

Числовые последовательно сти

Предел числовой
последовательности и её
сходимость

Бесконечной числовой
последовательностью
называется числовая функция,
определённая на множестве
натуральных чисел.

Способы задания последовательности:

- 1) В виде формулы – по номеру n -ого члена $a_n = 2^n$
- 2) Рекуррентный (индуктивный) –
указывается правило, по которому можно вычислить
общий член последовательности через предыдущие и
задается несколько первых членов.
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_1 = 3, a_2 = 5,$$
- 3) Словесное описание последовательности

Монотонные последовательности

5; 4; 3;...

Строго
убывающая

$$a_n < a_{n-1}$$

Убывающая

$$a_n \leq a_{n-1}$$

5; 5; 4; 4; 3...

7; 9; 11;...

Строго
возрастающая

$$a_n > a_{n-1}$$

Возрастающая

$$a_n \geq a_{n-1}$$

7; 7; 9; 9; 11;...

Знакопеременная последовательность

$$a_n = (-1)^n \cdot 2n$$

$$a_1 = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 1 = -2$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = -6$$

$$a_4 = 8$$

Последовательность a_n называется **ограниченной**, если существуют такие точки M и m , что для любого натурального n выполняется неравенство: $m \leq a_n \leq M$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$$0 < 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \leq 1$$

$$\mathbf{m = 0} \quad \mathbf{M = 1}$$

В противном случае последовательность называется **неограниченной**.

Если существует точка M (m), и не существует точка m (M), то последовательность называется *ограниченной сверху* (*снизу*) и *неограниченной снизу* (*сверху*).

$0 \leq 2^n = 1; 2; 4; 8; \dots$ - ограничена снизу

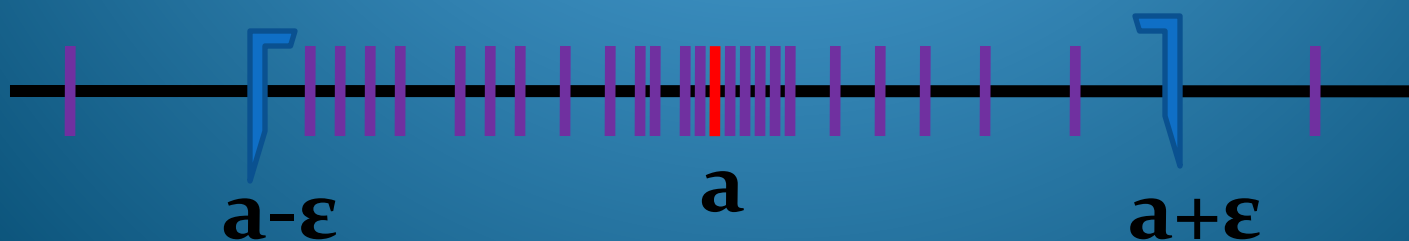
$-3n^2 = 0; -3; -12; -27; \dots \leq 0$

- ограничена сверху

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

Число a называют **пределом числовой последовательности**, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что для каждого натурального $n \geq N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$



Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предел – расходящейся.

ТЕОРЕМА: *Необходимое условие существования предела последовательности.*

Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

ТЕОРЕМА 1: Всякая сходящаяся последовательность имеет один предел.

ТЕОРЕМА 2: Если числовая последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ.

Бесконечно малой (бм) величиной называется такая переменная величина, которая в процессе своего изменения становится и в дальнейшем остается по модулю меньше любого наперед заданного положительного числа, как бы мало оно ни было.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ.

Последовательность называется **бесконечно большой (бб)**, если для каждого положительного числа A найдется такое натуральное число N , что для любого $n > N$ выполняется неравенство: $|a_n| > A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Свойства бесконечно

малой.

- Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
- Произведение константы на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.
- x – бесконечно малая, то $1/x$ – бесконечно большая и наоборот ($x \rightarrow 0 \rightarrow 1/x \rightarrow \infty$).

Если $x \rightarrow 0$ то $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$

Если $x \rightarrow \infty$ то $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

Свойства пределов.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \qquad 2^*) \lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot a_n) = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

