§5. Системы линейных уравнений

6.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей *m* уравнений и *n* неизвестных называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ik} – **коэффициенты системы**, b_i – **свободные члены** ($i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$).

Систему (1) удобно записывать в компактной матричной форме:

$$AX = B,$$

Где
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
- матрица коэффициентов системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец неизвестных.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец свободных членов.

ОПР. **Расширенной матрицей системы** (1) называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Решение системы

Упорядоченное множество чисел $(c_1; c_2; \ldots ; c_n)$ называется **решением системы** (1), если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вместо соответственно чисел $(c_1; c_2; \ldots ; c_n)$.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется

Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

В последнем случае каждое ее решение называется **частным решением системы**.

Совокупность всех частных решений называется **общим решением.**

Решить систему – это значит выяснить совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются **эквивалентными**, если они имеют одно и то же общее решение.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным**.

6.2. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Данная система может быть записана в матричной форме: $AX = B.$

Основная матрица ***А*** такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **определителем системы**.

Если определитель системы отличен от нуля, то система называется **невырожденной**.

Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными

Система трёх уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (2)$$

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Вспомогательные определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Система (2) может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \\ \Delta \cdot z = \Delta_z. \end{cases}$$

Откуда следует, что при $\Delta \neq 0$ система (2) имеет **единственное решение**, которое находится **по формулам Крамера**:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

При $\Delta = 0$ и хотя бы одном из $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ отличном от нуля **система (2) несовместна.**

При $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ система (2) имеет **бесчисленное множество решений.**

Пример

Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=0. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (1 - 12) - 3 \cdot (1 - 9) + 1 \cdot (4 - 3) = -22 + 24 + 1 = 3 \neq 0$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

Вычислим $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (1 - 12) - 3 \cdot (5 - 0) + 1 \cdot (20 - 0) = -44 - 15 + 20 = -39$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (5 - 0) - 4 \cdot (1 - 9) + 1 \cdot (0 - 15) = 10 + 32 - 15 = 27$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (0 - 20) - 3 \cdot (0 - 15) + 4 \cdot (4 - 3) = -40 + 45 + 4 = 9$$

По формулам Крамера находим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-39}{3} = -13, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{27}{3} = 9, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: $\{(-13; 9; 3)\}$.

6.3. Исследование и решение СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим произвольную СЛАУ (1) содержащую ***m*** уравнений и ***n*** неизвестных.

Теорема 6.1. СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы:

$$rank\,\overline{A} = rank A.$$

Теорема 6.2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет **единственное решение**.

Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет **бесчисленное множество решений**.

6.4. Метод Гаусса

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных) является универсальным методом решения систем линейных алгебраических уравнений.

С помощью элементарных преобразований система уравнение приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных находятся все остальные переменные.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов:

1. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду.
2. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из полученной ступенчатой системы.

Элементарные преобразования

1. Перестановка уравнений местами.
2. Умножение какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля.
3. Умножение какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля и прибавление его к какому-либо уравнению системы.

Рассмотрим метод Гаусса для системы третьего порядка, определитель которой не равен нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, используя элементарные преобразования системы а затем в полученной системе исключим x_2 из третьего уравнения. Мы приведем систему к «треугольному» виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad c_{33}x_3 = d_3. \end{cases}$$

После этого начинается обратный ход метода Гаусса: из последнего уравнения находим x_3, из второго x_2, из первого x_1.

Замечание. Если коэффициент a_{11} в системе равен нулю, то можно поменять местами уравнения или неизвестные.

Рассмотренный метод решения, заключающийся в сведении исходной системы к системе, имеющей треугольный вид

$$\begin{cases} \bullet + \bullet + \bullet = \bullet, \\ \qquad \bullet + \bullet = \bullet, \\ \qquad\qquad \bullet = \bullet, \end{cases}$$

называется **методом Гаусса**.

Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = 4, \\ 3x + 4y + z = 0. \end{cases}$$

Исключим **x** из второго и третьего уравнения. Для этого первое уравнение умножим на –2 и сложим со вторым, затем первое уравнение умножим на –3 и сложим с третьим.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 5, & \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ 2x + 3y - z = 4, \\ 3x + 4y + z = 0. \end{cases}$$

$$+\begin{array}{r} -2x - 2y - 6z = -10 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ \hline y - 7z = -6 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} -3x - 3y - 9z = -15 \\ 3x + 4y + z = 0 \\ \hline y - 8z = -15 \end{array}$$

Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 5, \\ y - 7z = -6, \quad \cdot(-1) \\ y - 8z = -15. \end{cases}$$

$+$

Далее исключим *y* из третьего уравнения, для чего второе уравнение полученной системы умножим на –1 и сложим с третьим. Получим систему

$$\begin{cases} x + y + 3z = 5, \\ y - 7z = -6, \\ z = 9. \end{cases}$$

Из третьего уравнения $z = 9,$ подставим во второе $y - 7 \cdot 9 = -6$

и найдем $y = 57.$

Подставив найденные значения $z = 9$ и $y = 57$ в первое уравнение $x + 57 + 3 \cdot 9 = 5$

получим $x = -79.$

Ответ: $\{(-79; 57; 9)\}.$

Пример

Решить систему методом Гаусса
$$\begin{cases} 3x+4y-z=7, \\ x+2y-3z=0, \\ 7x+10y-5z=2. \end{cases}$$

Решение. Поменяем местами первое и второе уравнения системы (т. к. удобно иметь коэффициент при равный 1):

$$\begin{cases} x+2y-3z=0, & \cdot(-3);\ \cdot(-7) \\ 3x+4y-z=7, & \hookleftarrow + \\ 7x+10y-5z=2. & \hookleftarrow + \end{cases}$$

Получим систему $\begin{cases} x+2y-3z=0, \\ -2y+8z=7, \cdot(-2) \\ -4y+16z=2. \quad \hookleftarrow + \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y-3z=0, \\ -2y+8z=7, \\ 0=-12, \end{cases}$$

Последнее равенство неверно. Следовательно, система несовместна.

Ответ: $\varnothing$.

Пример

Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 4x - 6y = 2. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение на (-2) и сложим со вторым:

$$\begin{array}{r} -4x + 6y = -2 \\ + \quad 4x - 6y = 2 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Таким образом, в системе остается одно уравнение $2x - 3y = 1.$

Такая система имеет бесчисленное множество решений. Эти решения можно записать в виде:

$$y = c,\ x = \frac{1+3c}{2}, \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}c, \\ y = c, \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Пример

1. Установить, совместна ли система и, если она совместна, найти ее решение по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 4x + 5y = 2, \end{cases}$$

Решение

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7 \neq 0$$

Следовательно, **система имеет единственное решение.** Так как

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 4 = 21, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14,$$

то $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{21}{7} = 3,$ $\quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{14}{7} = -2.$

Ответ: $(3; -2)$

Найденное решение $(3; -2)$- это точка пересечения прямых

$3x + 2y = 5$ и $4x + 5y = 2$

2. Установить, совместна ли система и, если она совместна, найти ее решение по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 4x - 6y = 8, \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{8} \end{pmatrix}.$$

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0.$$

Определитель

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 24 = 18 \neq 0,$$

отличен от нуля, следовательно **система несовместна** (т.е. не имеет решений).

Так как каждое уравнение системы – это уравнение прямой и система не имеет решения, то это значит, что прямые

$2x - 3y = 1$ и $4x - 6y = 8$

параллельны и не имеют общих точек.

Тема: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Линия на плоскости часто задается как **множество точек**, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством.

Замечание: геометрическим образом заданного уравнения не всегда является линия.

$$x^2 + y^2 = -1$$

ОПР. Уравнением линии (или кривой) на плоскости ***Oxy*** называется такое уравнение $F(x;y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты ***x*** и ***y*** каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

ОПР. Переменные ***x*** и ***y*** в уравнении линии называются **текущими координатами** точек линии.

§1. Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является **прямая**.

Каждая прямая на плоскости ***OXY*** определяется уравнением первой степени с двумя неизвестными.

Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.

1.1. Различные виды уравнений прямой

Уравнение $Ax + By + C = 0, \quad \left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ называется **общим уравнением прямой.**

Каждая прямая на плоскости Oxy определяется линейным уравнением первой степени с двумя неизвестными вида

$$Ax + By + C = 0, \quad \left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$$

и каждое линейное уравнение определяет некоторую прямую.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть дана прямая $Ax + By + C = 0$. Если $A \neq B \neq C \neq 0$, то, разделив на $(-C)$:

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y - 1 = 0, \quad \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1,$$

Обозначив $-\frac{C}{A} = a$, $-\frac{C}{B} = b$,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Получим **уравнение прямой в отрезках**; ***a*** и ***b*** – отрезки, которые она отсекает на осях координат.

