Именно математика дает надежнейшие правила:
кто им следует – тому не опасен обман чувств.

Л. Эйлер

Применение производной к исследованию функций

(готовимся к экзамену)

Вспомним.

ПРОИЗВОДНАЯ, скорость изменения величины математической функции относительно изменений независимой переменной.

Производной функции f(x) в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Смысл производной.

геометрический

угловой коэффициент касательной к графику функции

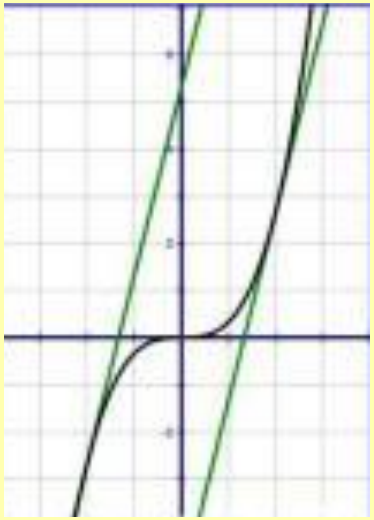
$f'(x_0) = k = tg\alpha$

физический (механический)

мгновенная скорость, т. е. скорость в данный момент времени

$V = S'(t_0)$

«ЕГЭ 3000 задач» под редакцией А. Л. Семенова, И. В. Ященко.



№1678

Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x - 9$. Найти абсциссу точки касания.

Решение:

Так как к графику функции проведена касательная, то ее угловой коэффициент $k = f'(x_0)$.

Так как касательная к графику функции параллельна прямой $y = -4x - 8$, то ее угловой коэффициент $k = -4$.

1. Найдем производную данной функции $y'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

2. Так как касательная к графику данной функции параллельна прямой $y = -4x - 8$, то

$$k = -4$$

3. Составим и решим уравнение

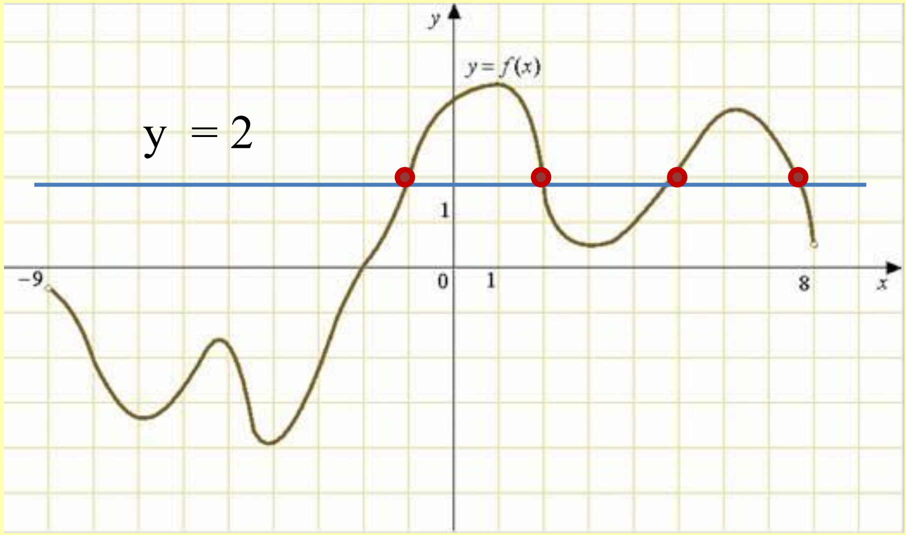
$$3x^2 - 6x - 1 = -4$$

$$x = 1$$

Ответ: 1

№1679

На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (- 9; 8). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции f(x) параллельна прямой y = 2x + 5 или совпадает с ней.



Решение:

Так как касательная к графику функции параллельна прямой $y = 2x + 5$, то ее угловой коэффициент $k = 2$.

