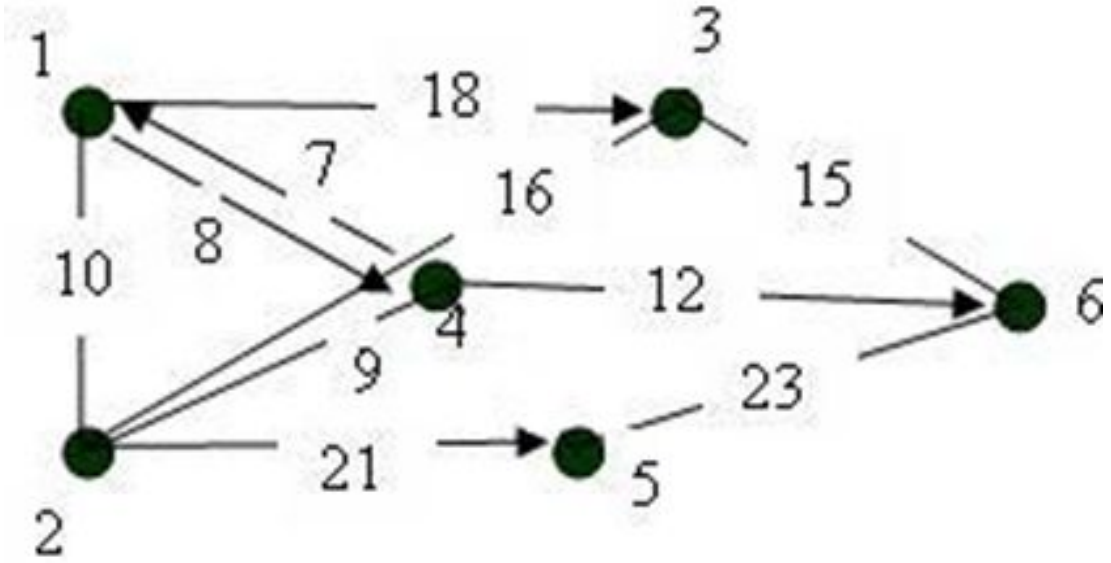
Алогритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры — алгоритм на графах, изобретённый нидерландским ученым Э. Дейкстрой в 1959 году. Находит кратчайшее расстояние от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов без рёбер отрицательного веса. Алгоритм широко применяется в программировании и технологиях, например, его использует протокол OSPF для устранения кольцевых маршрутов.

ПРИМЕР 1

Необходимо найти все кратчайшие пути от вершины №1 для графа, представленного на рисунке:



СОСТАВИМ МАТРИЦУ ДЛИН КРАТЧАЙШИХ ДУГ ДЛЯ ДАННОГО ГРАФА

$$\begin{pmatrix} \infty & 10 & 18 & 8 & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 16 & 9 & 21 & \infty \\ \infty & 16 & \infty & \infty & 15 & \infty \\ 7 & 9 & \infty & \infty & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 23 \\ \infty & \infty & 15 & \infty & 23 & \infty \end{pmatrix}$$

ртовая вершина, от которой строится дерево кратчайших путей – вершина

Задаем стартовые условия:

$d(1)=0$, $d(x)=\infty$

Окрашиваем вершину 1, y=1.

НАХОДИМ БЛИЖАЙШУЮ ВЕРШИНУ К ОКРАШЕННОЙ НАМИ, ИСПОЬЗУЯ ФОРМУЛУ

$$d(x)=\min\{d(x);\ d(y)+ a_{y,x}\}$$

$d(2)=\min\{d(2);d(1)+a(1,2)\}=\min\{\infty;0+10\}=10$

$d(3)=\min\{d(3);d(1)+a(1,3)\}=\min\{\infty;0+18\}=18$

$d(4)=\min\{d(4);d(1)+a(1,4)\}=\min\{\infty;0+8\}=8$

$d(5)=\min\{d(5);d(1)+a(1,5)\}=\min\{\infty;0+\infty\}=\infty$

$d(6)=\min\{d(6)\ ;\ d(1)+a(1,6)\}=\min\{\infty;\ 0+\infty\}=\infty$

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 4 d(4)=8. Включаем вершину №4 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (1,4)

$$d(2)=\min\{d(2);d(4)+a(4,2)\}=\min\{10;8+9\}=10$$
$$d(3)=\min\{d(3);d(4)+a(4,3)\}=\min\{18;8+\infty\}=18$$
$$d(5)=\min\{d(5);d(4)+a(4,5)\}=\min\{\infty;8+\infty\}=\infty$$
$$d(6)=\min\{d(6)\ ;\ d(4)+a(4,6)\}=\min\{\infty;\ 8+12\}=20$$

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 2 d(2)=10. Включаем вершину №2 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (1,2)

$$d(3)=\min\{d(3);d(2)+a(2,3)\}=\min\{18;10+16\}=18$$
$$d(5)=\min\{d(5);d(2)+a(2,5)\}=\min\{\infty;10+21\}=31$$
$$d(6)=\min\{d(6)\ ;\ d(2)+a(2,6)\}=\min\{20;\ 10+\infty\}=20$$