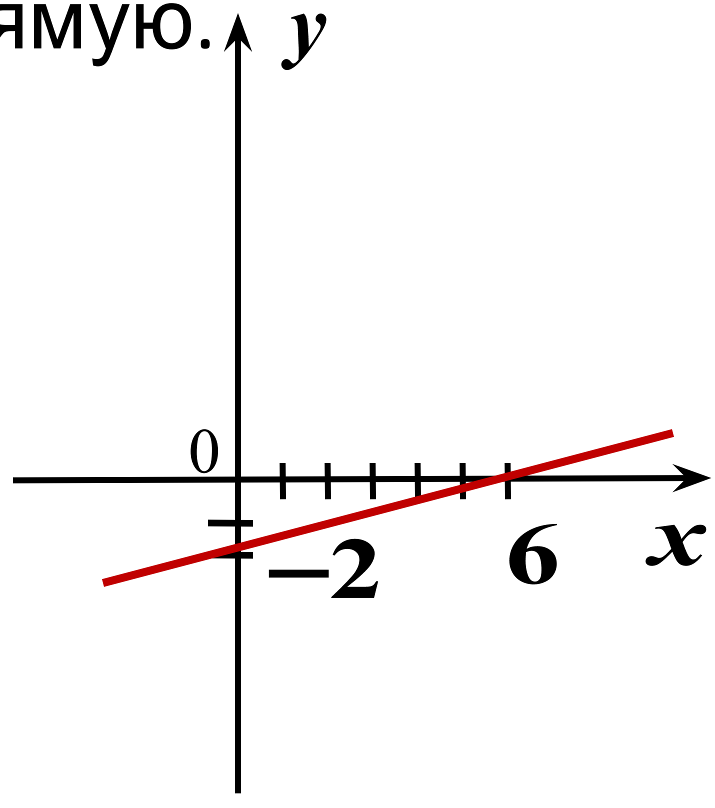
Пример

Записать уравнение прямой $2x-6y-12=0$ в отрезках. Построить прямую.

Решение. $2x-6y=12$

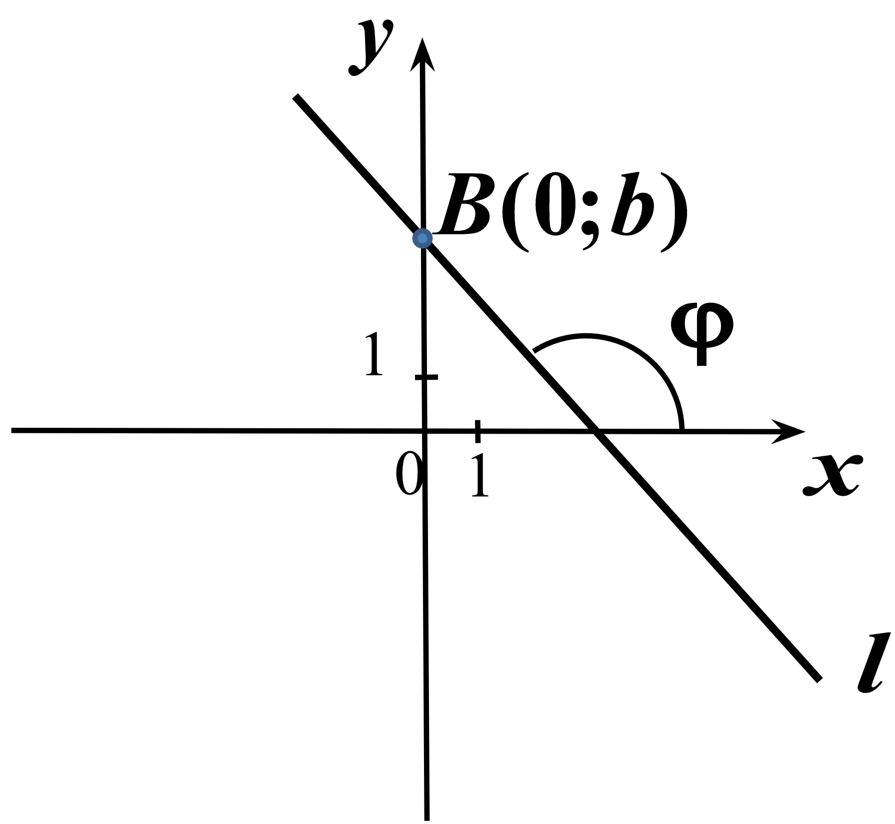
$$\frac{2x}{12}-\frac{6y}{12}=\frac{12}{12},$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$$



Уравнение прямой с угловым коэффициентом k

Дана прямая l которая пересекает оси координат и не параллельна ни одной из них. Пусть угол наклона к положительному направлению оси ***Ox*** равен φ. Точка пересечения с ***Oy*** – $B(0,b)$.


y
B(0;b)
φ
1
0
1
x
l

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка прямой.

