

**Решение логарифмических
неравенств
с помощью метода
рационализации**

Автор разработки: Козлова Е.Н.

ГБОУ СОШ № 285 им. В.А. Молодцова, г.Москва

Суть метода рационализации для решения логарифмических неравенств (**метода замены множителя**) состоит в том, что в ходе решения осуществляется переход от неравенства, содержащего логарифмические выражения, к равносильному рациональному неравенству (или равносильной системе рациональных неравенств).

Примечание.

В вариантах ЕГЭ в 2012 году в задании С3 необходимо было решить систему неравенств. За верное решение только одного неравенства предложенной системы, согласно разработанным критериям, эксперты ЕГЭ ставили 1 балл.

Немного теории...

Рассмотрим неравенства:

$$\log_a f(x) > 0;$$

число

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0;$$

$$\log_{a(x)} f(x) > 0;$$

функция

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0$$

Для неравенств со знаками « $<$ », « \geq », « \leq » – рассуждения аналогичные, поэтому ограничимся рассмотрением только данных неравенств.

$$1) \log_a f(x) \geq 0, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a f(x) > \log_a 1.$$

Если $a > 1$, то $f(x) > 1$, значит,

$$(a - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0;$$

Если $0 < a < 1$, то $0 < f(x) < 1$, значит,

$$(a - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0.$$

Знак $\log_a t$ **возрастает на \mathbb{R}_+**
«сохраняется».

Имеем: $a - 1 > 0; f(x) - 1 > 0$.

Имеем: $a - 1 < 0; f(x) - 1 < 0$.

Следовательно :

$$\log_a f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) \textcircled{>} 0, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x),$$

Если $a > 1$, то $f(x) > g(x) > 0$, тогда

$$(a - 1)(f(x) - g(x)) \textcircled{>} 0,$$

Если $0 < a < 1$, то $0 < f(x)$

$$(a - 1)(f(x) - g(x)) \textcircled{>} 0.$$

**Знак
«сохраняется».**

Имеем :

$$\begin{aligned} & \log_a f(x) - \log_a g(x) > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(a - 1) \cdot (f(x) - 1)$$

$$\log_a f(x) > 0;$$

$$\log_a f(x) < 0;$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0;$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) < 0;$$

$$(a - 1)(f(x) - g(x))$$

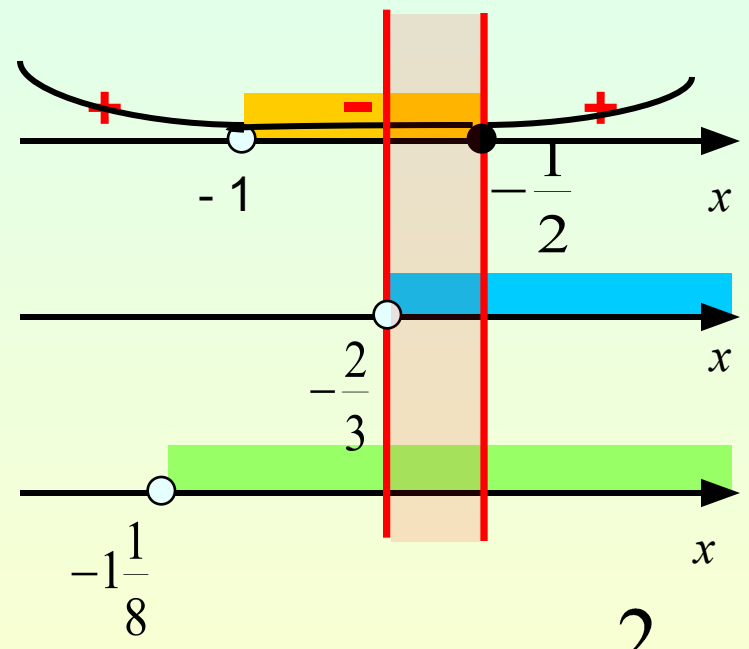
При решении учитываем ограничения!