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 3 d(3)=18. Включаем вершину №3 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (1,3)

$$d(5)=\min\{d(5);d(3)+a(3,5)\}=\min\{31;18+15\}=31$$

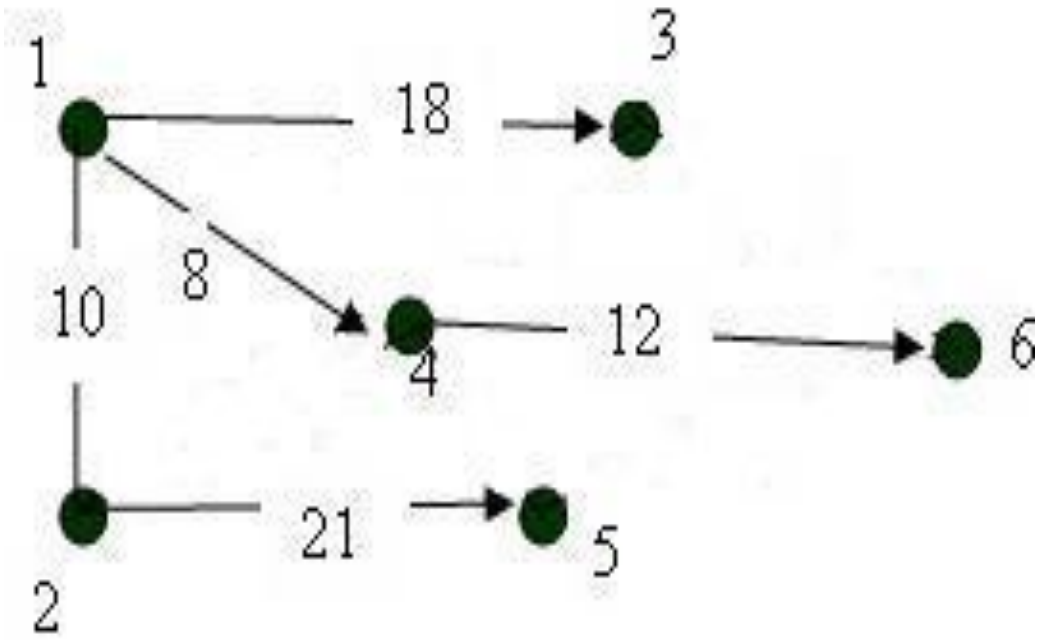
$$d(6)=\min\{d(6)\ ;\ d(3)+a(3,6)\}=\min\{20;\ 18+\infty\}=20$$

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 6 d(6)=20. Включаем вершину №6 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (4,6)

$$d(5)=\min\{d(5)\ ;\ d(6)+a(6,5)\}=\min\{31;\ 20+23\}=31$$

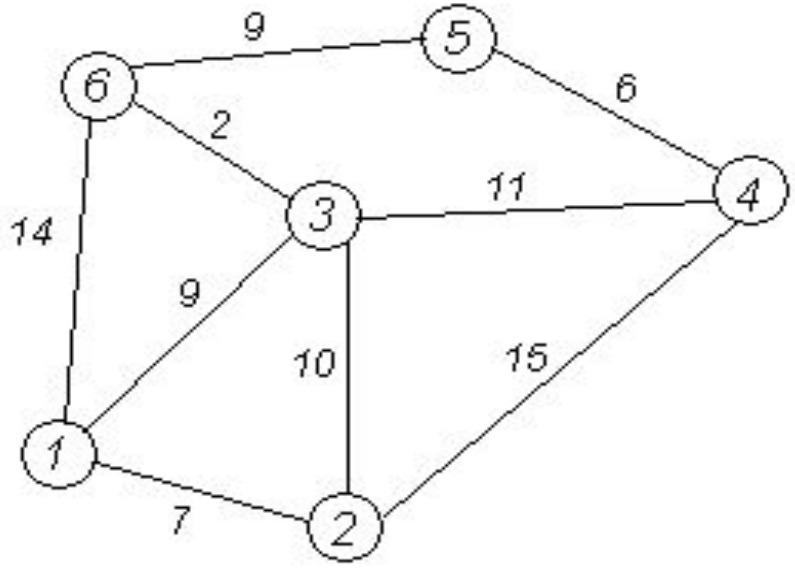
Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 5 d(5)=31. Включаем вершину №5 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (2,5)

ОРИЕНТИРОВАННОЕ ДЕРЕВО С КОРНЕМ В ВЕРШИНЕ №1

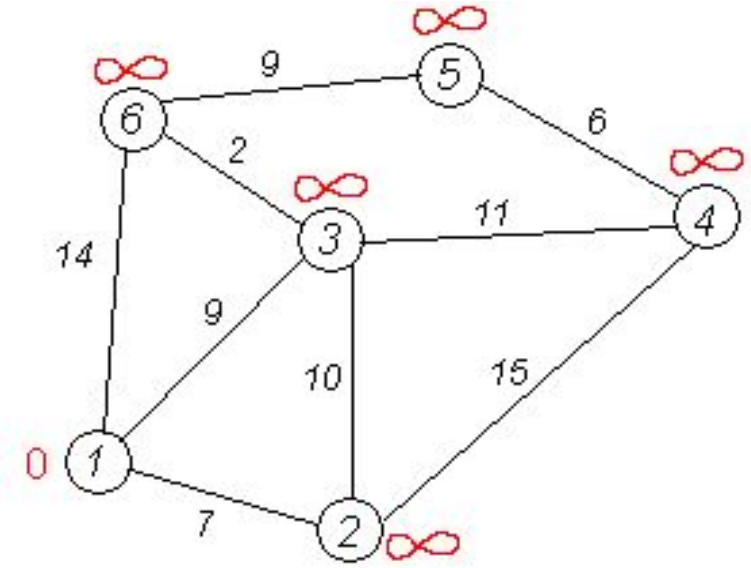


ПРИМЕР 2

Рассмотрим выполнение алгоритма на примере графа, показанного на рисунке. Пусть требуется найти расстояния от 1-й вершины до