$y = kx + b$ – **уравнение прямой с угловым коэффициентом** k, где $k = \operatorname{tg}\varphi$

Частные случаи:

1). $k = 0,\ y = b$ – уравнение прямой, параллельной оси ***Ox*** и отстоящей от нее на b;

2). $b = 0,\ y = kx$ – прямая проходит через начало координат;

3). $y = 0$ – уравнение оси Ox;

4). $x = 0$ – уравнение оси Oy;

5). $x = a$ – уравнение прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от нее на ***a*** ;

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1, y_1)$ *в данном направлении k*

Пусть дана точка $M(x_1, y_1)$ и задан угловой коэффициент ***k***. Тогда уравнение прямой имеет вид:

$$y = k(x - x_1) + y_1.$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

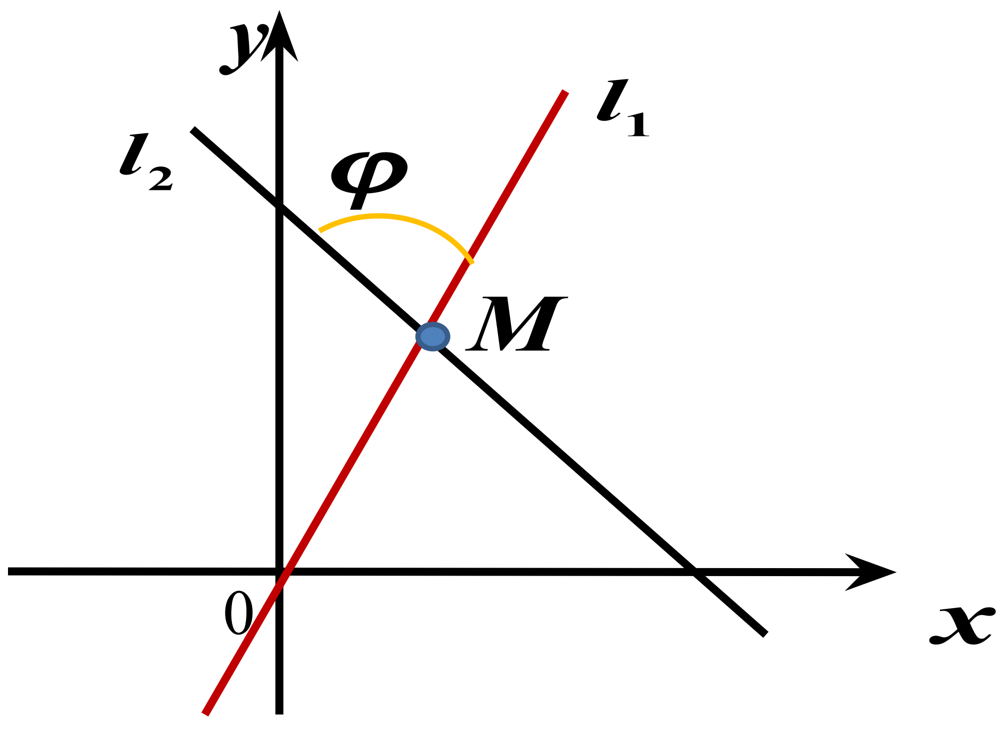
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Угол между прямыми

Рассмотрим на плоскости две прямые:

$l_1 : \ y = k_1 x + b_1$ и $l_2 : \ y = k_2 x + b_2$

Пусть прямые пересекаются в точке ***M***.



Углом между прямыми l_1 и l_2 будем называть наименьший угол, на который надо повернуть l_1 вокруг точки *M* против часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой l_2 .

Угол между прямыми: $$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|$$

Взаимное расположение двух прямых:

1. Прямые совпадают: $\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 = b_2, \end{cases}$