Решим неравенство:

$$\frac{\log_5(6x + 4)}{\log_{0,7}(8x + 9)} \geq 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(5-1) \cdot (6x+4-1)}{(0,7-1) \cdot (8x+9-1)} \geq 0, \\ 8x+9 \neq 1, \\ 6x+4 > 0, \\ 8x+9 > 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6x+3}{8x+8} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3}, \\ x > -\frac{9}{8}; \end{array} \right.$$



Ответ : $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}]$

$$\log_{a(x)} f(x) > 0.$$

Если $a(x) > 1$, то $f(x) > 1$,
тогда $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0$.

Если $0 < a(x) < 1$, то $0 < f(x) < 1$,
тогда $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0$;

Имеем:

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x) - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0,$$

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$$

Если $a(x) > 1$, то $f(x) > g(x) > 0$,
тогда $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0$.

Если $0 < a(x) < 1$, то $0 < f(x) < g(x)$,
тогда $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0$;

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow$$

Имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{array} \right.$$

Решим неравенство: $\log_{2x+3} x^2 < 1$

Ограничения:

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ 2x + 3 \neq 1, \\ x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$\log_{2x+3} x^2 < 1;$$

$$\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0;$$

$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3} (2x + 3) < 0;$$

$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3} (2x+3) < 0;$$

$$(2x+3-1) \cdot (x^2 - 2x - 3) < 0,$$

$$x > -\frac{3}{2};$$

$$x \neq -1;$$

$$x \neq 0;$$

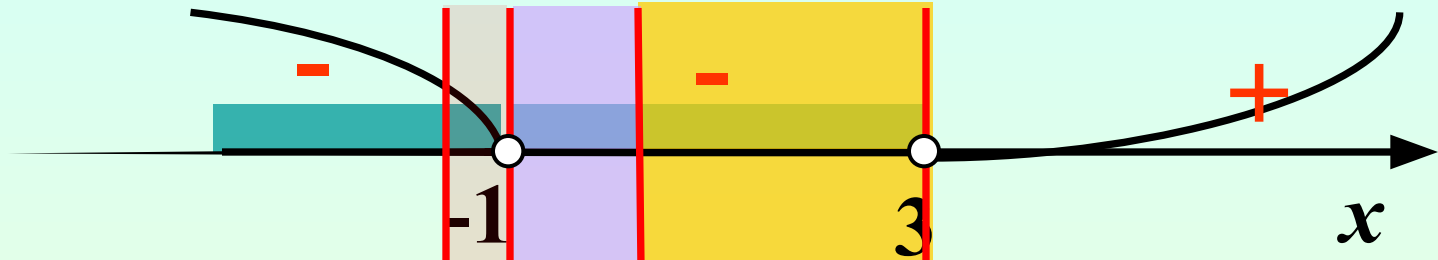
$$(2x+2)(x+1)(x-3) < 0,$$

$$x > -\frac{3}{2};$$

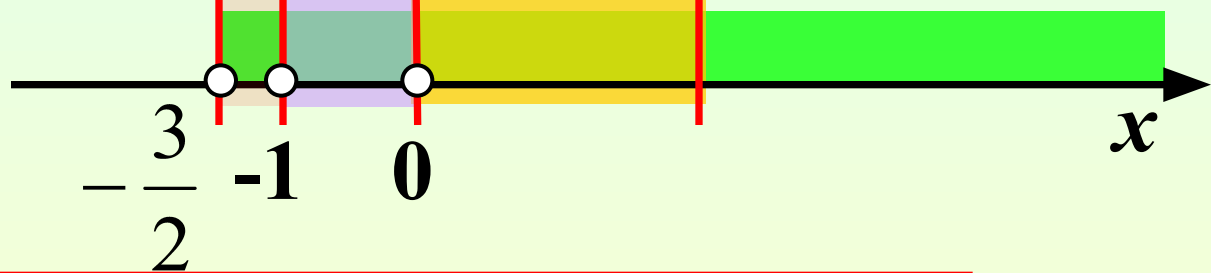
$$x \neq -1;$$

$$x \neq 0.$$

$$\begin{cases} 2(x+1)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} (x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$



ОТВЕТ : $(-\frac{3}{2}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.