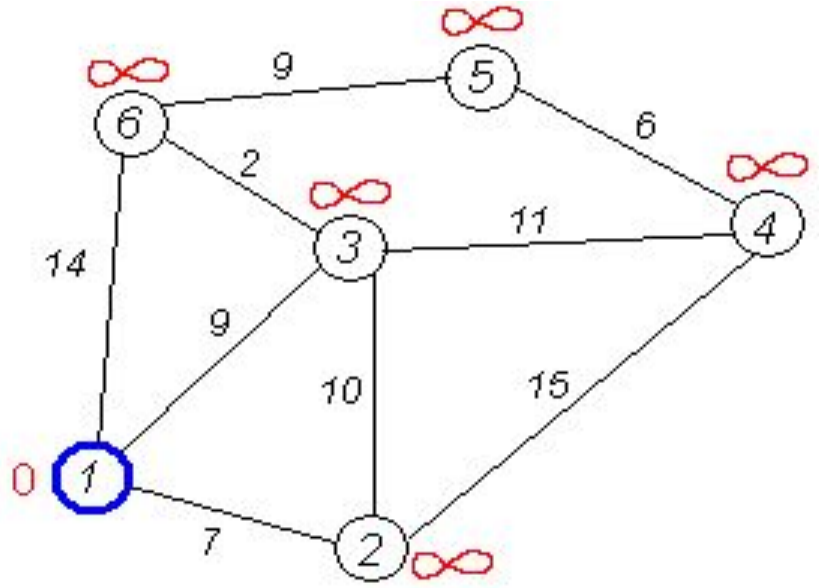


Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (ребра графа). В кружках обозначены номера вершин, над ребрами обозначена их «цена» — длина пути. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.

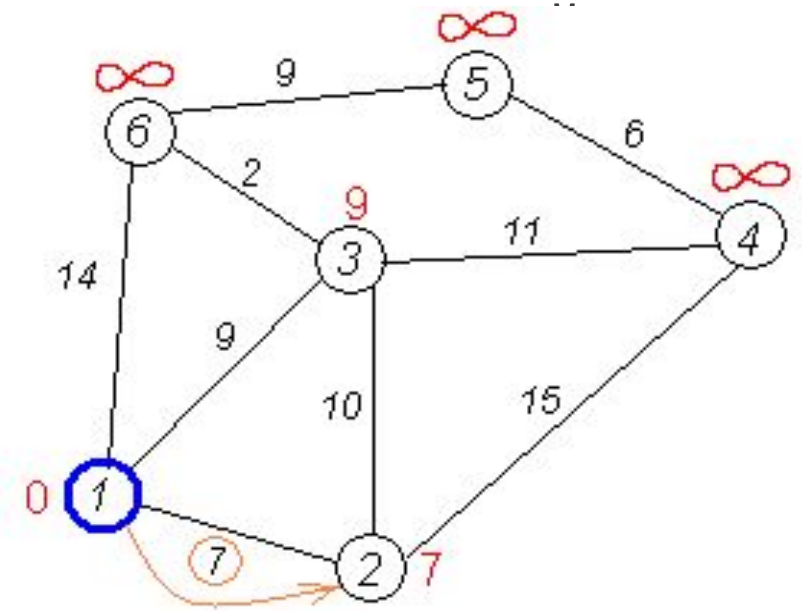


ПЕРВЫЙ ШАГ

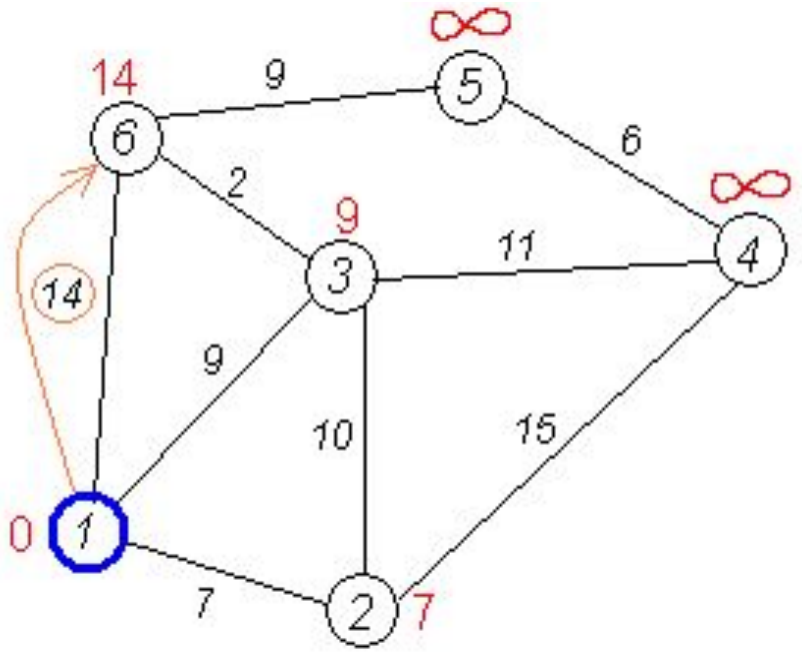
Рассмотрим шаг алгоритма Дейкстры для нашего примера. Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3 и 6.