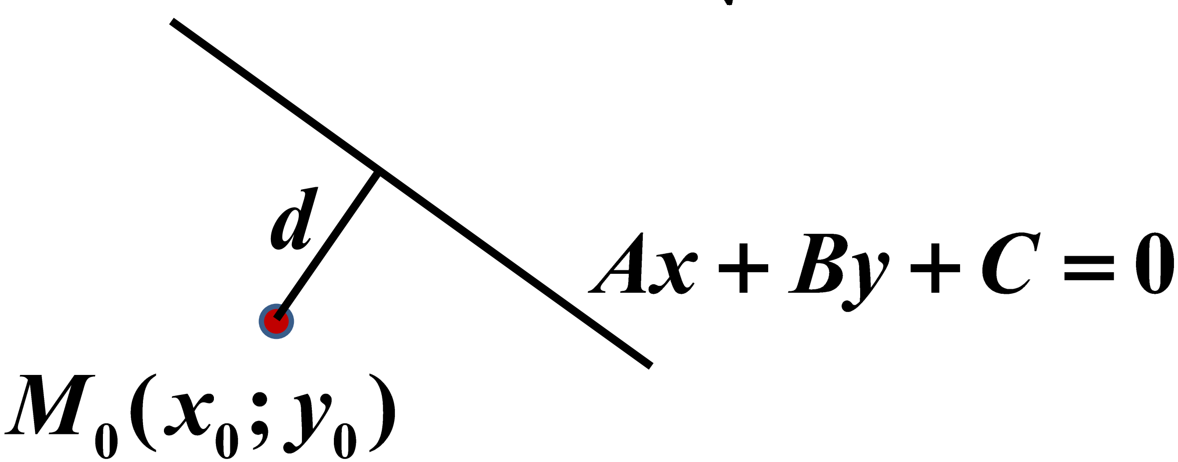
2. Прямые параллельны: $\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2, \end{cases}$

3. Перпендикулярны: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$

Расстояние от точки до прямой

Расстояние ***d*** от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$$



Тема: Элементы векторной алгебры

§1. Векторы

1.1. Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются ***скалярными.*** Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением.

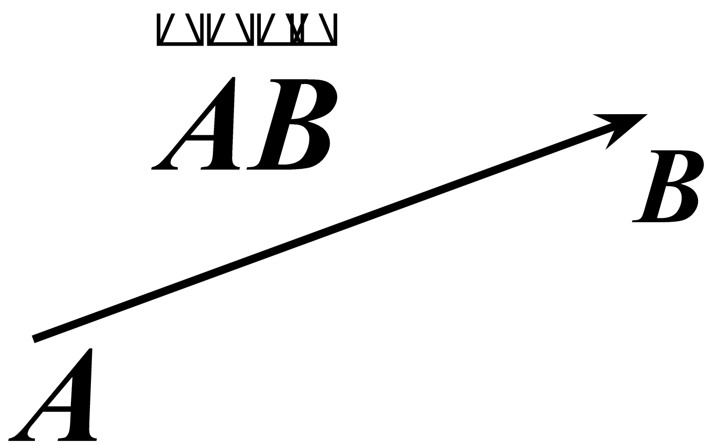
Такие величины называют ***векторными.*** Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

ОПР. **Вектором** называется направленный отрезок.

На чертеже вектор изображается отрезком, на котором стрелкой помечено направление

$\vec{a}$

Если один конец отрезка ***AB*** - точка ***A*** - начало вектора, а точка ***B*** - конец вектора, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$.



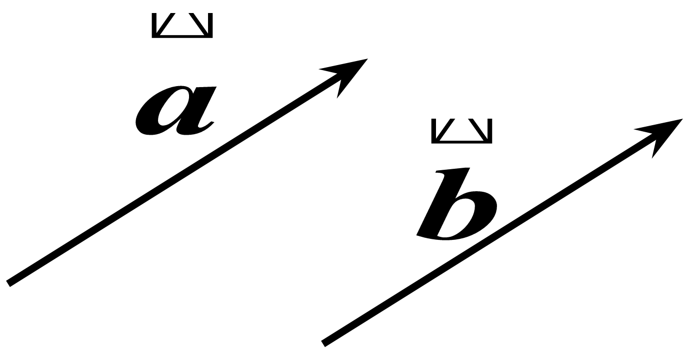
Расстояние между началом и концом вектора называется его **модулем** (или длиной). Модуль обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\vec{a}\right|$.