Решим неравенство: $\log_{2x-1} \frac{x^4 + 2}{2x + 1} \geq 1;$

Ограничения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^4 + 2}{2x + 1} > 0, \\ 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > -\frac{1}{2}, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1; \end{array} \right.$$

$$\log_{2x-1} \frac{x^4 + 2}{2x - 1} \geq 1;$$

$$\log_{2x-1} \frac{x^4 + 2}{2x + 1} - \log_{2x-1} (2x - 1) \geq 0;$$



$$(2x - 1 - 1) \cdot \left(\frac{x^4 + 2}{2x + 1} - (2x - 1) \right) \geq 0;$$

$$(2x - 2) \cdot \left(\frac{x^4 + 2 - 4x^2 + 1}{2x + 1} \right) \geq 0;$$

$$(x - 1) \cdot \left(\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{2x + 1} \right) \geq 0;$$

Решаем методом интервалов.

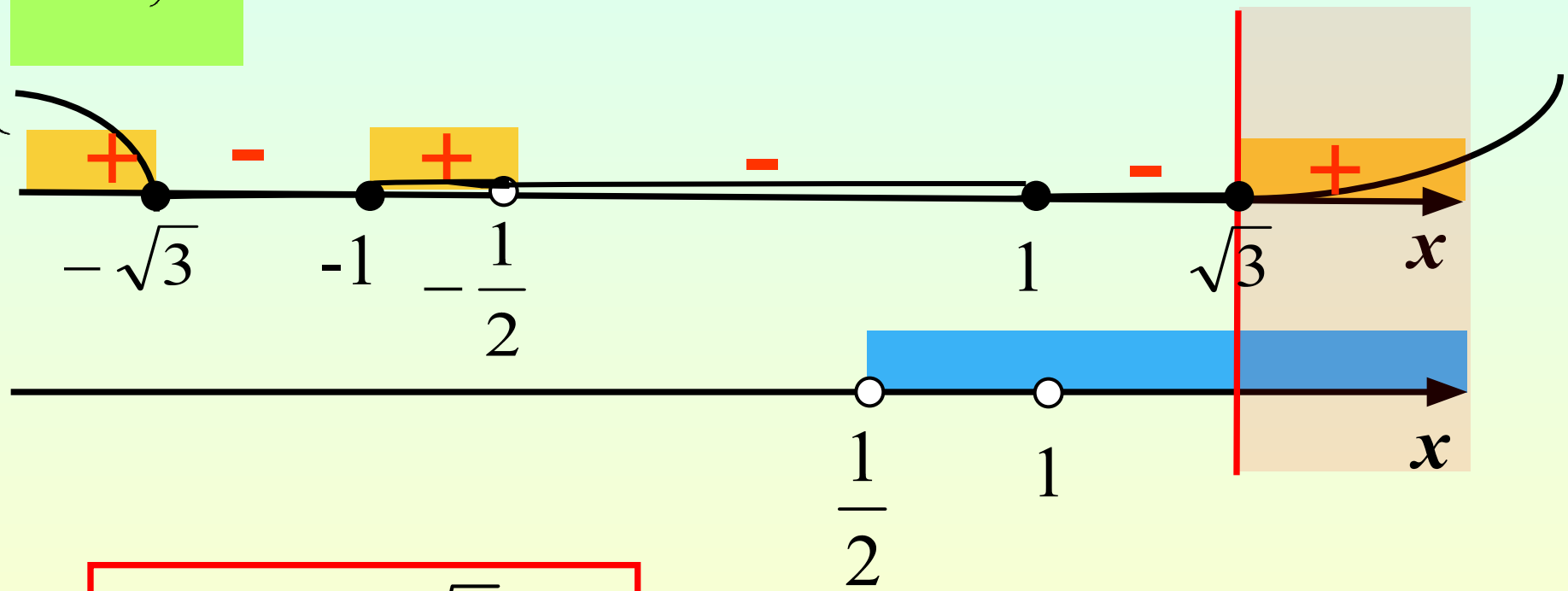
1) $x \neq -\frac{1}{2}$

2) Нули функции :

$$\begin{cases} x = 1, \\ x^2 = 1, \\ x^2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = \pm 1, \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$(x-1) \cdot \left(\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{2x+1} \right) \geq 0;$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1; \end{cases}$$



Ответ : $[\sqrt{3}; \infty)$

Пробный ЕГЭ. С-Петербург.

