ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

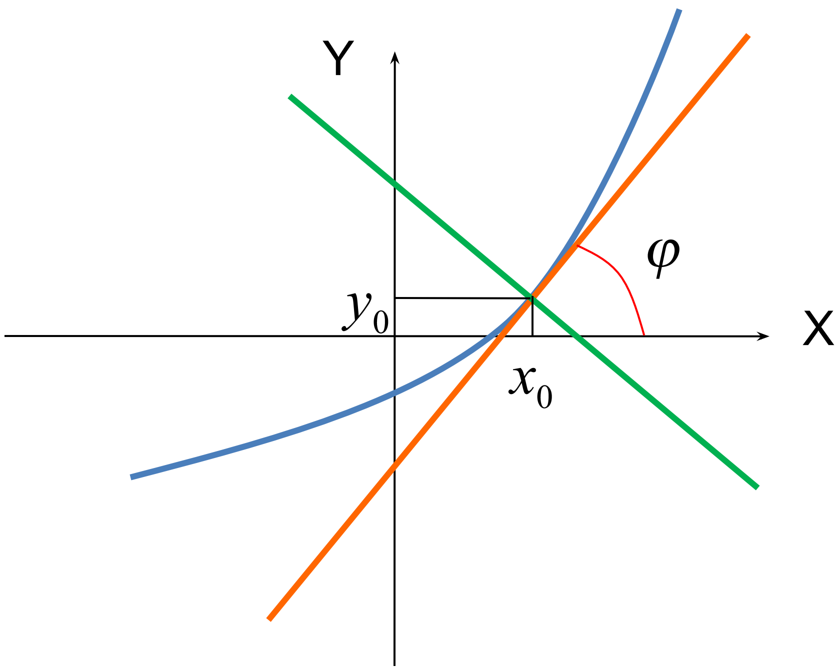
Предел отношения приращения функции *y=f(x)* к приращению аргумента *(x)*, когда приращение аргумента *(Δx)* стремится к нулю (если этот предел существует и является конечным) называется **производной функции**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная функции в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0.



Уравнение касательной в точке x_0:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение нормали в точке x_0:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть функции *u(x)* и *v(x)* имеют производные, тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций также имеют производные, которые выражаются следующим образом:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (Cu)' = Cu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0)$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Производная сложной функции *f(g(x))* вычисляется по формуле:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'\left(g\right)\cdot g'\left(x\right)$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1)

$$C' = 0$$

2)

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1} \qquad \left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \qquad , где\ u = u(x)$$

3)

$$\left(e^x\right)' = e^x \qquad \left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$$

4)

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \qquad \left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

5)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

6)

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

7)

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\cos u)' = (-\sin u) \cdot u'$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

8)
$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\sin u)' = (\cos u)\cdot u'$$

9)
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$$

10)
$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$$

11)
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$$

12)
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$$

13)
$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

14)
$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

ПРИМЕРЫ.

1) $$\left(3\cdot 7^{x}-4x^{5}+2\right)' = 3\cdot 7^{x}\ln 7-20x^{4}+0.$$

2) $$\left(\sin x\cdot \log_3 x\right)' = \left(\sin x\right)'\cdot \log_3 x+\sin x\cdot\left(\log_3 x\right)' =$$

$$=\cos x\cdot \log_3 x+\sin x\cdot \frac{1}{x\ln 3}.$$

3) $$\left(\frac{arctgx}{\ln x}\right)' = \frac{\left(arctgx\right)'\cdot \ln x-arctgx\cdot\left(\ln x\right)'}{\left(\ln x\right)^{2}} =$$

$$=\frac{\frac{1}{1+x^{2}}\cdot \ln x-arctgx\cdot \frac{1}{x}}{\left(\ln x\right)^{2}}.$$

4) $\left(\cos\left(x^2\right)\right)' = -\sin\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)' = -2x\sin\left(x^2\right).$

5) $\left(\sqrt[3]{5x}\right)' = \left((5x)^{1/3}\right)' = \dfrac{1}{3}(5x)^{(1/3)-1}\cdot(5x)' =$

$$= \frac{5}{3}(5x)^{-2/3} = \frac{5}{3\sqrt[3]{25x^2}}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть *y=f(x)* определена на промежутке *X* и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{/}(x)$$

Дифференциалом функции называется главная линейная часть приращения функции. Дифференциал функции вычисляется по формуле

$$d\left(f(x)\right) = f^{/}(x)dx$$

ПРИМЕРЫ.

1) $$d(4x-1)=(4x-1)'dx=4dx.$$

2) $$d(\sin 3x)=(\sin 3x)'dx=3\cos(3x)dx.$$

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Предел отношения двух бесконечно малых функций или двух бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \, \text{или} \, \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ПРИМЕРЫ.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

2) $$\lim_{x\to \infty}\frac{5x-1}{3-x}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to \infty}\frac{(5x-1)'}{(3-x)'}=\lim_{x\to \infty}\frac{5}{-1}=-5.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a.$$

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Назовем $f'(x)$ производной первого порядка функции $f(x)$.

Определение. Производная от производной некоторой функции называется производной второго порядка (или второй производной) этой функции. Производная от второй производной называется производной третьего порядка (или третьей производной) и т. д. Производные, начиная со второй, называются **производными высших порядков**.

Производную n-го порядка обозначают $f^{(n)}(x)$.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

Пример. $$\left(\ln x\right)''' = \boxed{\frac{2}{x^3}}.$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\ln x\right)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2}$$

$$\left(\ln x\right)''' = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3}$$