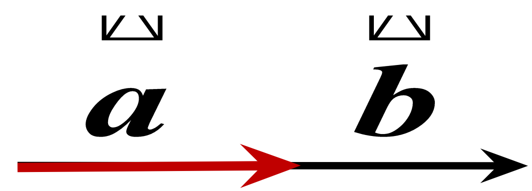
Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым** вектором, обозначается $\vec{0}$. Модуль нулевого вектора равен 0, а направление не определено.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** (или ортом), обозначается $\vec{e}$

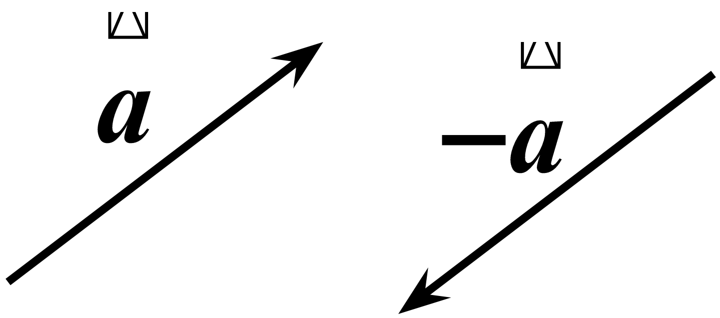
Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной прямой), называются **коллинеарными** $(\vec{a} \parallel \vec{b})$.

Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.





Два коллинеарных вектора называются **противоположными**, если они имеют равные модули и противоположное направление. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.



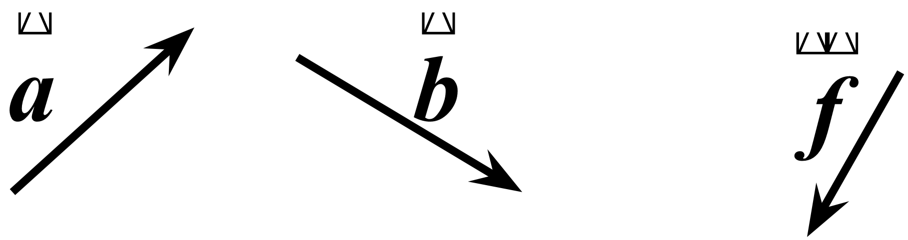
1.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют их сложение, вычитание, умножение вектора на число.

Суммой $\vec{c}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совмещено с концом вектора $\vec{a}$.

Записывают $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

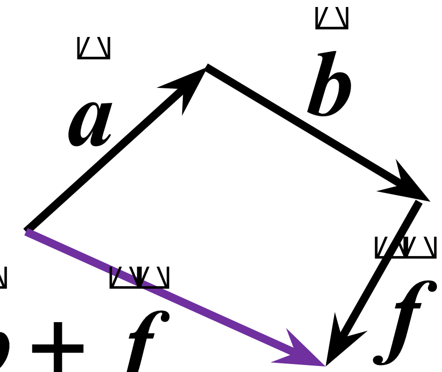
Дано:



Правило треугольника:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Правило многоугольника:



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{f}$$

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, который удовлетворяет условиям:

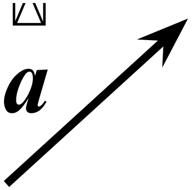
1) $\left|\vec{b}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \left|\vec{a}\right|;$

2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — одинаково направлены при $\lambda > 0;$

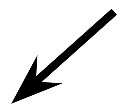
3) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — противоположно направлены при $\lambda < 0.$

Дано: λ - некоторое число;