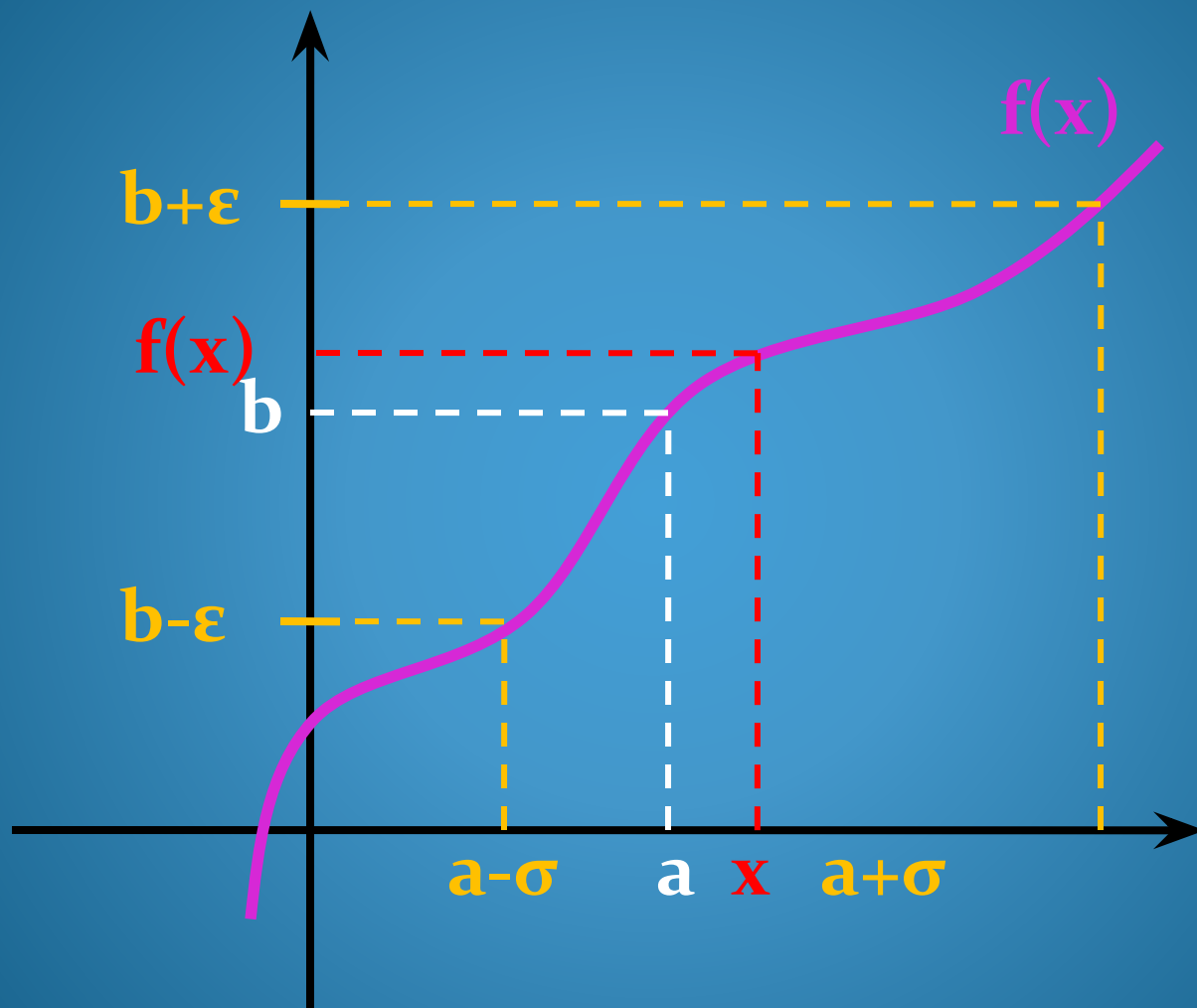
$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Предел функции

Число b есть **предел функции** $f(x)$ при $x \rightarrow a$ если, какова бы ни была ε -окрестность точки b , найдется такая σ -окрестность точки a , что для любого значения $x \neq a$ и принадлежащего σ -окрестности точки a , значение $f(x)$,будет принадлежать ε -окрестности точки b .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$



Теоремы о пределах

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) - \lim_{x \rightarrow a} f_3(x)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$2^*) \lim_{x \rightarrow a} (C \cdot f(x)) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$$

Теоремы 2-5 см свойства пределов последовательности

$$4) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

6) Правило Лопиталя:

$$\left[\frac{0}{0} \right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

Односторонние пределы.

Левый предел

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a-0)$$



Правый предел

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a+0)$$



При $a=0$

Левый предел

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(-0)$$

Правый предел

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(+0)$$

Найти предел функции при $x \rightarrow 1$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{если } x \leq 1 \\ 2x + 1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Левый предел: $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (-x + 1) = 0$

Правый предел: $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (2x + 1) = 3$

Замечательные пределы

Две бесконечно малые называются *эквивалентными*, если предел их отношения равен единице.

Эквивалентные бесконечно малые можно заменять одна на другую.

Замечательные пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$5) \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

$$2) \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{y}\right)^{\frac{y}{\beta}} = e^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(1 + x)}{x} = 1$$

$$4) \lim_{y \rightarrow 0} (1 + \alpha y)^{\frac{1}{\beta y}} = e^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^k - 1}{x} = k$$

Эквивалентные функции при $x \rightarrow 0$

$$\sin x \sim x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1 + x) \sim x$$

$$(1 + x)^k - 1 \sim kx$$

Если предел отношения двух бесконечно малых равен некоторому числу k , отличному от единицы, то эти бесконечно малые называются **одинаковыми** или **бесконечно малыми одного порядка малости**.

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = k \neq 1, \quad k - \text{const}$$

Если предел отношения двух бесконечно малых равен нулю, то в числителе бесконечно малая **более высокого порядка**, чем в знаменателе.

Непрерывная функция

ТЕОРЕМА: Функция не может иметь двух различных пределов в точке.

Функция является **непрерывной** в точке a , если она имеет предел равный значению функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка называется *непрерывной на всём промежутке*.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* этой функции.

Функция, имеющая правый (*левый*) предел, *непрерывна справа (слева)*.

Если функция имеет конечный правый или левый предел в точке разрыва, то это – *точка разрыва первого рода* (все остальные – *второго рода*).

Свойства непрерывных функций

- **ТЕОРЕМА 1, 2** Сумма (**произведение**) конечного числа непрерывных в точке a функций есть непрерывная в этой точке функция.
- **ТЕОРЕМА 3** Отношение двух функций, непрерывных в точке a есть непрерывная в этой точке функция, если значение функции, стоящей в знаменателе в точке a отлично от нуля.