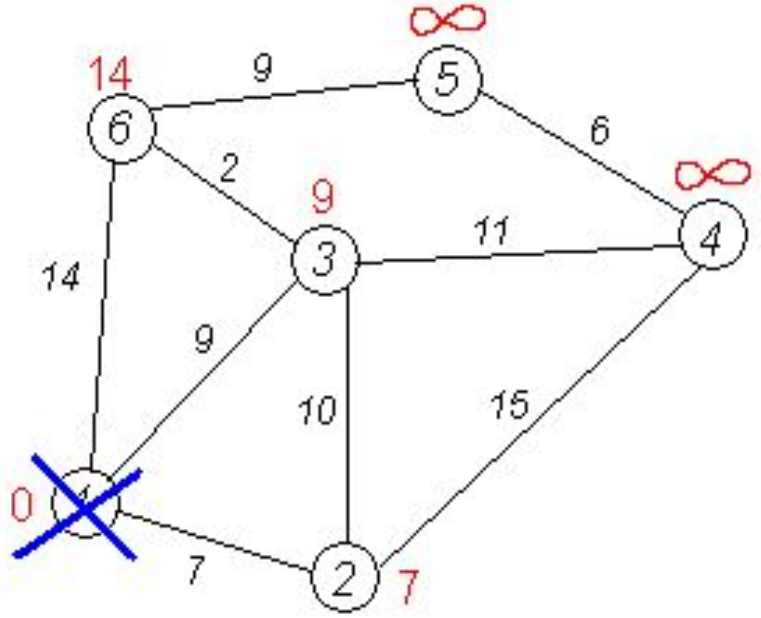
Первый по очереди сосед вершины 1 — вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути в неё через вершину 1 равна сумме кратчайшего расстояния до вершины 1, значению её метки, и длины ребра, идущего из 1-ой в 2-ую, то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки вершины 2, бесконечности, поэт ы равна 7.



Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й и 6-й.

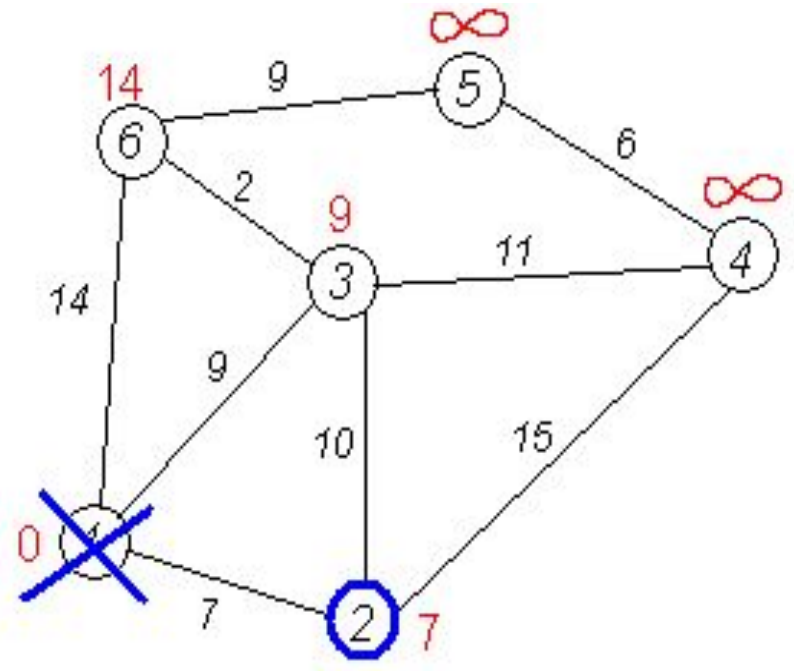


Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит (то, что это действительно так, впервые доказал Э. Дейкстра). Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.



ВТОРОЙ ШАГ

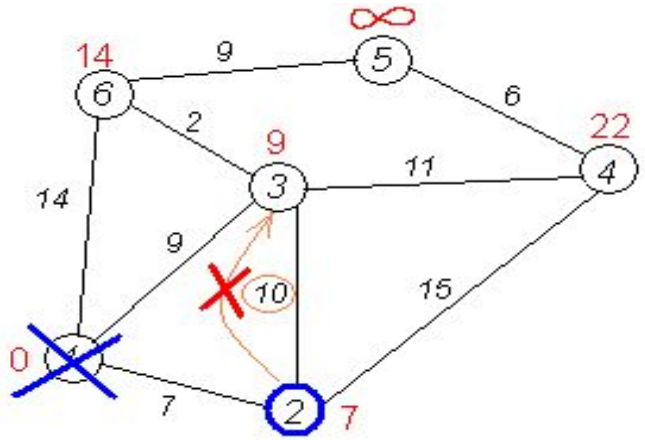
Шаг алгоритма повторяется. Снова находим «ближайшую» из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7.