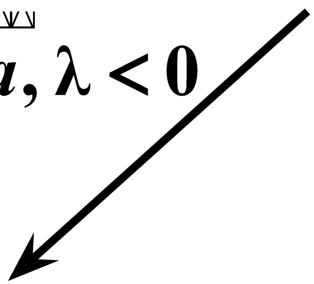
$\vec{a}$



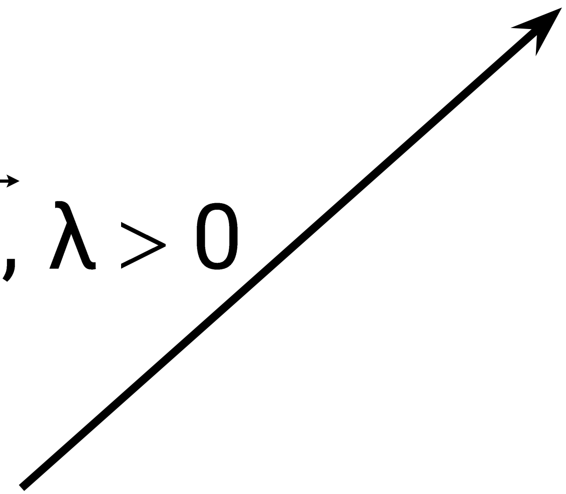
$-\frac{1}{2}\vec{a}, \lambda < 0$



$\lambda\vec{a}, \lambda < 0$

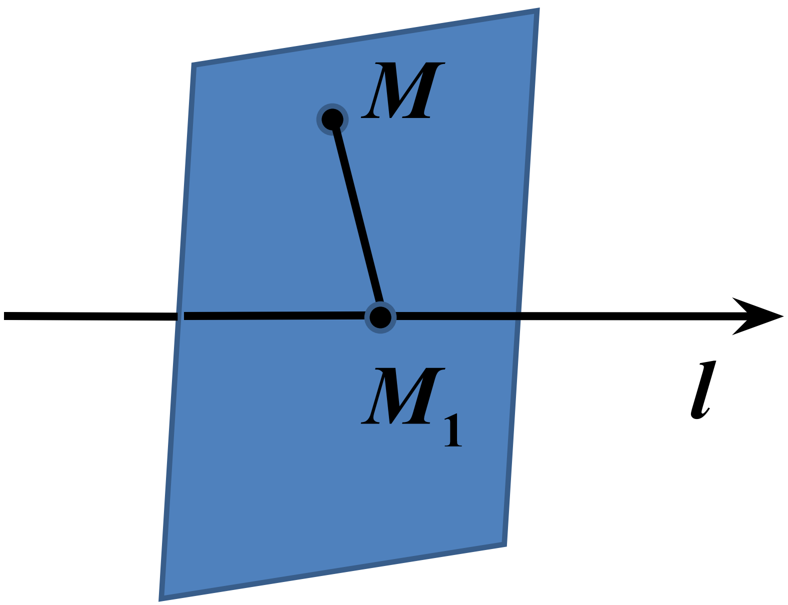


$3\vec{a}, \lambda > 0$



1.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l т. е. направленная прямая.



Проекцией точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1 опущенного из точки M на ось.

Если точка ***M*** лежит на оси, то ее проекция на ось совпадает с самой точкой.

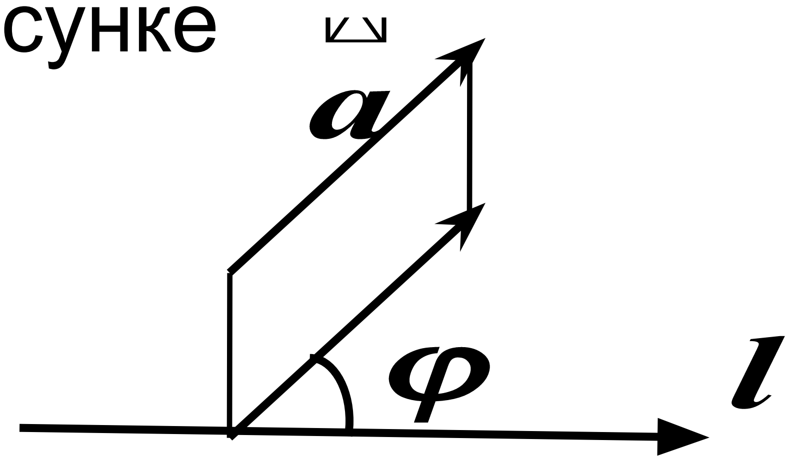
Пусть $\overrightarrow{AB} \neq 0$ — произвольный вектор. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось соответственно начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

ОПР. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось одинаково направлены и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось противоположно направлены.

Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ равна 0.

Проекция вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ на ось l обозначается: **пр**$_l \overrightarrow{AB}$.

Угол φ между вектором $\vec{a}$ и осью l (или угол между двумя векторами) изображен на рисунке



1.4. Линейная зависимость векторов

При решении различных задач, как правило, приходится иметь дело не с одним вектором, а с некоторой совокупностью векторов одной размерности. Такую совокупность векторов называют **системой векторов** и обозначают:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n. \qquad (1)$$

ОПР. Линейной комбинацией векторов (1) называется вектор вида

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – любые действи-тельные числа. В этом случае говорят также, что вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

ОПР. Система ненулевых векторов (1) называется **линейно зависимой**, если существую такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не равные одновременно нулю, что линейная комбинация данной системы с указанными числами равна нулевому вектору: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$. **(2)**

Если же равенство (2) для данной системы векторов выполняется лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

то такая система векторов называется **линейно независимой**.

ОПР. Размерностью системы векторов называется максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Если таких векторов ***n*,** то система называется ***n***-мерной.

ОПР. Совокупность ***n*** линейно независимых векторов ***n*** **-**мерной системы векторов (1) называется ее **базисом**.

Теорема Каждый вектор $\vec{b}$ ***n***-мерной системы векторов можно представить и притом единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n, \qquad (3)$$

Равенство (3) называется **разложением вектора** $\vec{b}$ **по базису** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – **координатами вектора** $\vec{b}$ относительно этого базиса.

