Предел функции

- Предел функции в точке
- Односторонние пределы
- Предел функции при х стремящемся к бесконечности
- Основные теоремы о пределах
- Вычисление пределов
- Раскрытие неопределенностей
- Первый замечательный предел
- Второй замечательный предел

Предел функции в точке

Пусть функция ***y = f(x)*** определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0.

Число ***A*** называют пределом функции в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного **ε** найдется такое положительное число ***δ***, что для всех ***x*** из ***δ*** – окрестности точки x_0 справедливо неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

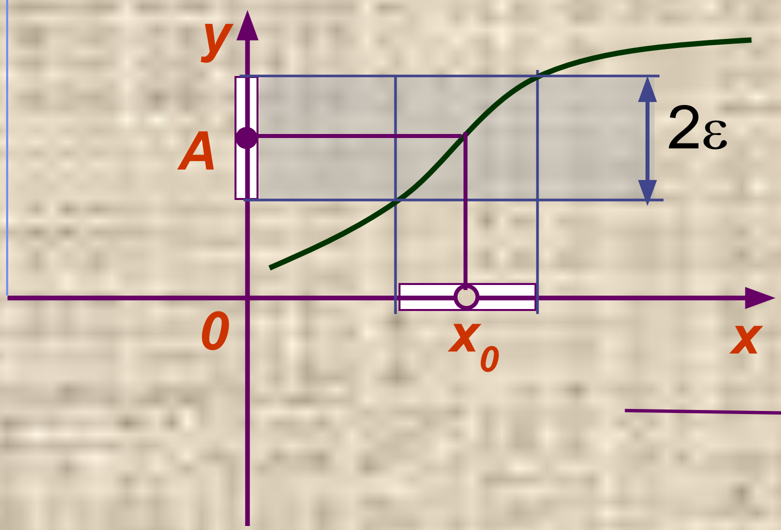
$$\forall\varepsilon > 0; \exists\delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Предел функции в точке

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0;\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

ε** окрестность точки **A



***δ** окрестность точки $\boldsymbol{x_0}$*

Геометрический смысл предела: для всех ***x*** из ***δ*** – окрестности точки $\boldsymbol{x_0}$ точки графика функции лежат внутри полосы, шириной **2ε**, ограниченной прямыми: ***y* = *A* + ε** , ***y* = *A* - ε** .

Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

предполагается, что ***x*** стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньше, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента ***x*** к x_0 существенно влияет на значение предела, поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называют ***пределом функции слева*** в точке x_0, если для любого **ε > 0** найдется такое **δ >0**, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ справедливо неравенство:

$$\left| f(x) - A_1 \right| < \varepsilon$$

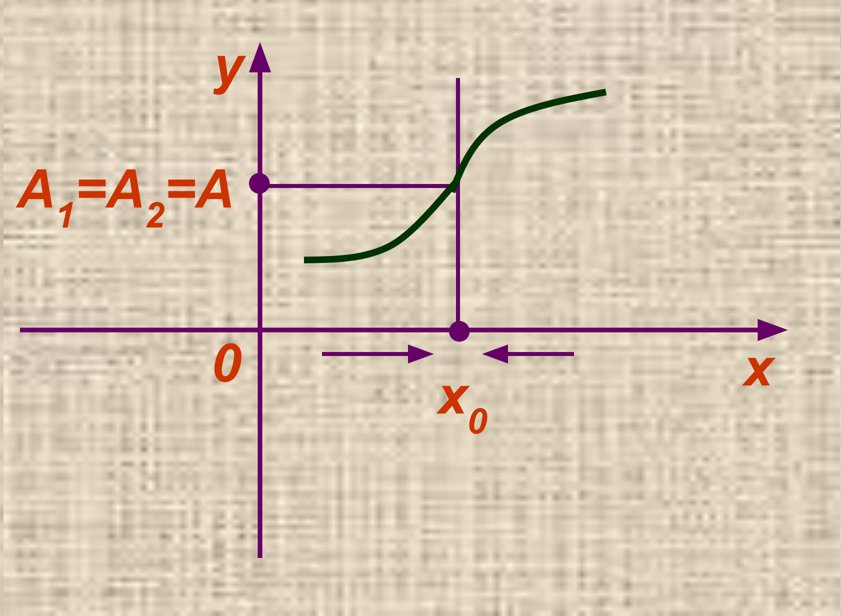
Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$

Односторонние пределы

Число A_2 называют ***пределом функции справа*** в точке x_0, если

$$\forall\varepsilon > 0;\ \exists\delta > 0;\ \forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon$$

Предел справа записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$



Пределы функции слева и справа называют ***односторонними пределами***.