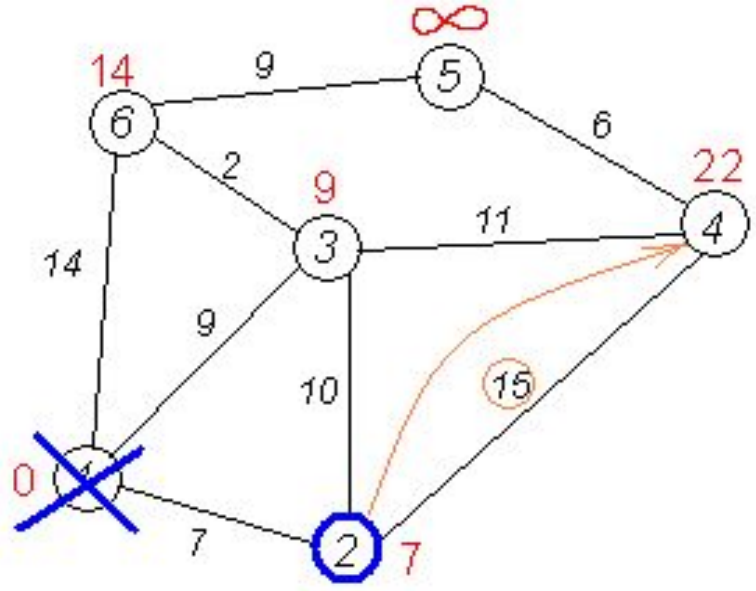
Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются вершины 1, 3 и 4.

Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем.

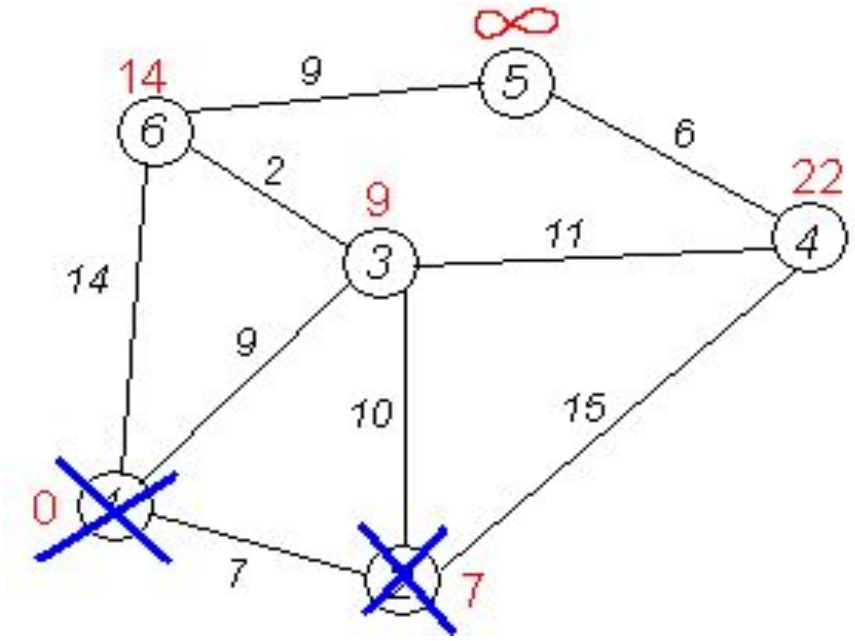
Следующий сосед вершины 2 — вершина 3, так как имеет минимальную метку из вершин, отмеченных как не посещённые. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 (7 + 10 = 17). Но текущая метка третьей вершины равна 9<17, поэтому метка не меняется.



Ещё один сосед вершины 2 — вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна сумме кратчайшего расстояния до 2-ой вершины и расстояния между вершинами 2 и 4, то есть 22 (7+15=22). Поскольку 22<∞, устанавливаем метку вершины, равной 22.

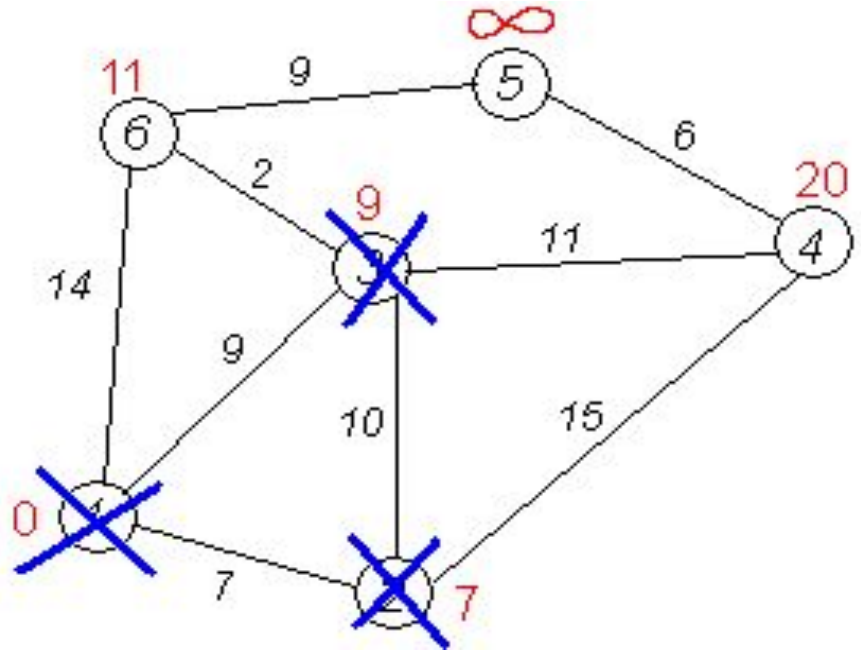


Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем её как посещенную.