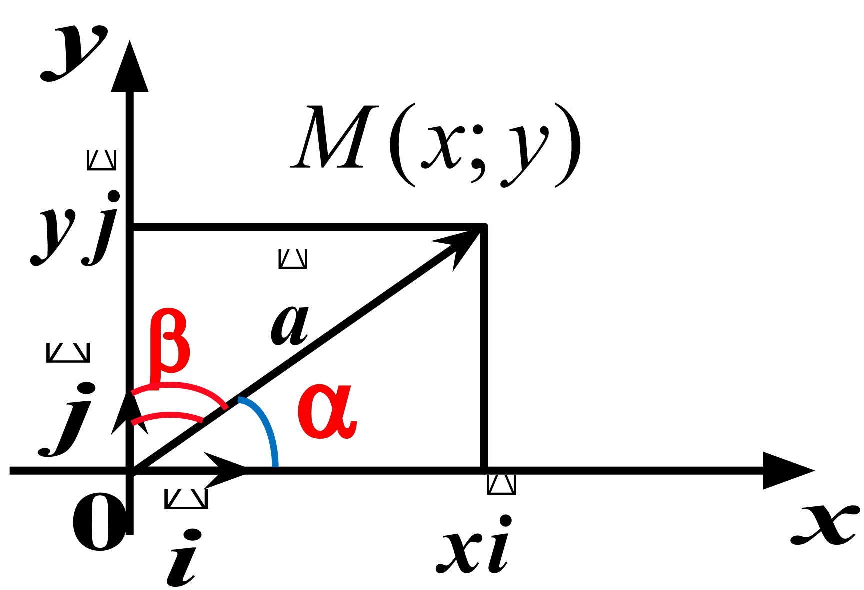
В силу единственности разложения (3) каждый вектор однозначно может быть определен координатами в некотором базисе.

На плоскости **любые два неколлинеарных вектора** образуют базис.

В пространстве **любые три некомпланарных вектора** образуют базис.

1.5. Координаты вектора

Координатами вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат ***OXY*** называются проекции ***x***, ***y***, вектора $\vec{a}$ на оси координат. Обозначают $\vec{a} = (x; y)$.



Множество всех n-мерных векторов с действительными координатами обозначается R^n.

Таким образом, вектор $\vec{a} = (x, y) \in R^2$.

Если $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные векторы (орты) координатных осей, то вектор можно представить в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ называются косинусы углов α, β, образуемых им с осями координат ***OX*** и ***OY*** соответственно.

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Если вектор $\vec{a}$ имеет начало в точке $A(x_1; y_1)$ и конец в точке $B(x_2; y_2)$, то **координаты вектора** равны разности соответствую-щих координат конечной и начальной его точек: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример

Даны точки $A(1;2)$ и $B(5;4)$.

Найти: а) координаты $\overrightarrow{AB}$;

б) модуль $|\overrightarrow{AB}|$.

Решение. а) Координаты $\overrightarrow{AB} = (5-1;4-2) = (4;2)$

б) Модуль найдем, используя формулу

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

1.6. Действия над векторами, заданными координатами

Пусть $\vec{a} = (x_1; y_1), \ \vec{b} = (x_2; y_2).$

тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Условие параллельности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

1.7. Скалярное произведение векторов

ОПР. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$

Если известны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то скалярное произведение можно вычислить по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2.$

Свойства скалярного произведения:

1). $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$

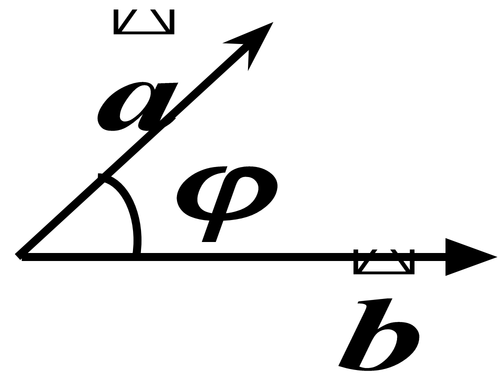
2). $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right);$

3). $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c};$

4). $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^{2}.$

Угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|};$$



Условие перпендикулярности векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы.

Пример

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол между ними равен 60°, $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3.$

Решение. Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi,$

то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^{\circ} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Рассмотрим пространство R^3.

Вектор $\vec{a} = (x, y, z) \in R^3$.

Тогда $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + (z_2 - z_1)}.$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Компланарность векторов

- Три вектора $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k},$$

компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$