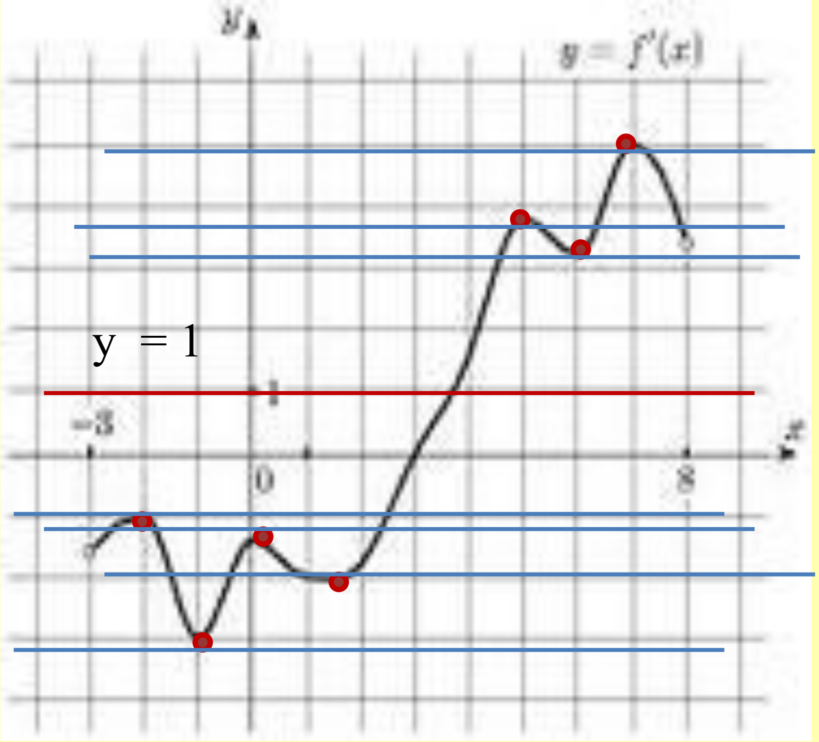
Так как к графику функции проведена касательная, то ее угловой коэффициент $k = f'(x_0)$, то есть $f'(x_0) = 2$

Так как дан график производной функции f(x), то надо узнать, сколько точек пересечения имеет данный график с прямой $y = 2$.

Ответ: 4

№1683

На рисунке изображен график производной функции y = f(x), определенной на интервале (- 3; 8). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 1.



Решение:

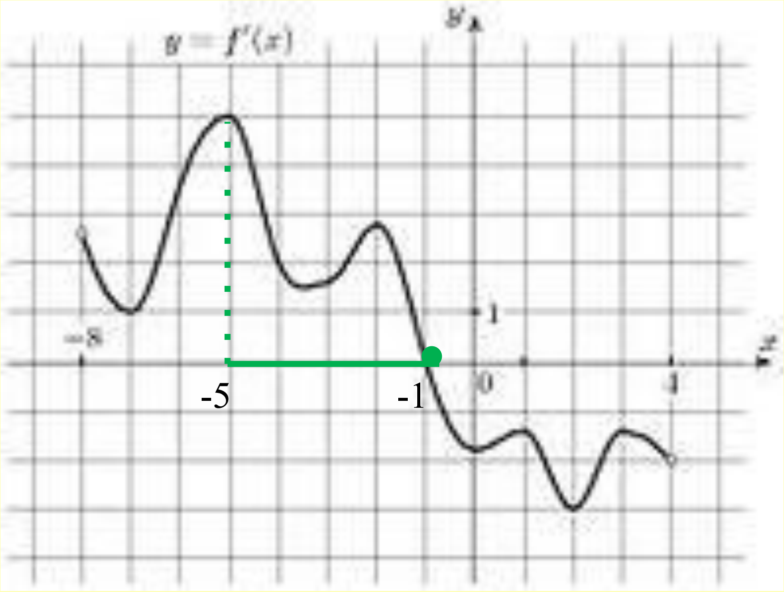
Прямая y = 1 параллельна оси абсцисс.

Значит, надо найти количество точек графика, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

Ответ: 7

№1723

На рисунке изображен график производной функции y = f(x), определенной на интервале (- 8; 4). В какой точке отрезка [- 5; - 1] функция Принимает наибольшее значение?



Решение:

Рассмотрим функцию на отрезке [- 5; - 1] .

На данном отрезке график располагается в верхней полуплоскости, значит $f'(x) > 0$.

Следовательно, функция на данном промежутке возрастает .

