



# Волны и оптика

## Лекция 04

Энергия упругих волн.

Акустика

Электромагнитные волны

9 марта 2022 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,  
ОЛЬЧАК Андрей Станиславович



Каждый элемент среды, в которой распространяется упругая волна, обладает кинетической и потенциальной энергиями, плотности которых [Дж/м<sup>3</sup>] пропорциональны квадратам производных от смещения:

$$w = w_k + w_p = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

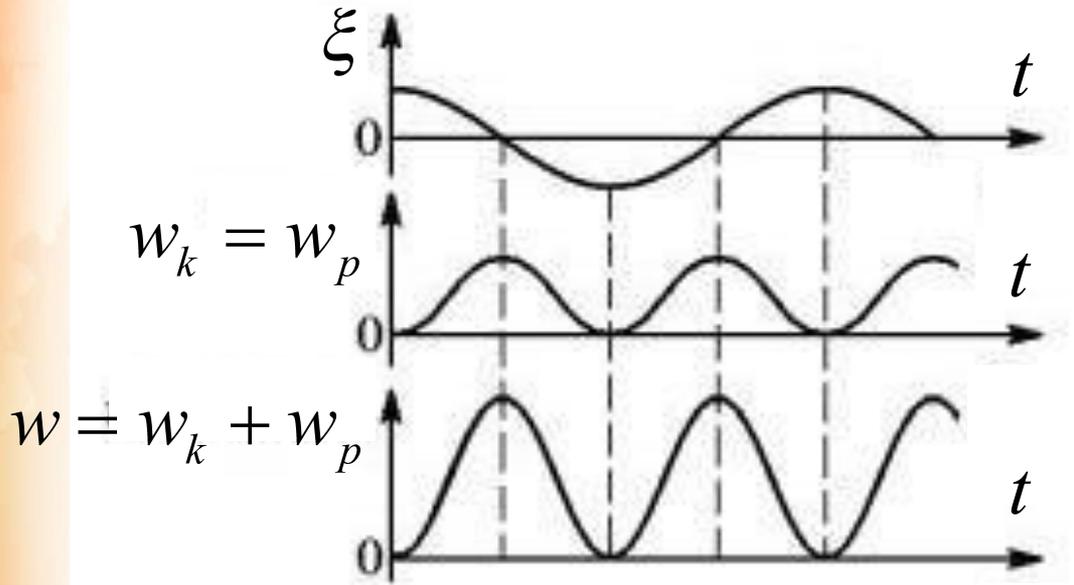
В бегущей волне:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp v \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow w_k = w_p$$

В бегущей гармонической волне плотности кинетической и потенциальной энергий равны и меняются софазно:

$$w_k = w_{kp} = \frac{\rho \dot{\xi}^2}{2} = \frac{\rho a^2 \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

В бегущей гармонической волне плотности кинетической и потенциальной энергий равны и меняются софазно:



$$w_k = w_p = \frac{\rho a^2 \omega^2}{4} (1 - \cos \{2(\omega t - kx + \alpha)\})$$



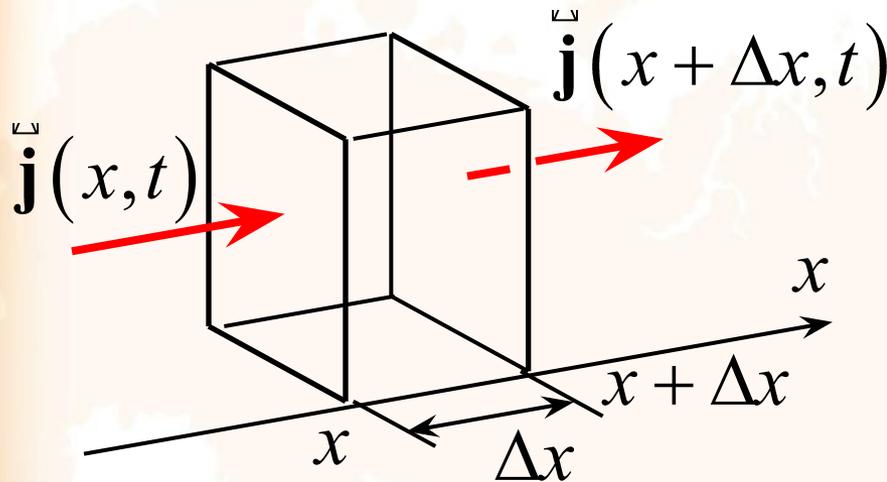
## Плотность потока энергии

Вектор, направленный по скорости волны  $v$  и по величине равный энергии, проносимой волной в единицу времени через площадку единичной площади, ориентированной перпендикулярно направлению переноса энергии волны.

$$\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$



$$\Delta V, dt \quad dW = (j_x(x, t) - j_x(x + \Delta x, t)) S dt \approx -\frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x S dt$$



$$\Delta V = \Delta x S \quad \frac{dW}{\Delta V dt} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\rho}{2} \left[ 2 \dot{\xi} \ddot{\xi}_{tt} + 2 v^2 \xi'_x \xi'_{xt} \right]$$



$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\rho}{2} \left[ 2 \dot{\xi}_{tt} \xi_{tt} + 2 v^2 \xi_x' \xi_{xt}' \right]$$

$$\dot{\xi}_{tt} = v^2 \xi_{xx}'' \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \rho v^2 \left[ \xi_t \xi_{xx}'' + \xi_x' \xi_{xt}' \right] = \rho v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \xi_t \xi_x' \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \Rightarrow j_x = -\rho v^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$



$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \Rightarrow \boxed{j_x = -\rho v^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}}$$

В газе можно выразить производные от смещений через отклонения давления и плотности от равновесных :

$$\Delta P = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \Delta \rho = v^2 \Delta \rho = -\rho_0 v^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow j_x = -\rho v^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \Delta P \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

В твердом теле роль добавочного давления  $\Delta P$  играет механическое напряжение  $\sigma$ :

$$j_x = -\sigma \frac{\partial \xi}{\partial t}$$



## Плотность потока энергии в бегущей волне

$$j_x = -\rho v^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow$$

$$j_x = \rho v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = 2v w_p = v w \Rightarrow \boxed{\vec{j} = w \vec{v}} \quad \text{вектор Умова}$$

## Интенсивность волны

$$\boxed{I = \left\langle \left| \vec{j} \right| \right\rangle} \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

Это модуль средней по времени плотности потока энергии.



