Тема 3: Системы эконометрических уравнений

- Системы **независимых** уравнений
- Системы **рекурсивных** уравнений
- Системы **одновременных** уравнений

Система независимых уравнений

Каждая зависимая переменная есть функция одного и того же набора факторов x:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_3, x_4, x_5) \\ y_2 = f(x_2, x_3, x_5) \\ y_3 = f(x_3, x_4, x_5) \end{cases}$$

Пример: модель экономической эффективности с/х производства, где

y_i - показатели эффективности

Система рекурсивных уравнений

В каждое последующее уравнение входят в качестве факторов зависимые переменные предшествующих уравнений

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, \dots, x_k) \\ y_2 = f(y_1, x_1, \dots, x_k) \\ y_3 = f(y_1, y_2, x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

Пример: модель производительности труда (y_1) и фондоотдачи (y_2):

$$y_1 = f(x)$$

$$y_2 = f(y_1, x)$$

Система одновременных (взаимозависимых) уравнений

Одни и те же переменные y одновременно рассматриваются **как зависимые** в одних уравнениях **и как независимые** в других уравнениях. Обычный МНК неприменим (он даёт смещённые и несостоятельные оценки).

Пример: модель динамики цен (y_1) и заработной платы (y_2):

$$\begin{cases} y_1 = f(y_2, x) \\ y_2 = f(y_1, x) \end{cases}$$

Структурная форма модели

Это исходная форма системы одновременных уравнений, полученная на основе описания существующих реальных связей между переменными (структурная модель).

Простейшая структурная модель (в ***центрированных*** переменных):

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

b_{ij}, a_{ij} – **структурные коэффициенты**

- **Эндогенные** переменные – зависимые переменные уравнений
- **Экзогенные** переменные – предопределённые переменные, влияющие на эндогенные, но не зависящие от них
- В качестве экзогенных переменных могут рассматриваться значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (**лаговые** переменные)
- В качестве экзогенных переменных целесообразно выбирать **регулируемые** переменные

Эконометрические модели, кроме уравнений взаимосвязи, могут включать в систему **тождества**.

Например, модель зависимости потребления (C) от дохода (y) учитывает тождество дохода:

$$\begin{cases} C = a + by + \varepsilon \\ y = C + I \end{cases}$$

I– инвестиции.

При этом оценки параметров должны учитывать тождество дохода

Приведённая форма модели

Для корректности применения МНК структурная форма модели преобразуется в систему линейных уравнений зависимости эндогенных переменных от экзогенных.

Для простейшей модели:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \hat{y}_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases}$$

(система независимых уравнений)

c_{ij} – **приведённые коэффициенты**

КМНК – косвенный метод наименьших квадратов

Приведённые коэффициенты можно найти путём обычных алгебраических преобразований.

МНК-оценки приведённых коэффициентов используются для определения структурных коэффициентов путём обратных алгебраических преобразований.

Идентификация простейшей модели

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{y_2 - c_{21}x_1}{c_{22}} \qquad y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}\frac{y_2 - c_{21}x_1}{c_{22}}$$

$$b_{12} = \frac{c_{12}}{c_{22}}; \quad a_{11} = c_{11} - \frac{c_{12}c_{21}}{c_{22}}$$

Проблема идентификации

Идентифицируемость – это единственность соответствия между приведённой и структурной формами модели.

При обратном переходе от приведённой модели к структурной может возникнуть проблема **неоднозначности** между совокупностью приведённых и структурных коэффициентов.

КМНК можно использовать лишь при наличии их взаимнооднозначного соответствия

Структурные модели с точки зрения **идентифицируемости** можно разделить на 3 вида:

- идентифицируемые
- неидентифицируемые
- сверхидентифицируемые

Модель идентифицируема, если идентифицируемо каждое уравнение системы.

Если хотя бы одно уравнение неидентифицируемо, то вся модель неидентифицируема.

Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение.

Необходимое условие идентифицируемости уравнения

Обозначим:

H – число эндогенных переменных системы, присутствующих в данном уравнении;

D – число экзогенных переменных системы, отсутствующих в данном уравнении

- Если $D + 1 = H$ – уравнение **идентифицируемо**
- Если $D + 1 < H$ – уравнение **не**идентифицируемо
- Если $D + 1 > H$ – уравнение **сверх**идентифицируемо

Пример:

$$
\begin{cases}
y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\
y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\
y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{3`1}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4
\end{cases}
$$

- Уравнение I: H = 3, D = 2
- Уравнение II : H = 2, D = 2
- Уравнение III : H = 3, D = 1

Достаточное условие идентифицируемости **уравнения**

Матрица коэффициентов ***остальных*** уравнений системы, отсутствующих в данном уравнении, **невырожденна**

$$(\det \neq 0)$$

В примере для уравнения **I** получена матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{23} & 0 \\ 0 & a_{34} \end{pmatrix} \Rightarrow \det \neq 0$$

Методы оценивания структурных коэффициентов

- **Косвенный** МНК (КМНК) – для идентифицируемых уравнений
- **Двухшаговый** МНК (ДМНК) – для сверхидентифицируемых уравнений
- **Трёхшаговый** МНК – для всех видов уравнений
- Метод **максимального правдоподобия** (ММП) – общий метод

ДМНК – двухшаговый метод наименьших квадратов

- **Шаг 1:** для **приведённой** формы модели находят МНК-оценки коэффициентов. По оценённому уравнению определяют **теоретические** значения

  эндогенных переменных, содержащихся в **правой** части сверхидентифицируемого уравнения;
- **Шаг 2:** заменив в правой части сверхидентифи-цируемого уравнения **фактические** значения эндогенных переменных **на теоретические**, применяют обычный МНК для определения **структурных** коэффициентов данного уравнения.