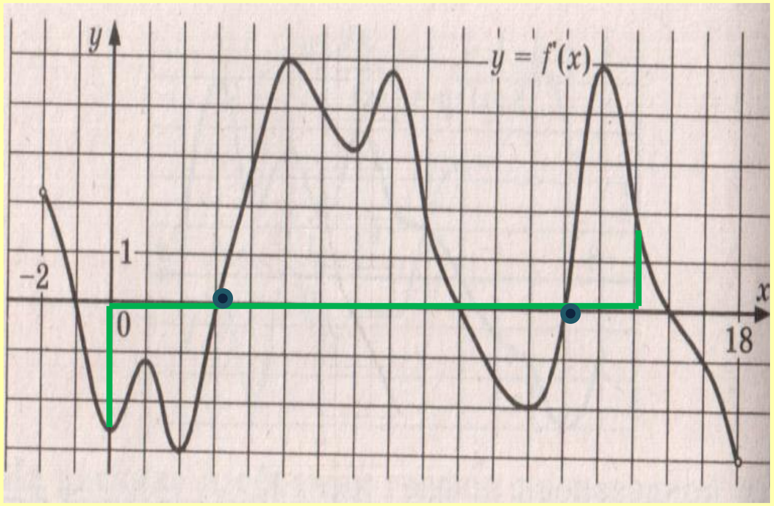
Значит, наименьшее значение функция принимает в точке $x = -5$,

а наибольшее значение функция принимает в точке $x = -1$

Ответ: - 1

№1741

На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (- 2; 18). Найдите количество точек минимума функции f(x) на отрезке [0; 15] .



Решение:

Рассмотрим функцию на отрезке [0; 15] .

Так как дан график производной функции f(x), то точки минимума это точки, в которых производная переходит с

«–» на «+».

Значит эти точки лежат на

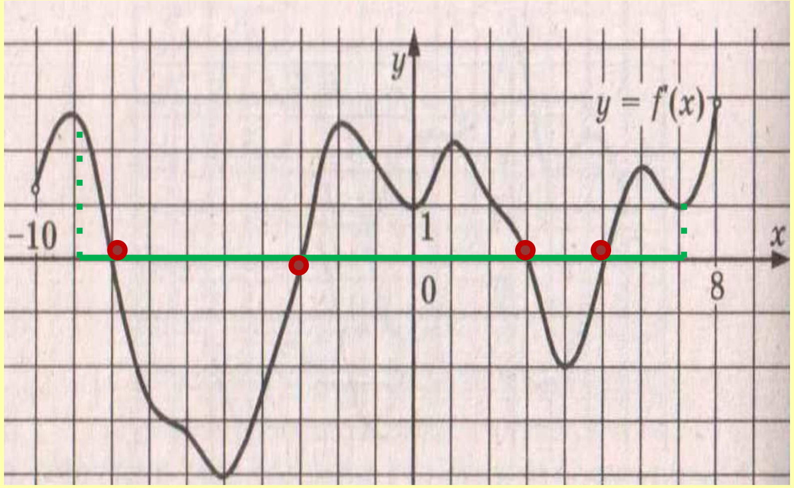
оси абсцисс,

а график в этих точках переходит

из нижней полуплоскости в верхнюю.

Ответ: 2

№1741



На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (- 10; 8). Найдите количество точек экстремума функции f(x) на отрезке [- 9; 7] .

Решение:

Точки экстремума это точки максимума и минимума.

В точках экстремума производная меняет знак .

Так как дан график производной функции f(x), то точки экстремума лежат на оси абсцисс.

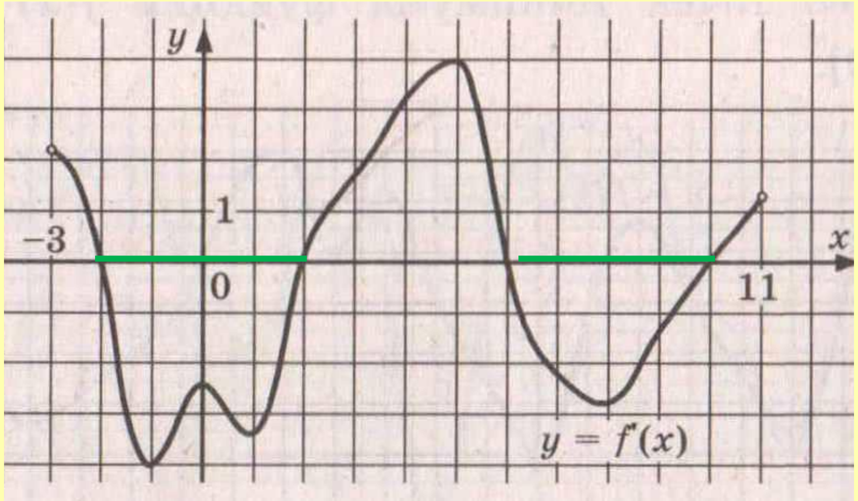
Рассмотрим функцию на отрезке [-9; 7] .

На этом отрезке 4 точки лежат на оси абсцисс.

Ответ: 4

№1772

На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (- 3; 11). Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите длину наибольшего из них.