**Идеальный газ:** 
$$j_x = \Delta P \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\Delta P v \frac{\partial \xi}{\partial x} = \Delta P v \frac{\Delta \rho}{\rho_0} =$$

$$= \frac{\Delta P v}{\rho_0} \frac{\Delta P}{v^2} = \frac{\Delta P^2}{\rho_0 v}$$

$$I = \left| \langle j_x \rangle \right| \Rightarrow$$

$$I = \frac{\langle \Delta P^2 \rangle}{\rho_0 v}$$

В твердом теле величину  $\Delta P$  надо заменить на  $\sigma$

В гармонической волне

$$\langle \Delta P^2 \rangle = \frac{\Delta P_{\max}^2}{2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{\Delta P_{\max}^2}{2 \rho_0 v}$$



## Плоская гармоническая волна

$$\langle j_x \rangle = v \langle w \rangle = 2v \langle w_k \rangle = \rho a^2 \omega^2 v^2 \langle \sin^2 (\omega t - kx + \alpha) \rangle$$

$$\langle \sin^2 (\omega t - kx + \alpha) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v$$

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{\rho a^2 \omega^2}{2} v$$

## Сферическая гармоническая волна

$$A \sim \frac{1}{r} \Rightarrow I \sim \frac{1}{r^2}$$

$$I = I_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \quad I_0 = I(r_0)$$

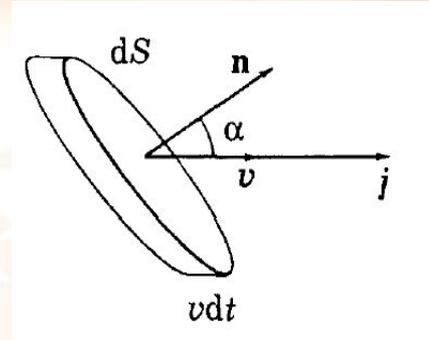


*поток энергии:*

$$\Phi = \int_S \vec{j} dS = \int_S \vec{j} n dS = \int_S j_n dS$$

*среднее значение:*

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle \vec{j} \rangle dS = \int_S I \cos \alpha dS$$



*для сферической волны:*

$$\langle \Phi \rangle = \oint_S \langle \vec{j} \rangle dS = \langle \vec{j} \rangle S = \langle \vec{j} \rangle 4\pi r^2 = P = const$$

$$I = I_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2$$

***P – мощность источника***



## Плоская квазигармоническая волна

$$\xi(x, t) = a \exp(-\gamma x) \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

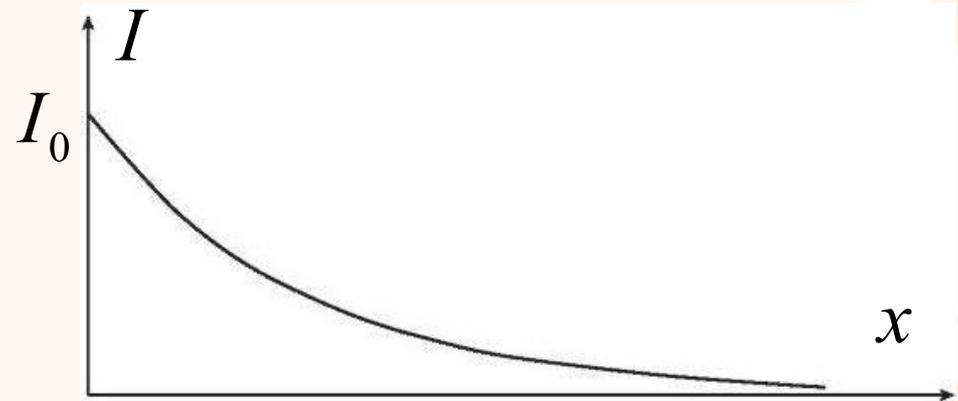
$\gamma = \gamma(\omega)$  - коэффициент затухания. В вязкой среде

$$\gamma \sim \frac{\eta \omega^2}{\rho v^3}$$

$$I \sim A^2 \sim a^2 \exp(-2\gamma x)$$

$\beta = 2\gamma$  - коэффициент  
поглощения

$$I = I_0 \exp(-\beta x)$$



## Сферически-симметричная волна

$$I \sim A^2 \sim \left( \frac{a}{r} \exp(-\gamma r) \right)^2 \sim \frac{\exp(-2\gamma r)}{r^2} = \frac{\exp(-\beta r)}{r^2}$$

$$\Rightarrow I \sim \frac{\exp(-\beta r)}{r^2}$$

$$I = I_0 \frac{r_0^2}{r^2} \exp(-\beta r) \quad I_0 = I(r_0)$$



# Звуковые волны



## Акустика



**Скорость звука в газе**

$$PV^\gamma = \text{const}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

$$\gamma = 1,4, T = 290 \text{ K}, M = 29 \Rightarrow v = 340 \text{ м/с} \Rightarrow \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} =$$

**Скорость звука в жидкости**

$$\Rightarrow v \approx 1,5 \text{ км/с}$$

**Скорость звука в твердом теле:**

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_l^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$



Продольная волна (Р-волна).

$$c_p \sim = (E/\rho)^{1/2}$$

Поперечная волна (S-волна).

$$c_s \sim = (G/\rho)^{1/2}$$

Модуль Юнга  $E[\text{Па}]$  характеризует упругие и прочностные свойства вещества по отношению к объемному растяжению и сжатию.

Модуль сдвига  $G[\text{Па}]$  характеризует упругие и прочностные свойства вещества по отношению сдвиговой деформации

Материал	E, ГПа	$c_p$ , км/с	$c_s$ , км/с	c, км/с в стержне
Al	70	6,26	3,08	5,08
W	350-400	5,46	2,62	4,31
<u>Лёд</u>	3	3,98	1,99	3,28
Cu	110-130	4,70	2,26	3,71
Pb	14-18	2,16	0,70	1,20
Fe	200	5,85	3,23	5,17
<u>Чугун</u>	210	4,50	2,40	3,85