07.04.2012.

Решить неравенство :

$$\log_{\frac{1}{49}}(26 - 5x) \cdot \log_{6-x} \frac{1}{7} \geq 1$$

Ограничения (ОДЗ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 26 - 5x > 0, \\ 6 - x > 0, \\ 6 - x \neq 1; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{26}{5}, \\ x < 6, \\ x \neq 5; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{26}{5}, \\ x \neq 5. \end{array} \right.$$

$$\log_{\frac{1}{49}}(26 - 5x) \cdot \log_{6-x} \frac{1}{7} \geq 1;$$

$$\log_7(26 - 5x) \cdot \log_{6-x} 7^{-1} \geq 1;$$

$$-\frac{1}{2} \log_7(26 - 5x) \cdot (-\log_{6-x} 7) \geq 1;$$

$$\frac{\log_7(26 - 5x)}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6 - x)} - 1 \geq 0;$$

$$\frac{\log_7(26 - 5x) - 2 \log_7(6 - x)}{2 \log_7(6 - x)} \geq 0;$$

$$\frac{\log_7(26 - 5x) - \log_7(6 - x)^2}{2 \log_7(6 - x)} \geq 0;$$

$$\frac{\log_7(26 - 5x) - \log_7(6 - x)^2}{\log_7(6 - x)} \geq 0,$$

$$\frac{26 - 5x - (6 - x)^2}{6 - x - 1} \geq 0,$$

$$7 - 1 > 0$$

$$\frac{26 - 5x - 36 + 12x - x^2}{5 - x} \geq 0,$$

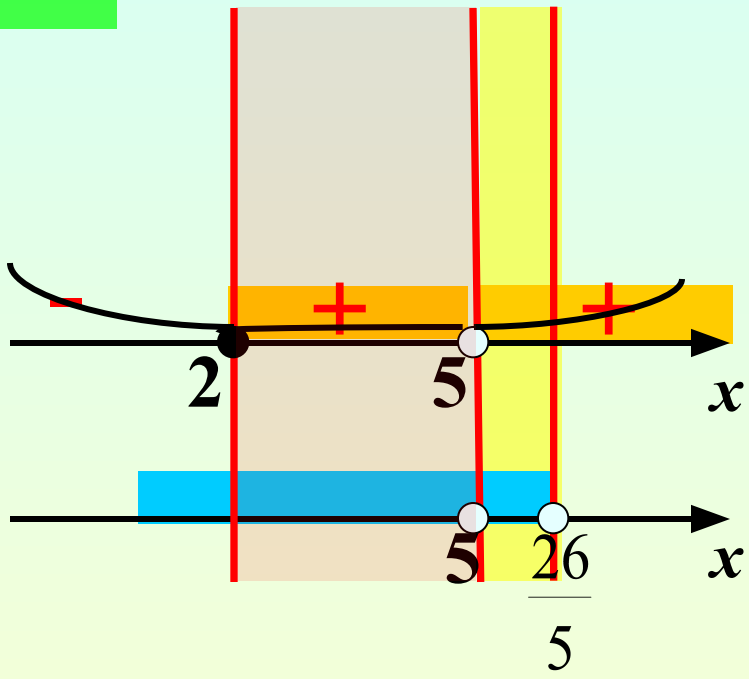
$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} \geq 0,$$

$$\frac{(x - 2)(x - 5)}{x - 5} \geq 0,$$

$$\frac{(x-2)(x-5)}{x-5} \geq 0,$$

ОДЗ

$$\begin{cases} x < \frac{26}{5}, \\ x \neq 5. \end{cases}$$



Ответ : $[2; 5) \cup \left(5; \frac{26}{5} \right)$.