Решение:

Функция убывает, если производная $f'(x) < 0$.

Рассмотрим промежутки, на которых производная отрицательна.

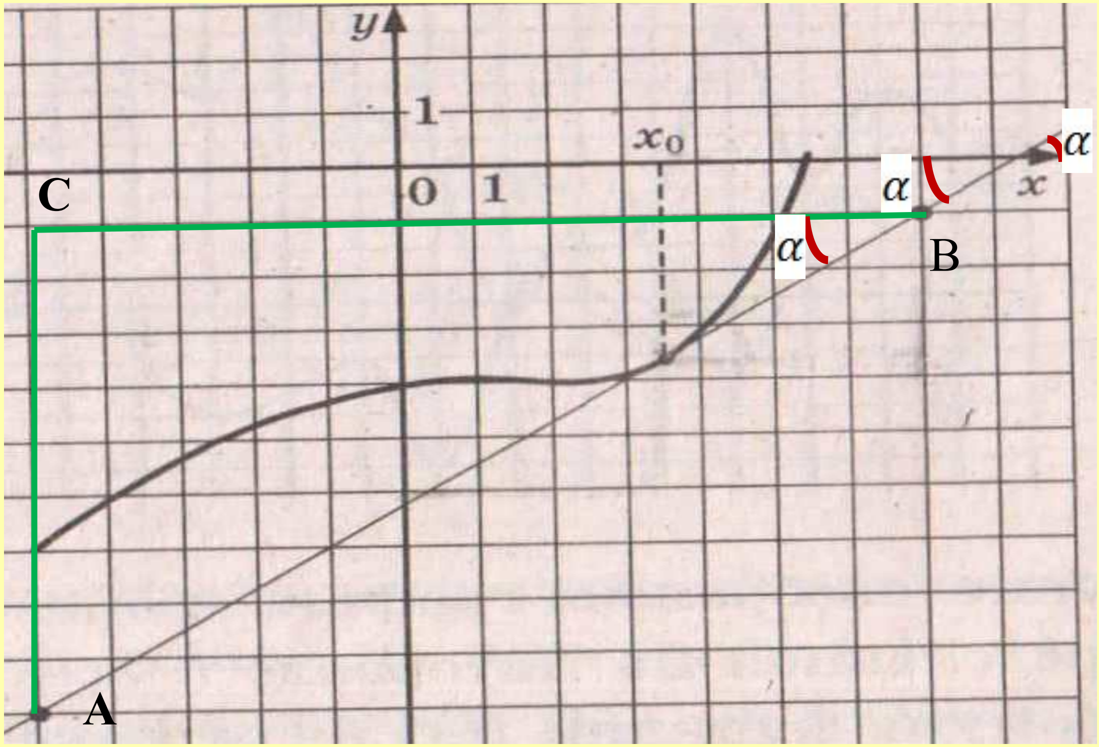
Длина первого промежутка 4 ед. отр..

Длина второго промежутка 4 ед. отр..

Ответ: 4

№1864

На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции в точке x_0.



Решение:

Значение производной в заданной точке это угловой коэффициент касательной к графику функции, т. е. тангенс угла наклона между касательной к графику и положительным направлением оси абсцисс.

$$f'(x_0) = k = tg\alpha$$

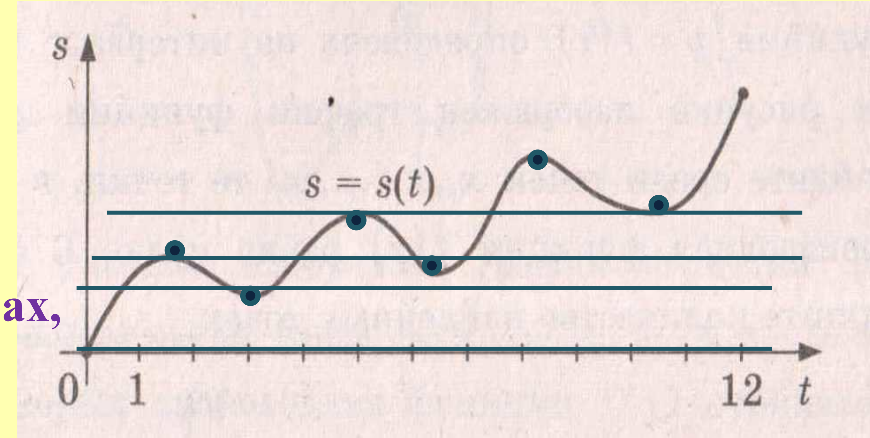
Чтобы найти тангенс угла наклона касательной, надо рассмотреть прямоугольный треугольник, в который входит этот угол.

$$tg\,\alpha = \frac{AC}{BC}$$

Ответ: 0,75

№1939

Материальная точка М начинает движение из точки А и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки А до точки М со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки М обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Решение:

Скорость материальной точки в данный момент времени это

значение производной данной функции в данной точке.