## Шкала звуковых волн

20 Гц

20 кГц

100 МГц



2    4    6    8    10    12    14    16    18    20    22    24    26

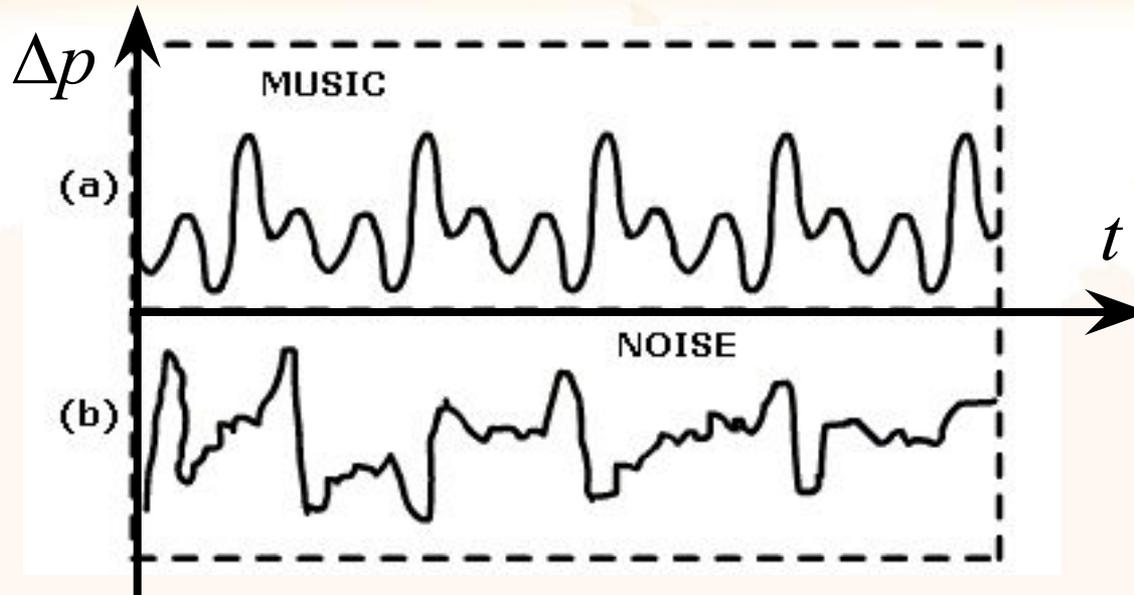
*Инфразвуки*    *Звуковые колебания*    *Ультразвуковые колебания*    *Гиперзвук*

Гц 16

Гц  $2 \cdot 10^4$

Гц  $10^4 - 10^9$

Гц  $10^9$



(а) музыка  
(б) шум

Высота звука – субъективно определяемое свойство звука, зависящее, в основном, от его частоты.

Тембр или окраска звука – зависит от структуры периодически повторяющейся формы..



# Звук – частотные характеристики



**Слышимый звук**  
(16-20)Гц - (15-20)кГц

**Музыкальные звуки:  
частотные диапазоны**

#	Октава	Частота (Гц)	Частота (Гц)
		<i>Нота "До"</i>	<i>Нота "Си"</i>
-3	Субконтроктава	16,35	30,87
-2	Контроктава	32,7	61,74
-1	Большая октава	65,4	123,5
0	Малая октава	130,8	247
1	Первая октава	261,6	493,9
2	Вторая октава	523,25	987,8
3	Третья октава	1046,5	1975,5
4	Четвертая октава	2093	3951
5	Пятая октава	4186	7902



# Сила звука

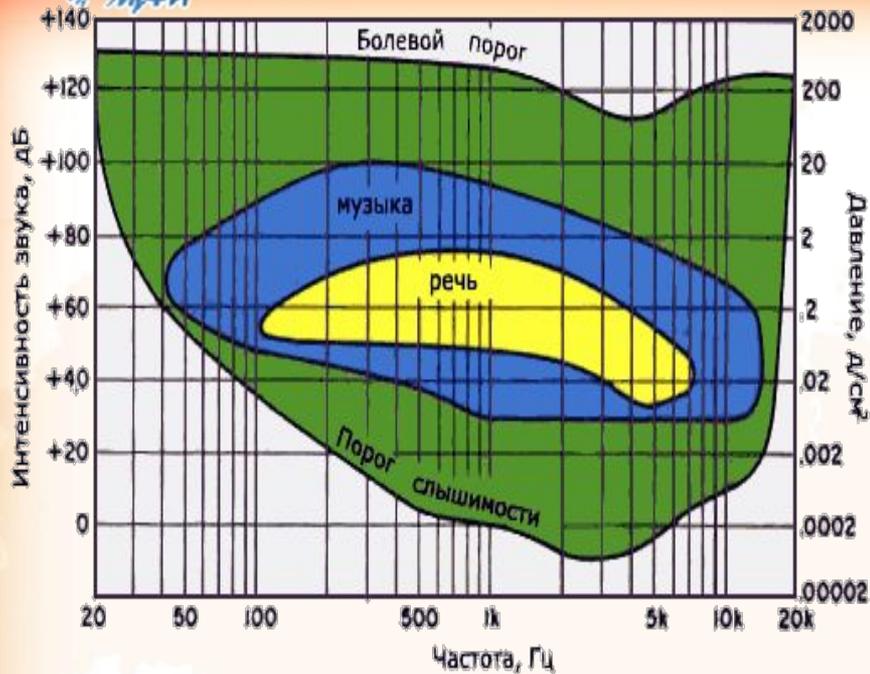


Интенсивность звука - поток энергии, переносимый звуковой волной через единицу площади поверхности.  $I = dW/dS$  [Вт/м<sup>2</sup>].

Сила звука (или «уровень громкости звука») измеряется по относительной шкале в децибелах [дБ]:  $P = 10 \lg_{10}(I/I_0)$

$I_0$  - порог слышимости (= 1 пВт/м<sup>2</sup> при частоте 1 кГц)

Звук	Уровень громкости, дБ
Порог слышимости	0
Тиканье наручных часов	10
Шепот	20
Звук настенных часов	30
Приглушенный разговор	40
Тихая улица	50
Обычный разговор	60
Шумная улица	70
Опасный для здоровья уровень	75
Пневматический молоток	90
Кузнечный цех	100
Громкая музыка	110
Болевой порог	120
Сирена	130
Реактивный самолет	150
Шумовое оружие	200



*Порог болевого ощущения* – значение интенсивности, при котором волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе лишь ощущение боли и давления.