Практикум



Решите неравенства:

$$1) \log_{x^2} (x-1)^2 \leq 1;$$

$$2) \log_{0,25x^2} \left(\frac{6-x}{4} \right) \leq 1;$$

$$3) \log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \geq 0;$$

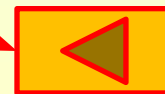
$$4) \log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x} \right)^4 + \log_{x+5} \frac{x}{x-3} \leq 3;$$

$$5) \log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7};$$

$$6) \log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0;$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ

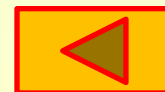
- ✓ «Клик» по нужному заданию даёт переход к фрагменту решения и ответу
- ✓ Назад - в «Практимум»



$$\log_{x^2} (x-1)^2 \leq 1;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - 1) \cdot ((x-1)^2 - x^2) \leq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -1. \end{array} \right.$$

$$\text{ОТВЕТ : } (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2} \right] \cup (1; \infty).$$



$$\log_{0,25x^2} \left(\frac{6-x}{4} \right) \leq 1$$

ЕГЭ - 2012. Запад.

07.06.2012

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,25x^2 - 1) \cdot \left(\frac{6-x-x^2}{4} \right) \leq 0, \end{array} \right.$$

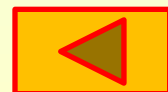
$$x < 6,$$

$$x \neq 0,$$

$$x \neq 2,$$

$$x \neq -2.$$

Ответ : $(-\infty; -3] \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6)$.



$$\log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \geq 0$$

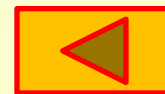
ЕГЭ - 2012. Восток.

07.06.2012

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 \log_{3x} 3 \cdot (2 + \log_3 3x) + 9 \geq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{3x} 3 - 1 \leq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (3x - 1)(3 - 3x) \leq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{array} \right.$$

ОТВЕТ : $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [1; \infty)$.



$$\log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x} \right)^4 + \log_{x+5} \frac{x}{x-3} \leq 3;$$

$$3 \log_{x+5} \frac{x-3}{x} \leq 3,$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ x > 3; \\ x > -5, \\ x \neq -4; \end{cases}$$

Т.к. $\frac{x}{x-3} > 0$, то

$$\log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x} \right)^4 = 4 \log_{x+5} \left| \frac{3-x}{x} \right| = 4 \log_{x+5} \frac{x-3}{x}.$$

$$(x+5-1) \cdot \left(\frac{x-3}{x} - x-5 \right) \leq 0,$$

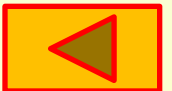
$$\begin{cases} x < 0, \\ x > 3; \\ x > -5, \\ x \neq -4; \end{cases}$$

ОТВЕТ : $(-5; -4) \cup [-3; -1] \cup (3; \infty)$.

ЕГЭ-2012.

**Резервный день
«ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ».**

21.06.2012



ЕГЭ -2012.
«Вторая
волна».
10.07.2012.

$$\log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7};$$

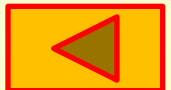
$$2 \log_{x+8} \frac{x-7}{x+1} \leq 1 + \log_{x+8} \frac{x-7}{x+1};$$

$$\log_{x+8} \frac{x-7}{x+1} - 1 \leq 0;$$

$$\left\{ (x+7) \cdot \left(\frac{x^2 + 8x + 15}{x+1} \right) \geq 0, \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -1, \\ x > 7; \\ x > -8, \\ x \neq -7; \end{array} \right.$$

ОТВЕТ : $(-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; \infty)$.



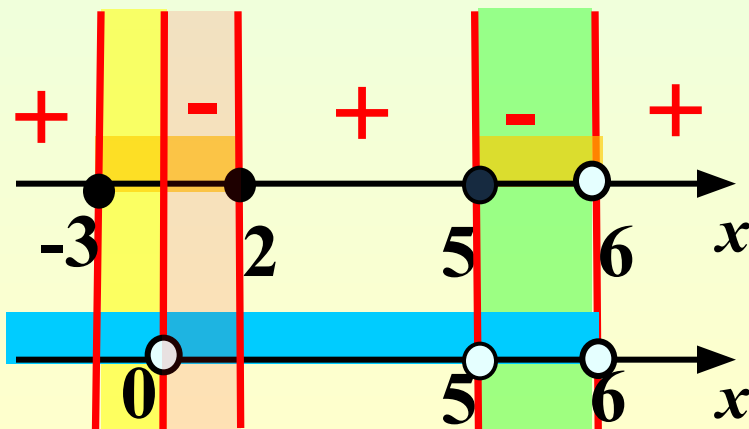
**ЕГЭ – резервный день
«второй волны».**

