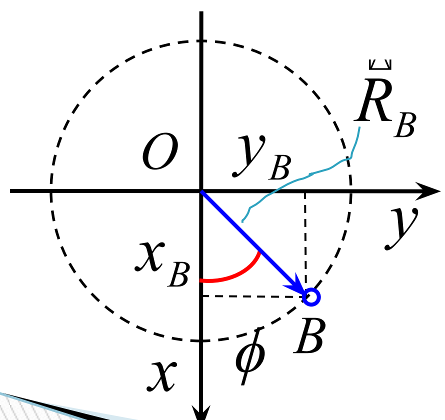
Положение произвольной точки B тела относительно неподвижной системы координат определяется законом движения

$$\vec{r}_B = \vec{r}_B(t) = x_B(t)\,\vec{i} + y_B(t)\,\vec{j} + z_B(t)\,\vec{k},$$

дифференцируя который по времени, находим скорость точки B

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B = \dot{x}_B(t)\,\vec{i} + \dot{y}_B(t)\,\vec{j}$$

Чтобы определить $\dot{x}_B$ и $\dot{y}_B$, рассмотрим проекции радиус-вектора $\vec{r}_B$ на оси Ox и Oy:



$$x_B(t) = R_B\cos\varphi(t) \qquad y_B(t) = R_B\sin\varphi(t)$$

дифференцируя которые по времени, получим

$$\dot{x}_B(t) = -R_B\dot{\varphi}\sin\varphi(t) = -R_B\omega\sin\varphi(t)$$

$$\dot{y}_B(t) = R_B\dot{\varphi}\cos\varphi(t) = R_B\omega\cos\varphi(t)$$

СКОРОСТИ ТОЧЕК ПРИ ВР. ДВИЖЕНИИ

$$\vec{v}_B = -R_B\omega\sin\varphi\,\vec{i} + R_B\omega\cos\varphi\,\vec{j} = \omega(-y_B\,\vec{i} + x_B\,\vec{j}).$$

Полученное выражение для скорости можно записать в виде

$$\bar{v}_B = \vec{\omega}\times\vec{R}_B = \vec{\omega}\times\vec{r}_B,$$

где $\overline{R}_B$ - радиус-вектор вращения точки B в плоскости Oxy.

Действительно по определению векторного произведения

$$\vec{\omega}\times\vec{r}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = \vec{\omega}\times\vec{R}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_B & y_B & 0 \end{vmatrix} = \omega(\vec{j}x_B - \vec{i}\,y_B).$$

Так как $\vec{\omega}\perp\vec{R}_B$, то модуль скорости точки B определяется так

$$v_B = \omega\cdot R_B,$$

т.е. скорости точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям до оси вращения.

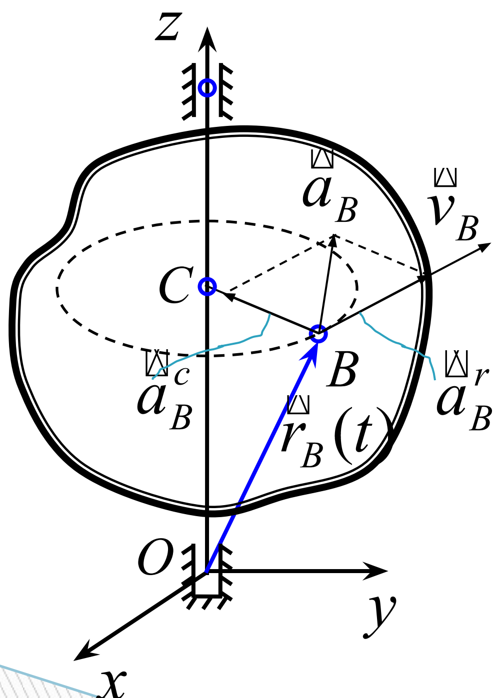
УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ПРИ ВР. ДВИЖЕНИИ

Продифференцируем выражение для скорости точки $\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B$ по времени

$$\vec{a}_B = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_B) = \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\vec{r}_B =$$

$$= \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times (\dot{x}_B\vec{i} + \dot{y}_B\vec{j}) =$$

$$= \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times \vec{v}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_B).$$



Ускорение $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_B$ направлено по касательной к траектории точки B и называется *вращательным ускорением*

$\vec{a}_B^{\,r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B$ (его модуль $a_B^r = \varepsilon\, r_B \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}_B) = \varepsilon\, R_B$).

Вторая часть ускорения

$$\vec{a}_B^{\,c} = \vec{\omega} \times \vec{v}_B = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_B)$$

направлена к оси вращения и по модулю равна

$$a_B^c = \omega\, v_B = \omega^2 R_B.$$

Это ускорение называется *центростремительным*.