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$

$L$  – уровень громкости [Дб]

$I_0$  – исходная интенсивность:  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>



# Распространение звуковых волн

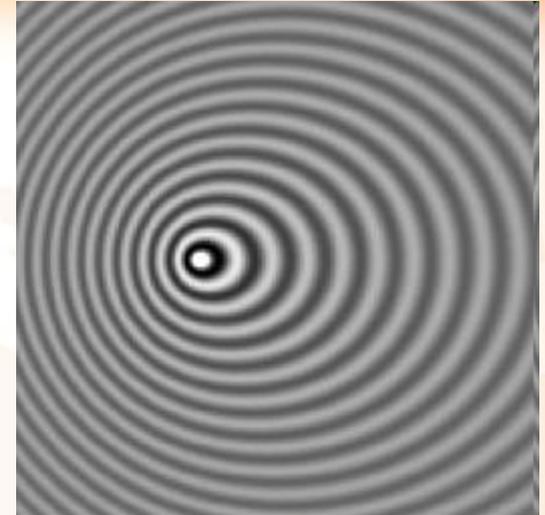


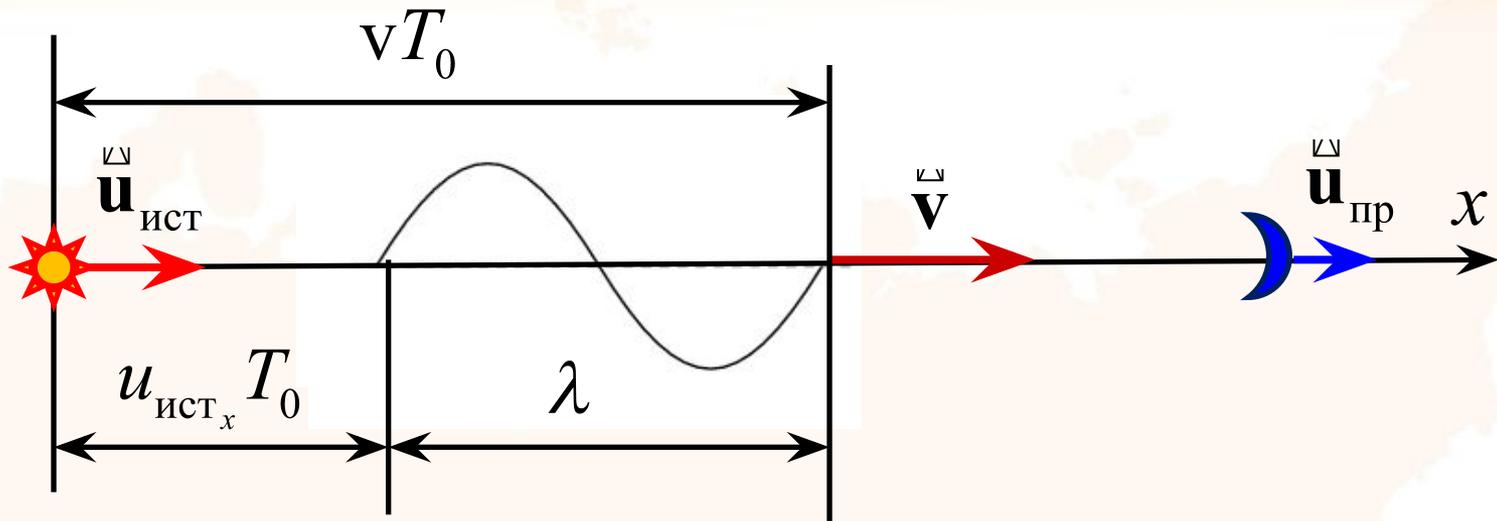
При распространении звуковых волн в среде возникают те-же характерные эффекты, что и при распространении световых (электромагнитных) волн:

- Дисперсия (зависимость скорости волны от частоты) – для звуковых волн в однородных средах выражена слабо
- Затухание (потеря энергии звуковой волной за счет вязкости среды)
- Дифракция (изменение направления распространения волны при огибании препятствия)
- Интерференция (эффект наложения двух волн одной длины, при котором амплитуда колебаний в разных точках пространства становится разной)
- Стоячие волны (эффект сложения двух волн одной длины, распространяющихся навстречу друг-другу)
- Эффект Доплера (зависимость слышимой частоты звука от скорости источника или приемника звука)
- .....



Эффект Доплера (зависимость слышимой частоты звука от скорости источника или приемника звука)  
Эффект был впервые описан Кристианом Доплером в 1842 году.





$$\lambda = (v_x - u_{\text{ист}_x}) T_0 \quad T = \frac{\lambda}{v_{\text{отн}}} = \frac{\lambda}{v_x - u_{\text{пр}_x}} = T_0 \frac{v_x - u_{\text{ист}_x}}{v_x - u_{\text{пр}_x}}$$

$$v = \frac{1}{T}, \quad v_0 = \frac{1}{T_0}$$

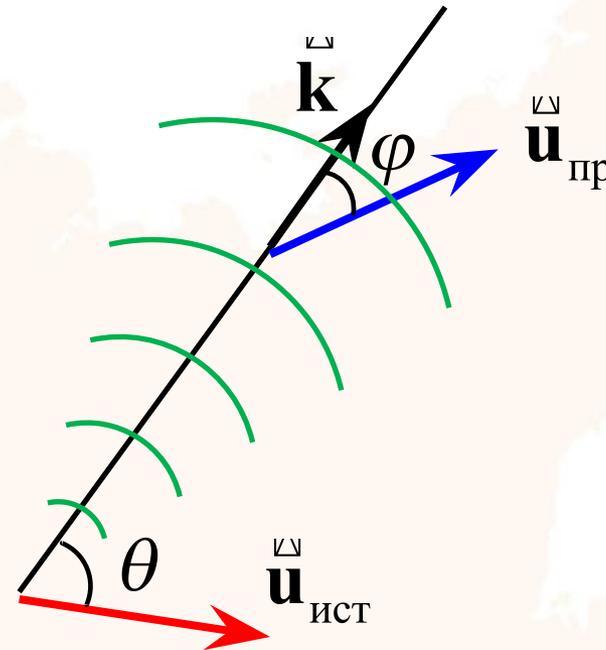
$$\Rightarrow v = v_0 \frac{v_x - u_{\text{пр}_x}}{v_x - u_{\text{ист}_x}}$$



Расстояние между источником и приёмником велико.