16.07.2012.

$$\log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0;$$

$$\log_{6-x} \left(\frac{x^2}{x-6} \right)^2 \leq 0; \quad 2 \log_{6-x} \left| \frac{x^2}{x-6} \right| \leq 0;$$

$$\begin{cases} \log_{6-x} \frac{x^2}{6-x} \leq 0, \\ 6-x > 0, \\ 6-x \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (6-x-1) \left(\frac{x^2}{6-x} - 1 \right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (5-x) \left(\frac{x^2+x-6}{6-x} \right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$



Ответ : $[-3; 0) \cup (0; 2] \cup (5; 6)$.

Для тех, кто боится «модулей» -
2 способ:

$$\log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0;$$

$$\log_{6-x} \left(\frac{x^2}{x-6} \right)^2 \leq 0;$$

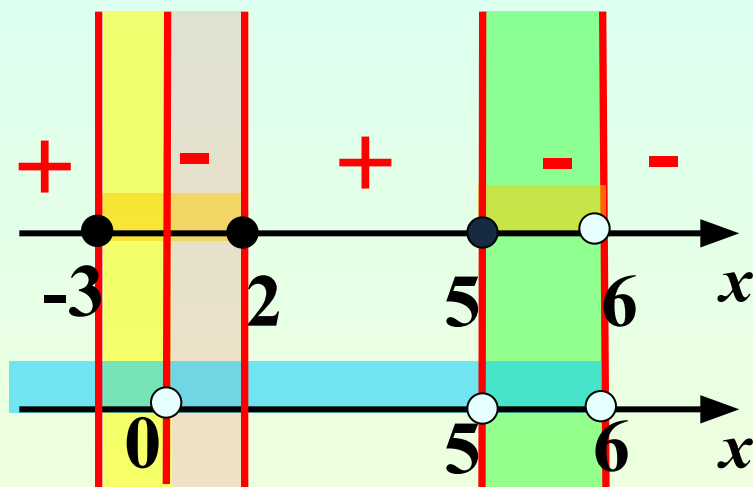
$$\begin{cases} (5-x) \left(\frac{x^2}{x-6} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{x-6} + 1 \right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$D < 0, \quad x^2 - x + 6 > 0.$$

$$\begin{cases} (5-x) \left(\frac{x^2 - x + 6}{x-6} \right) \left(\frac{x^2 + x - 6}{x-6} \right) \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(5-x)(x^2 + x - 6)}{(x-6)^2} \leq 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

ЕГЭ-2012.
Резервный день
«второй волны».
16.07.2012.



Ответ: $[-3; 0) \cup (0; 2] \cup (5; 6)$.

На память...

**Выражение (множитель)
в неравенстве**

(правая часть неравенства равна нулю!)

На что меняем

$$\log_a f - \log_a g$$

(помните, что $f > 0, g > 0, a > 0, a \neq 1$)

$$(a - 1) \cdot (f - g)$$

$$\log_a f - 1$$

(помните, что $f > 0, a > 0, a \neq 1$)

$$(a - 1) \cdot (f - a)$$

$$\log_a f$$

(помните, что $f > 0, a > 0, a \neq 1$)

$$(a - 1) \cdot (f - 1)$$

Примечание: a – функция от x или число, f и g – функции от x .

В презентации использовались ресурсы:

1. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Интернет – ресурс:

<http://alexlarin.net/ege/2011/C3-2011.pdf>

2. ЕГЭ-2013: Математика: самое полное издание типовых вариантов / авт.-сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий; под ред. А. Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2013. -123 с. – (Федеральный институт педагогических измерений).

3. Экзаменационные задания: <http://alexlarin.net/>