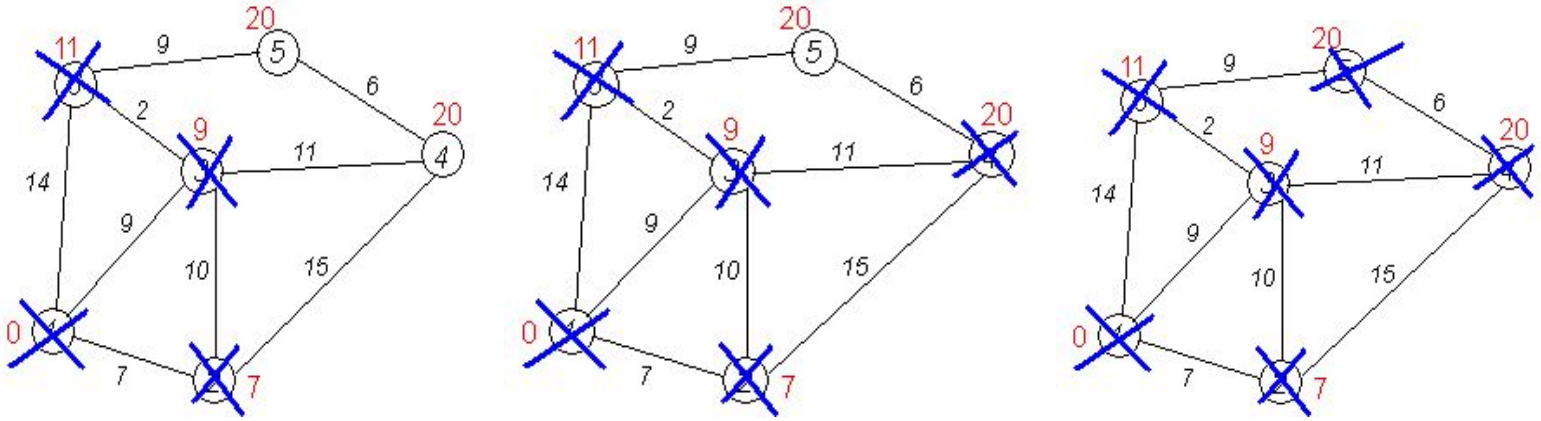


ТРЕТИЙ ШАГ

Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3. После её «обработки» получим такие результаты:



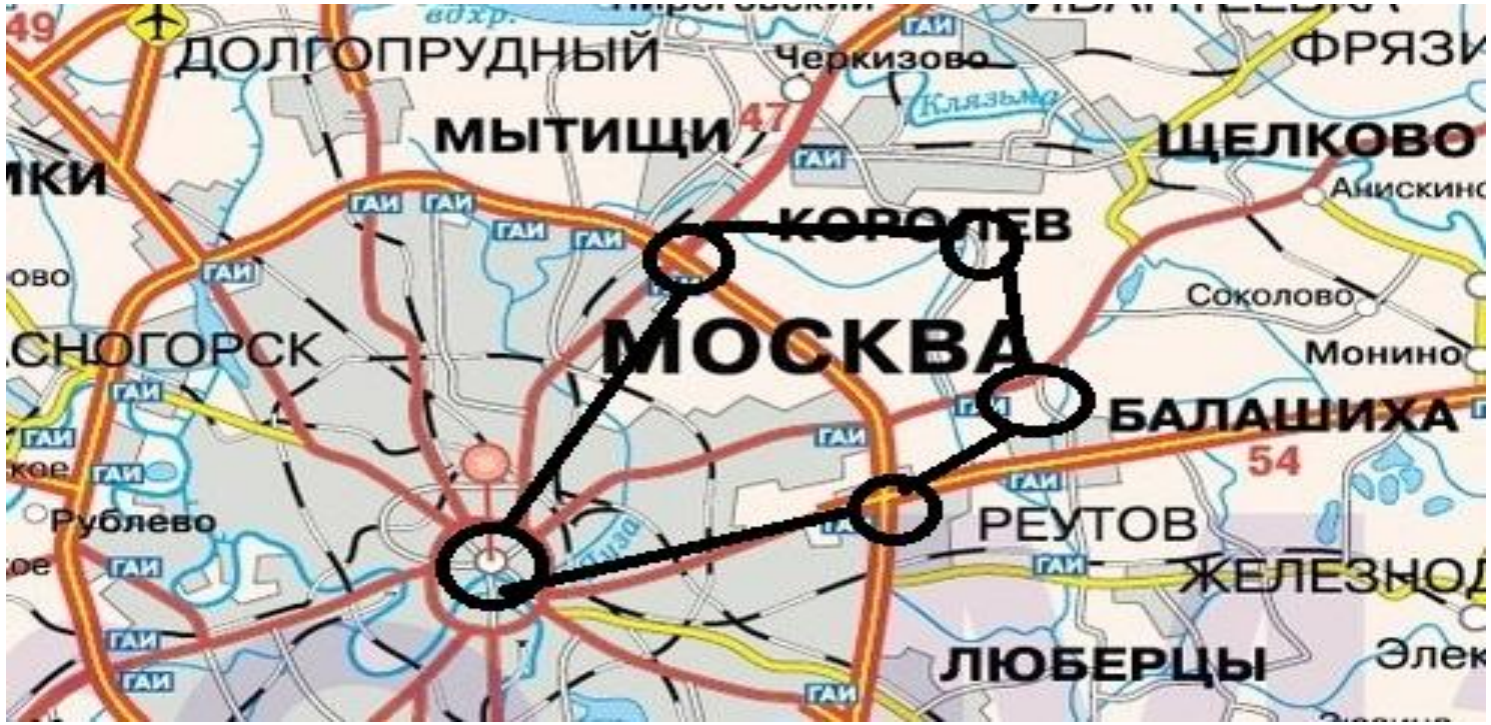
Дальнейшие шаги. Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин. Это будут вершины 6, 4 и 5, соответственно порядку.