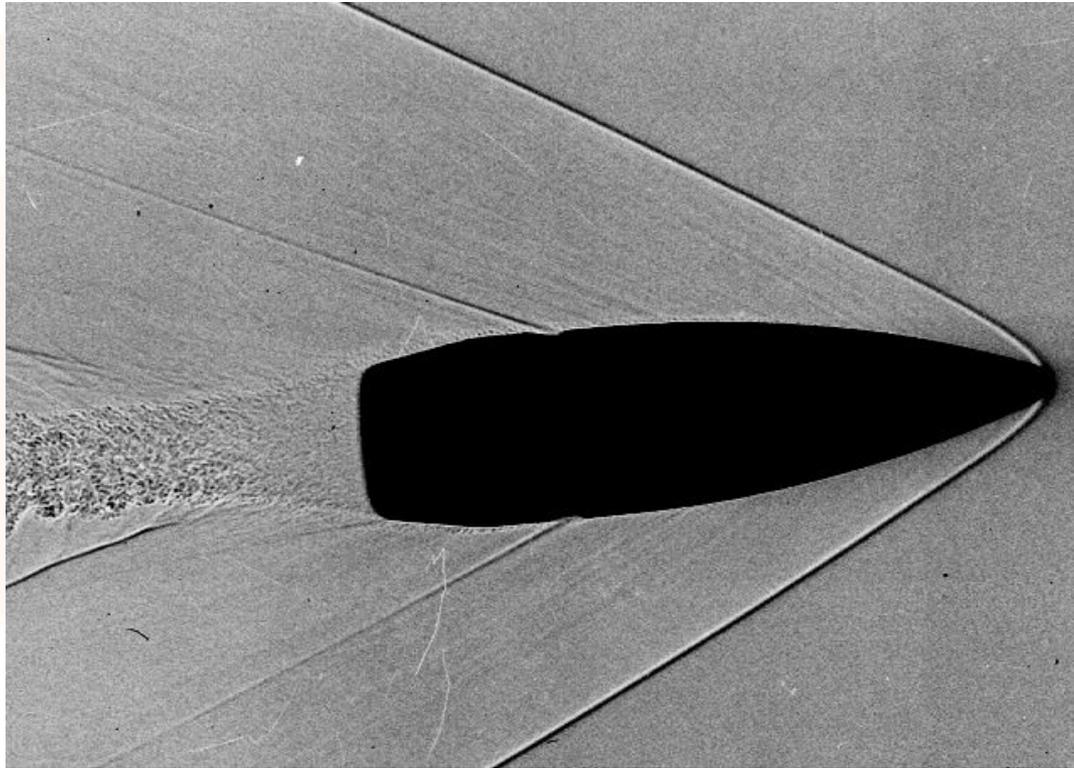
$$v = v_0 \frac{v - u_{\text{пр}} \cos \varphi}{v - u_{\text{ист}} \cos \theta}$$

$$\text{Если } \theta = \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = v_0$$



Эффект Доплера имеет чисто кинематическое происхождение, возникает для движений любой природы

Если  $u_{\text{ист}} > v$ , то возникает ударная волна.



Ударная волна и конус Маха, возникшие в результате сверхзвукового полёта пули с числом Маха 2,45.



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \right] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \\ \left[ \nabla \times \vec{\mathbf{H}} \right] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) = 0 \\ (\nabla \cdot \vec{\mathbf{H}}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{\mathbf{E}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{\mathbf{H}}$$

$$\varepsilon = \mu = \mathbf{M}/\mathbf{c} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$



# Эл-маг. волны - диапазоны



Диапазон	Частоты	Длины(в вакууме)	Излучатели, источники	Применение
Низкочастотные волны	$<3$ кГц	$>10$ км	Цепи и генераторы переменного тока, космос	исследования
Радио - волны	3 кГц- 3 ТГц	100 км – 0,1 мм	Генераторы + антенны. космос	Радио, ТВ, моб. связь
Оптические волны	$3 \cdot 10^{12}$ Гц $3 \cdot 10^{16}$ Гц	0,1 мм – 10 нм	Атомы и молекулы, звезды	Зрение. Радиотехника и электроника
Рентгеновские лучи (X-ray)	$>3 \cdot 10^{16}$ Гц	$< 10$ нм	Атомы, быстрые электроны, рентг. трубки	Рентгенография медицина
Гамма ( $\gamma$ ) кванты	$>3 \cdot 10^{16}$ Гц	$< 10$ нм	Ядра атомов, ускорители, косм. лучи	Физические исследования, астрофизика,



# Оптический и квантовый диапазоны



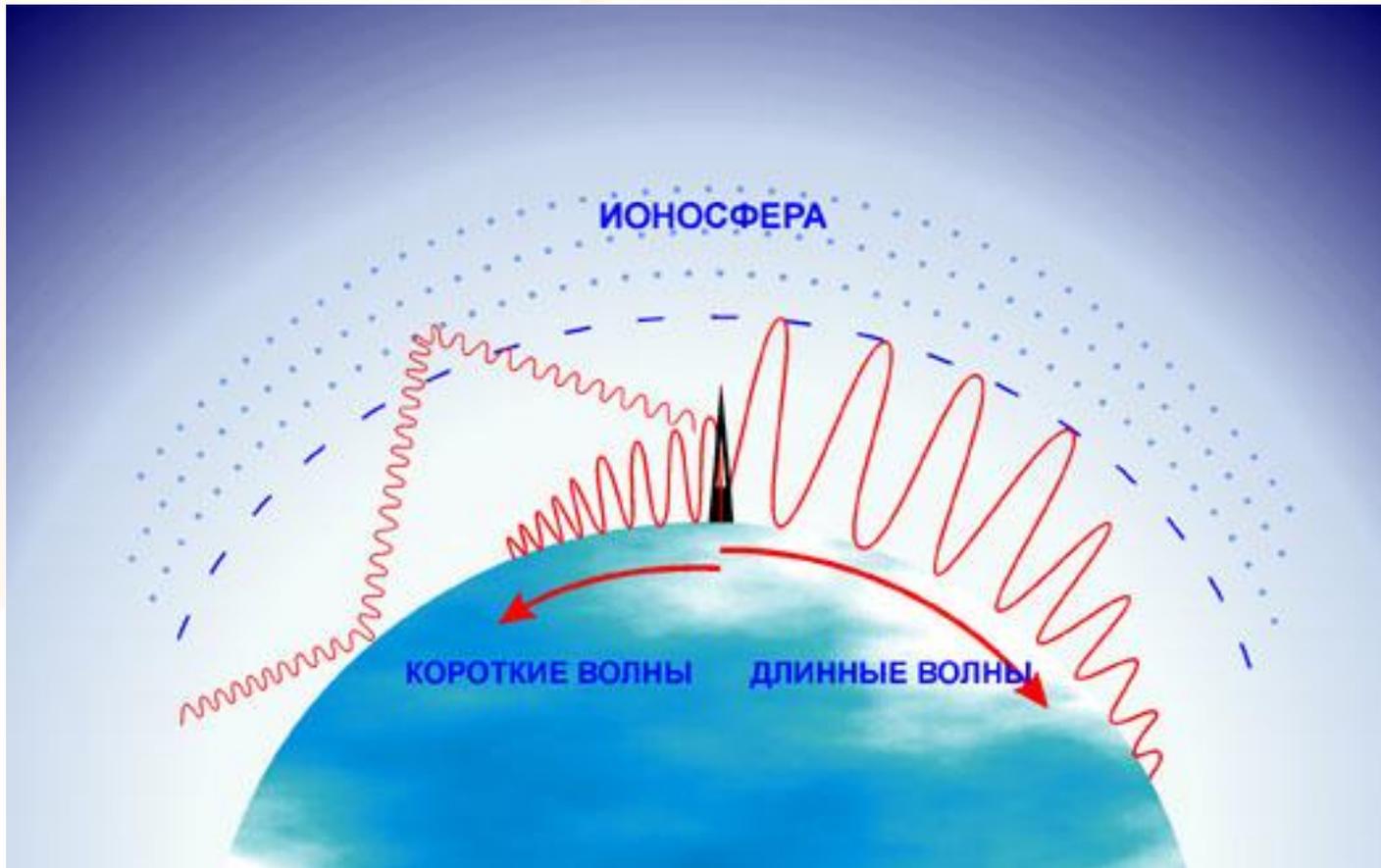
Диапазон	Длины, частоты, энергии квантов	Получение и использование
Инфракрасные волны	0,75-100 мкм 3 – 400 ТГц 0,01-1,6 эВ	Тепловое излучение. Инфракрасные приборы
<b>Видимый свет</b>	380-760 нм 400-800 ТГц 1,6-3,2 эВ	Свет звезд. Атомы. Зрение
Ультрафиолетовые волны	380-100 нм $8 \cdot 10^{14}$ - $3 \cdot 10^{15}$ Гц 3 -10 эВ	Атомы. Звезды. Космос. Медицина. исследования
Рентгеновское излучение	0,01 -100 нм $3 \cdot 10^{15}$ - $3 \cdot 10^{19}$ Гц 10 эВ – 100 кэВ	Атомы, тормозное излучение. Исследования, медицина
Гамма излучение	< 0,01 нм > $3 \cdot 10^{19}$ Гц >100 кэВ	Ядра атомов, ускорители, космические лучи Физические исследования