Производная данной функции равна нулю, если касательная к графику данной функции в данной точке параллельна оси абсцисс.

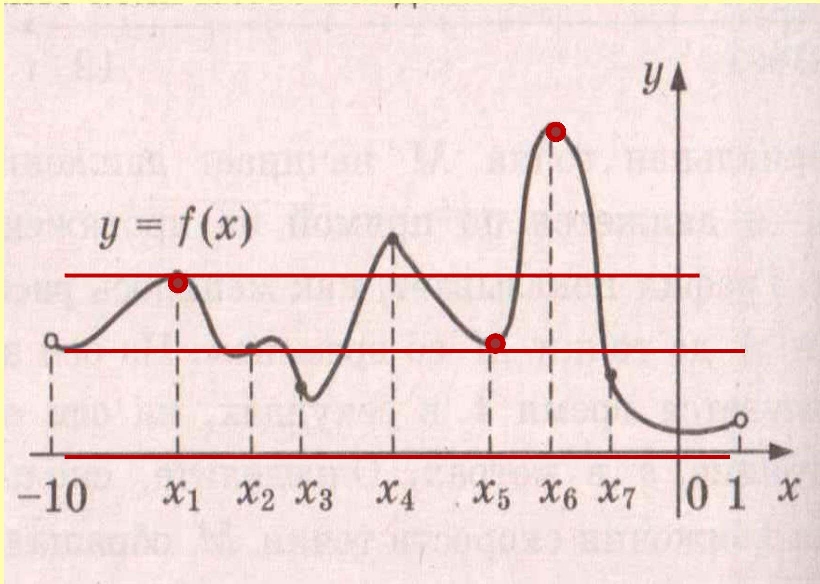
Значит, надо найти количество точек, в которых

касательная к графику данной функции параллельна оси абсцисс.

Ответ: 6

№1942

Функция y = f(x), определена на интервале (- 10; 1). На рисунке изображен график функции y = f(x). Найдите среди точек x_1, x_2, … x_7 те точки, в которых производная функции равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.

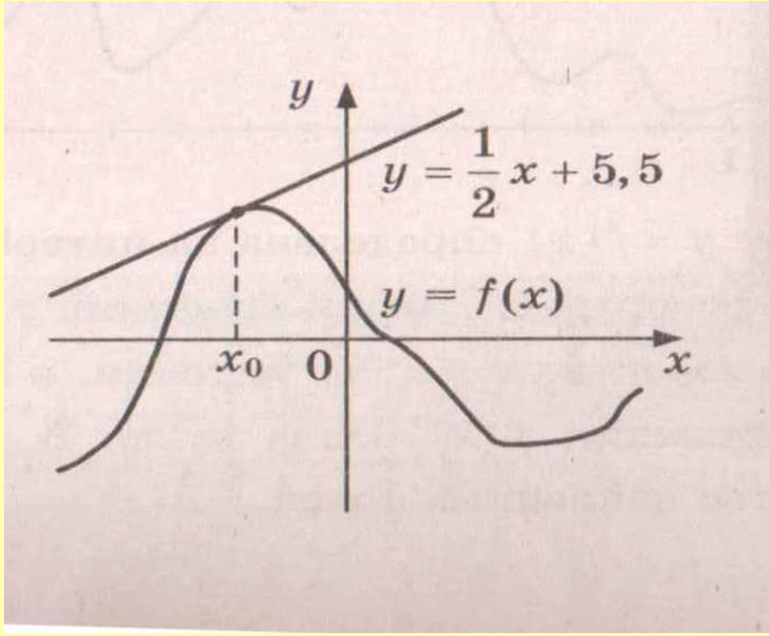


Решение:

Так как дан график функции, то производная данной функции равна нулю в тех точках, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Ответ: 3

№1943



На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции y = 4f(x) + 7 в точке x_0.

Решение:

Значение производной исходной функции в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной

Значит, $f'(x_0) = \frac{1}{2}$

Искомая производная больше производной исходной функции в 4 раза.

Значит, искомая производная равна 2

Ответ: 2