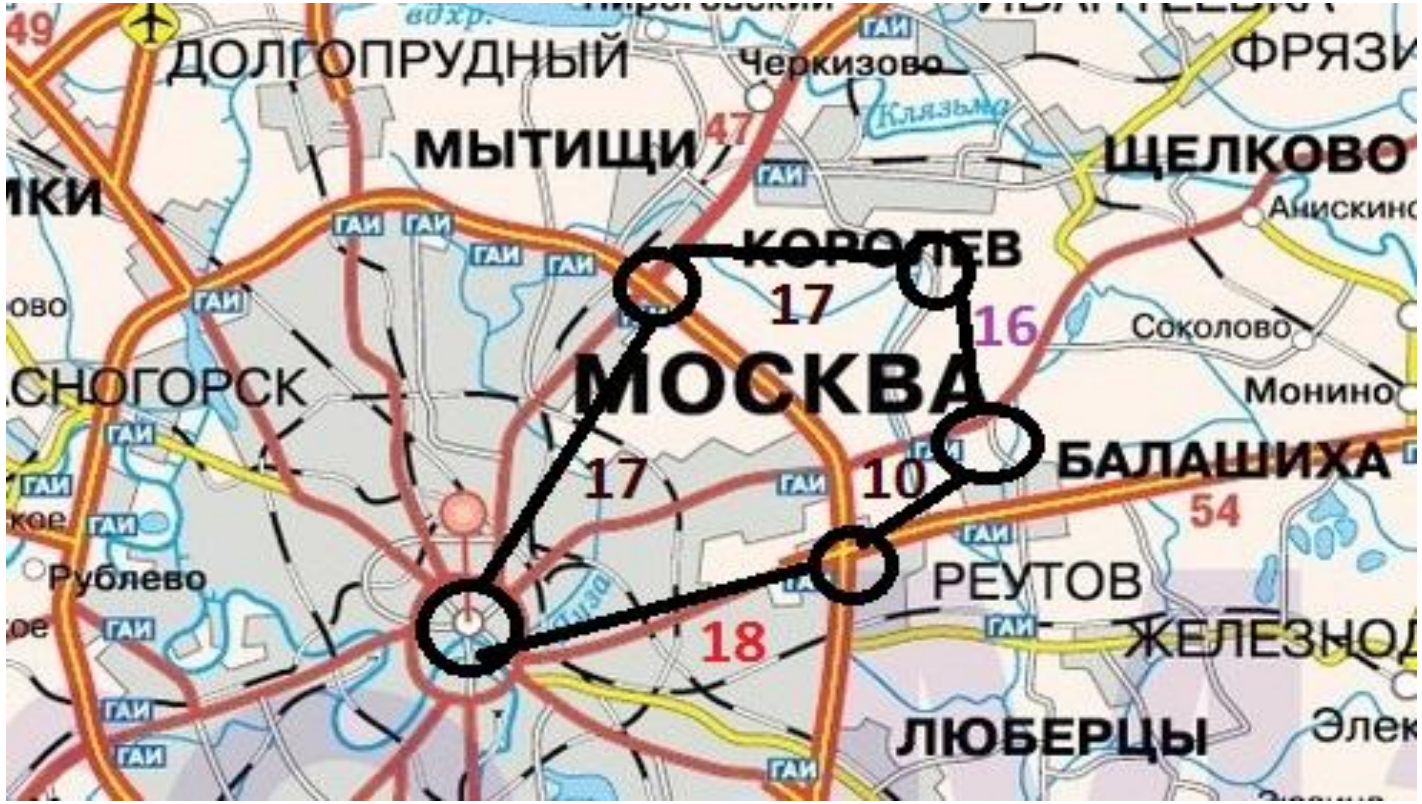
Завершение выполнения алгоритма. Алгоритм заканчивает работу, когда вычеркнуты все вершины. Результат его работы виден на последнем рисунке: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й — 20, до 6-й — 11.