# Радио-волны - диапазоны

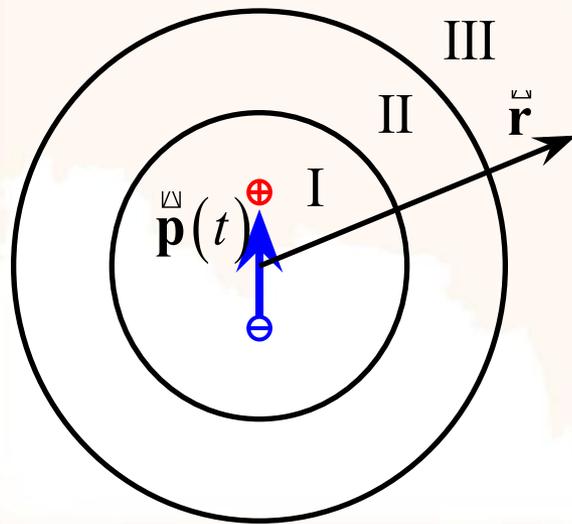


Волны, диапазон	Длины, частоты	Использование
Мириаметровые (ОНЧ– очень низкие частоты, ELF-SLF-ULF-VLF)	>10 км, < 30 кГц	Связь ВМФ (подводные лодки)
Километровые НЧ, LF – низкие частоты, ДВ - длинные волны	1 – 10 км 30-300 кГц	АМ-радио, навигация (маяки), метеорология
Гектометровые СЧ, MF - Средние частоты, СВ - средние волны	100-1000 м 0,3-3 МГц	АМ-радио
Дека метровые – ВЧ, HF - Высокие частоты, КВ - короткие волны	10-100 м 3-30 МГц	Связь на флоте, дальнее АМ-радио
Метровые – ОВЧ, VHF (очень высокие частоты, УКВ – ультра-короткие)	1 – 10 м, 30-300 МГц	ТВ, FM-радио, авиационная связь
Дециметровые – УВЧ, UHF (ультра-высокие )	10-100 см 0,3-3 ГГц	ТВ,GPS, GLONAS
Сантиметровые – СВЧ, SHF (сверх-высокие)	1 – 10 см 3-30 ГГц	Сотовая связь, кабель. ТВ, микроволновые приборы
КВЧ, ГВЧ, ЕНФ (крайне и гипер-высокие)	0,1-10 мм 30ГГц–3 ТГц	Спец.электроника

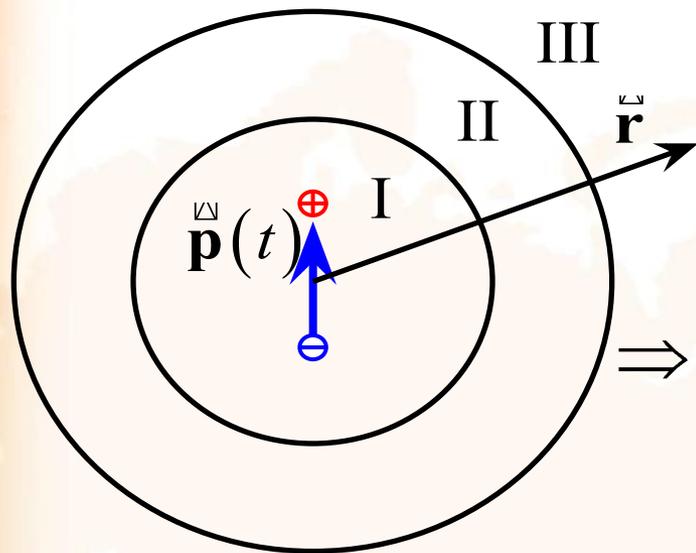




Излучатель ЭМ радиоволн – антенна = проводник с одним свободным концом. На второй конец подается переменное напряжение. Если проводник длины  $l$  прямой – с большого расстояния  $r \gg l$  его можно рассматривать как диполь с переменным дипольным моментом  $\mathbf{p}(t)$ , излучающий эл-иаг волну.