Очевидно, если существует

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$

Предел функции при x стремящемся к бесконечности

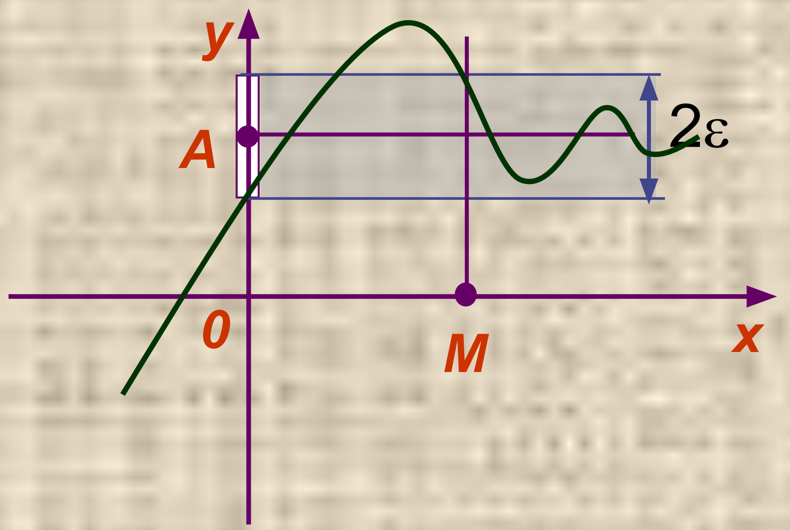
Пусть функция ***y = f(x)*** определена в промежутке $\left(-\infty;\infty\right)$.

Число ***A*** называют пределом функции при $x \to \infty$, если

$$\forall\varepsilon > 0;\ \exists M > 0;\ \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Геометрический смысл этого определения таков: существует такое число ***M***, что при ***x > M*** или при ***x < - M*** точки графика функции лежат внутри полосы шириной **2ε**, ограниченной прямыми: ***y = A + ε*** , ***y = A - ε*** .



Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда $x \to x_0$ или $x \to \infty$ аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением: $\lim f(x)$.

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim\left[C \cdot f(x)\right] = C \cdot \lim f(x)$$

Основные теоремы о пределах

- Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \qquad \left(\lim f_2(x) \neq 0\right)$$

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim \left[f(x)\right]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$$

- Предел показательно – степенной функции:

$$\lim \left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

Основные теоремы о пределах

- Если между соответствующими значениями трех функций

$$u = u(x); \quad z = z(x); \quad v = v(x)$$

выполняются неравенства: $u \le z \le v$, при этом:

$$\lim u(x) = \lim v(x) = A \text{ тогда: } \lim z(x) = A$$

- Если функция ***f(x)*** монотонна и ограничена при $\boldsymbol{x < x_0}$ или при $\boldsymbol{x > x_0}$, то существует соответственно ее левый предел:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$$

или ее правый предел:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^{0};\quad 0^{\infty};\quad \infty^{0};\quad \infty-\infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение

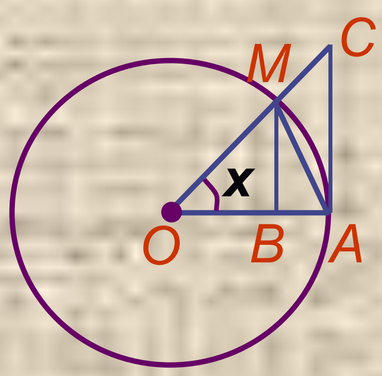
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\frac{2}{\infty}=0$$

Первый замечательный предел

Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена при ***x* = 0**.

Найдем предел этой функции при $x \to 0$



$$|OA| = 1 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Обозначим:

S₁ - площадь треугольника OMA,

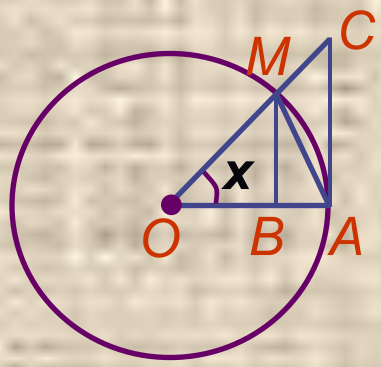
S₂ - площадь сектора OMA,

S₃ - площадь треугольника OCA,

Из рисунка видно, что $S_1 < S_2 < S_3$

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} OA \cdot 0M \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

Первый замечательный предел



$$S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot AM = \frac{1}{2} x$$

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} 1 \cdot tgx$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tgx \quad \Rightarrow \quad \sin x < x < tgx \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < tgx \\ x > \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < \dfrac{\sin x}{x} \\ 1 > \dfrac{\sin x}{x} \end{cases} \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Первый замечательный предел

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1 \\ &\lim_{x\to 0} 1 = 1 \end{aligned}\right] \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Формула справедлива также при ***x < 0***

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx} = 1$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=$$

$$=2\left(2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=2(2\cdot 1)^2=8$$

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называется равенство:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

Следствия:

2.7182818284

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx}=e$$

Второй замечательный предел применяется для раскрытия неопределенности 1^{∞}.

Другие полезные формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{m}-1}{x}=m \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}$$

$$\left(\frac{4}{x-1}=\frac{1}{y}\quad\Rightarrow\quad x=4y+1;\ \ x\to\infty;\quad y\to\infty\right)$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y+1+3}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4}$$

$$=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{4}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4}=e^{4}\cdot 1^{4}=e^{4}$$