ПРИМЕР 3

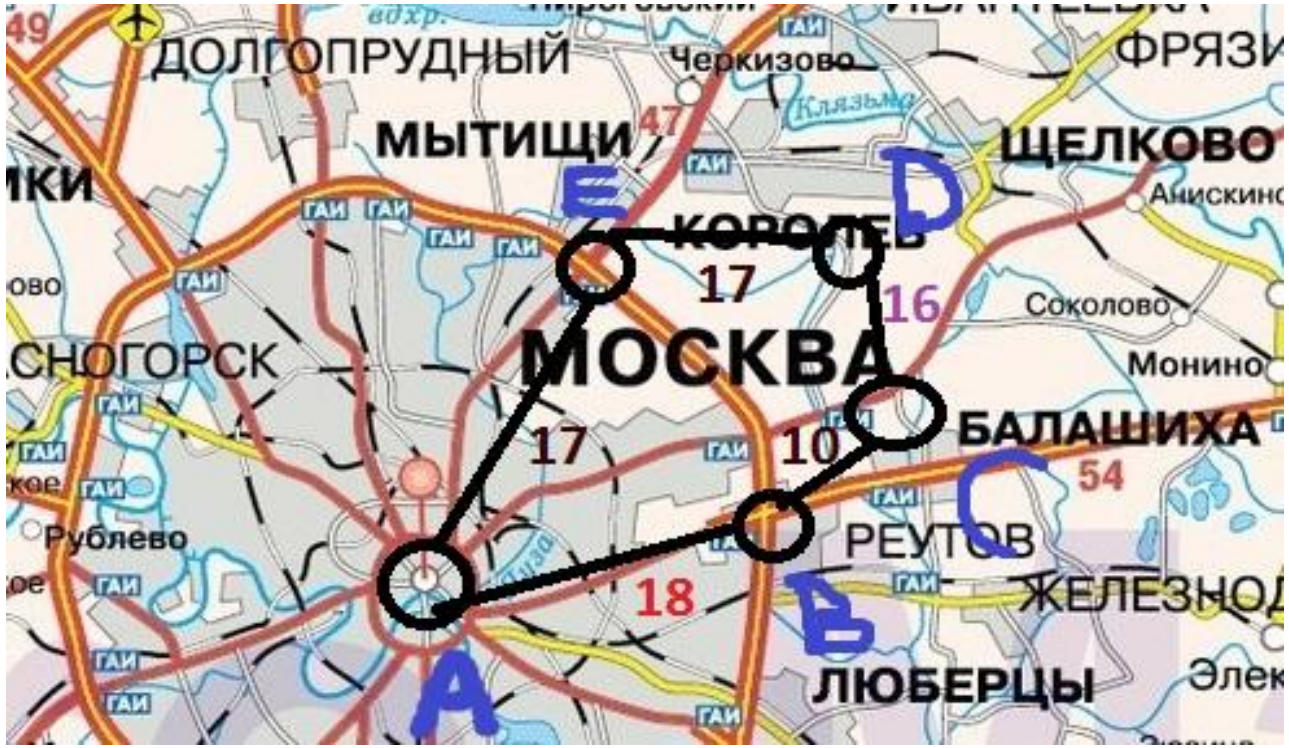
Найдите кратчайший путь от Москвы до Королёва.



ОТМЕТИМ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ВСЕМИ ТОЧКАМИ



РАССЧИТАЕМ НАИКРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ ДО КОРОЛЕВА



Исходя из того, что совокупное расстояние от A до D (включая B и C) равно 44, а расстояние от A до D (включая E) равно 34, делаем вывод, что наикратчайший путь от Москвы до Королева – путь через точки A, E, D.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- V — множество вершин графа
- E — множество ребер графа
- w[ij] — вес (длина) ребра ij
- a — вершина, расстояния от которой ищутся
- U — множество посещенных вершин
- d[u] — по окончании работы алгоритма равно длине кратчайшего пути из a до вершины u
- p[u] — по окончании работы алгоритма содержит кратчайший путь из a в u

ПСЕВДОКОД

Присвоим $d[a] \leftarrow 0$, $p[a] \leftarrow a$

Для всех $x \square V$ отличных от a;

Присвоим $d[u] \leftarrow \infty$

Пока $\exists v \notin U$

Пусть $v \notin U$ — вершина с минимальным d[v]

Для всех $u \notin U$ таких, что $vu \in E$

Если $d[u] > d[v] + w[vu]$, то

Изменим $d[u] \leftarrow d[v] + w[vu]$

Изменим $p[u] \leftarrow p[v], u$

ОПИСАНИЕ

В простейшей реализации для хранения чисел d[i] можно использовать массив чисел, а для хранения принадлежности элемента множеству U — массив булевых переменных.

В начале алгоритма расстояние для начальной вершины полагается равным нулю, а все остальные расстояния заполняются большим положительным числом (бóльшим максимального возможного пути в графе). Массив флагов заполняется нулями. Затем запускается основной цикл.

На каждом шаге цикла мы ищем вершину с минимальным расстоянием и флагом равным нулю. Затем мы устанавливаем в ней флаг в 1 и проверяем все соседние с ней вершины. Если в ней расстояние больше, чем сумма расстояния до текущей вершины и длины ребра, то уменьшаем его. Цикл завершается когда флаги всех вершин становятся равны 1, либо когда у всех вершин с флагом 0 d[i] = ∞. Последний случай возможен тогда и

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!