- I – ближняя зона – переменное поле
- II – промежуточная зона
- III – волновая зона – эл-маг волна



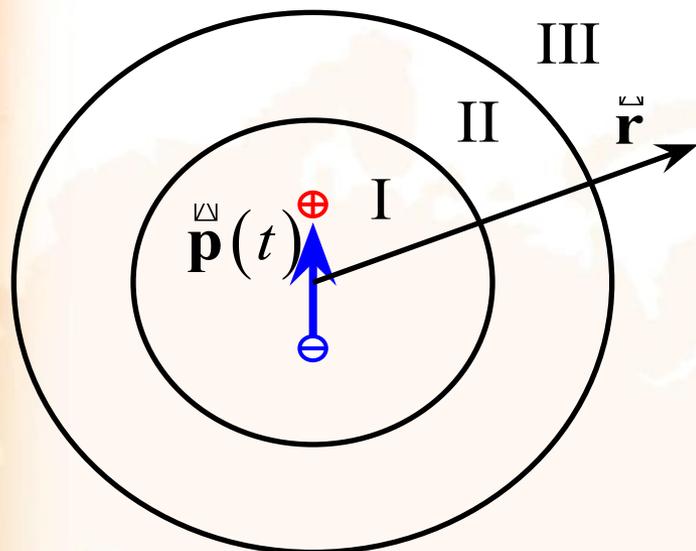
На большом расстоянии от антенны ( $r \gg 1 \cdot \lambda$ ), где поле можно рассматривать как волну, уравнения Максвелла имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \nabla \times \mathbf{E} \right] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \left[ \nabla \times \mathbf{H} \right] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \right) = 0 \\ \left( \nabla \cdot \mathbf{H} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Градиент определяет направление убывания поля, на большом расстоянии совпадающее с  $\mathbf{r}$ . Дипольный момент  $\mathbf{p}(t)$  меняет величину, но не направление. Следствие:

$$\mathbf{r} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{r} \quad - \text{Э-М волна} - \text{поперечная!}$$

Можно доказать, что это так при любом механизме ее излучения



Вектора  $E \perp H \perp r$  образуют правую тройку, причем векторное произведение  $S = [E, H] \parallel r$  и имеет размерность  $[Вт/м^2]$ . Это *вектор Пойнтинга* - плотность потока энергии ЭМ-волны – аналог вектора Умова для волн упругих. В следующей лекции мы строже покажем, что это действительно так.

$I = |\langle S \rangle|$  = абсолютная величина усредненного по времени вектора Пойнтинга = интенсивность волны.

Закон сохранения энергии требует, чтобы средний по времени полный поток вектора Пойнтинга через любую поверхность, окружающую источник излучения, был одним и тем же и равным средней мощности источника  $\langle P \rangle$  [Вт]

На больших расстояниях от диполя – источника волны

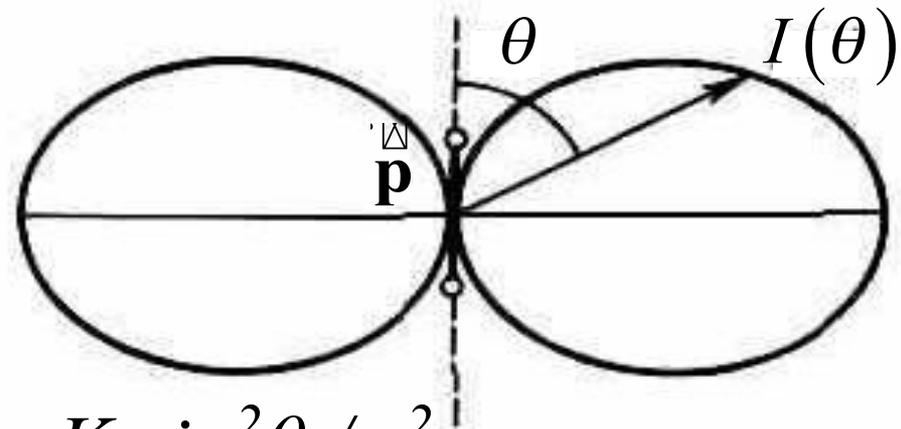
$$E \sim \frac{\sin \theta}{r}$$

$$H \sim \frac{\sin \theta}{r}$$

$$I \sim EH \Rightarrow$$

$$I \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

$$= K \sin^2 \theta / r^2$$



$$\langle P \rangle = r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} I(r, \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} I(r, \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = (8\pi / 3)K \Rightarrow I = 3\langle P \rangle \sin^2 \theta / 8\pi r^2$$



# Излучение электромагнитных волн



Если излучатель – диполь с моментом  $\mathbf{p}(t)$ , можно показать, что

$$I = 3\langle P \rangle \sin^2 \theta / 8\pi r^2$$

$$\langle P \rangle = \frac{\langle |\dot{\mathbf{p}}|^2 \rangle}{6\pi c^3 \varepsilon_0}$$

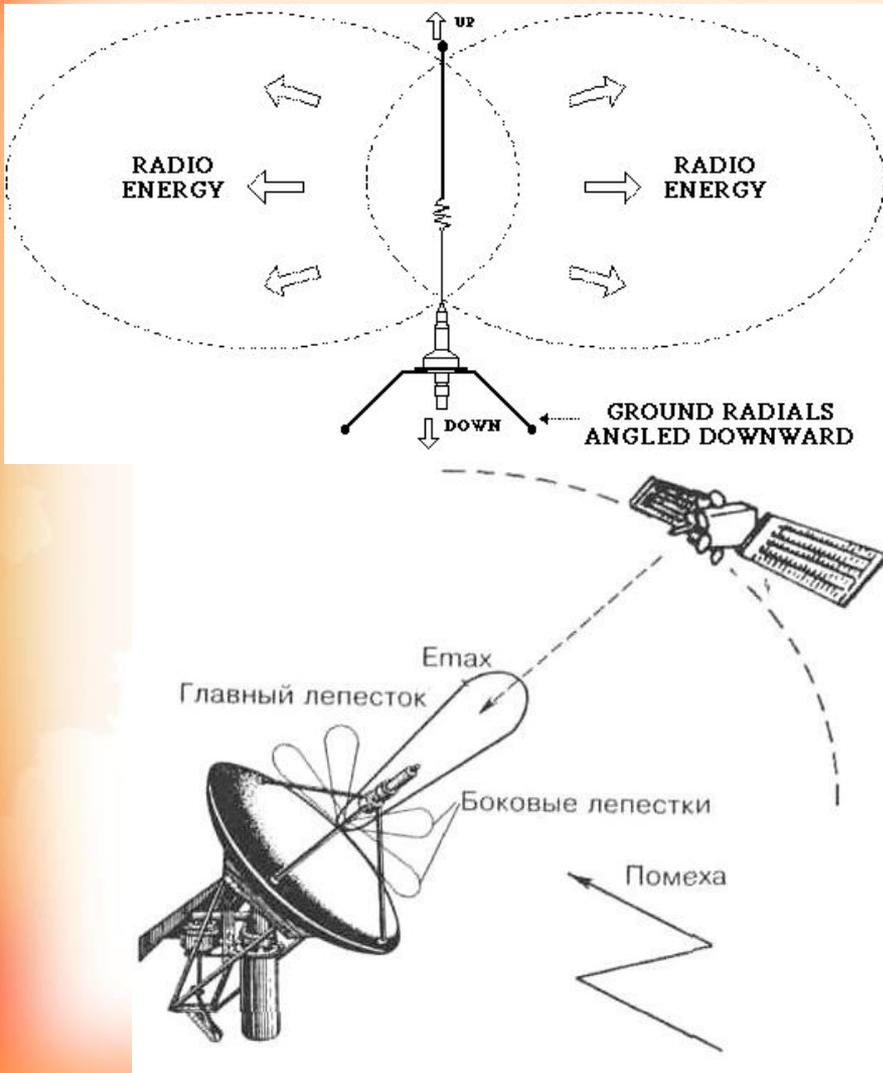
$\Rightarrow$

$$I = \frac{\langle |\dot{\mathbf{p}}|^2 \rangle \sin^2 \theta}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0 r^2}$$

Мощность излучения пропорциональна квадрату второй производной по времени от меняющегося дипольного момента.

Если  $p(t) \sim \cos(\omega t)$ , то средняя мощность излучения

$$\langle P \rangle \sim \omega^4 \quad (!)$$

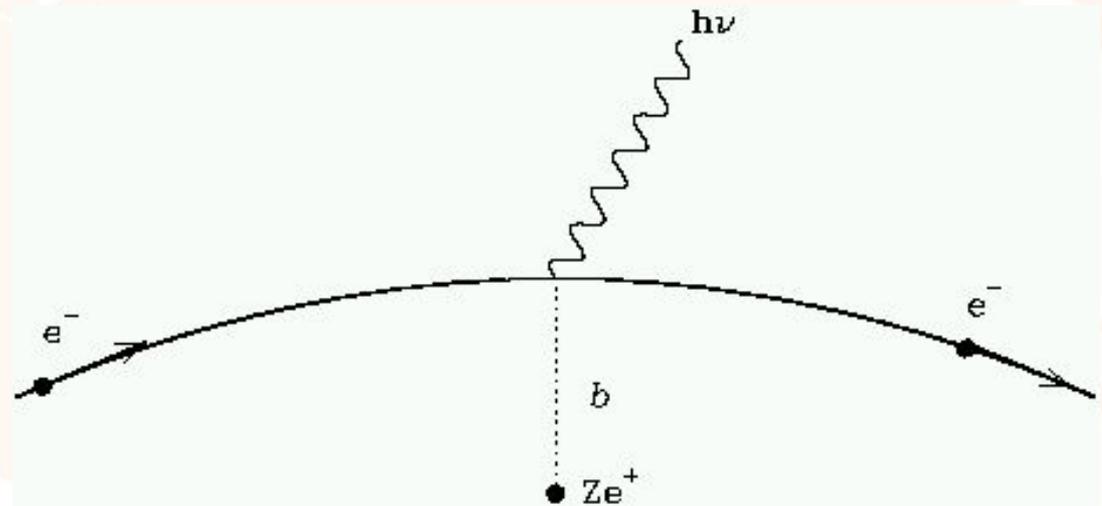


Примеры диаграмм направленности излучения разных реальных антенн

## Излучение зарядов, движущихся с ускорением

$$\vec{p} = q\vec{r} \quad \ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}} = q\ddot{\vec{a}} \quad a \sim \omega^2$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle \sim \omega^4$$





# Излучение электромагнитных волн





## Эффект Доплера для электромагнитных волн



Эффект Доплера = изменение частоты и/или длины волны, воспринимаемой приёмником при относительном движении источника и приёмника волн.

В отличие от звуковых волн, скорость ЭМ-волн в вакууме одинакова для любого наблюдателя и равна  $c$ . Но время для разных наблюдателей может течь по-разному!

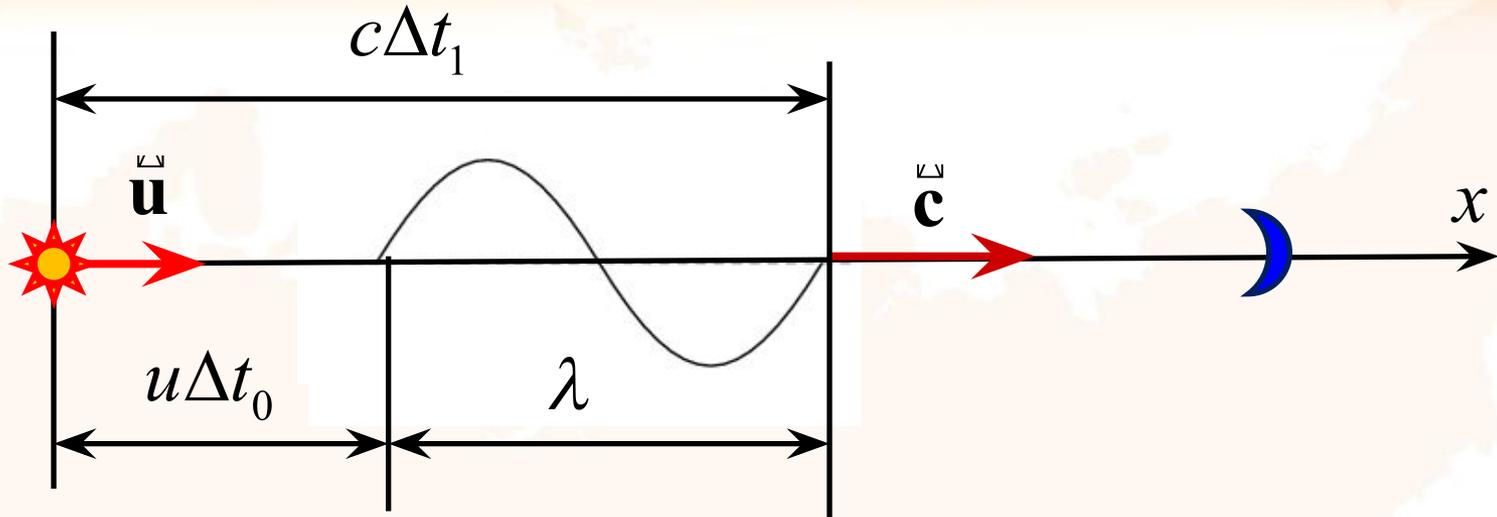
$c$  - скорость света в вакууме

$u$  - относительная скорость источника и приёмника

$\Delta t_0$  - собственный период колебаний источника

$\Delta t_1$  - период колебаний, воспринимаемых приёмником

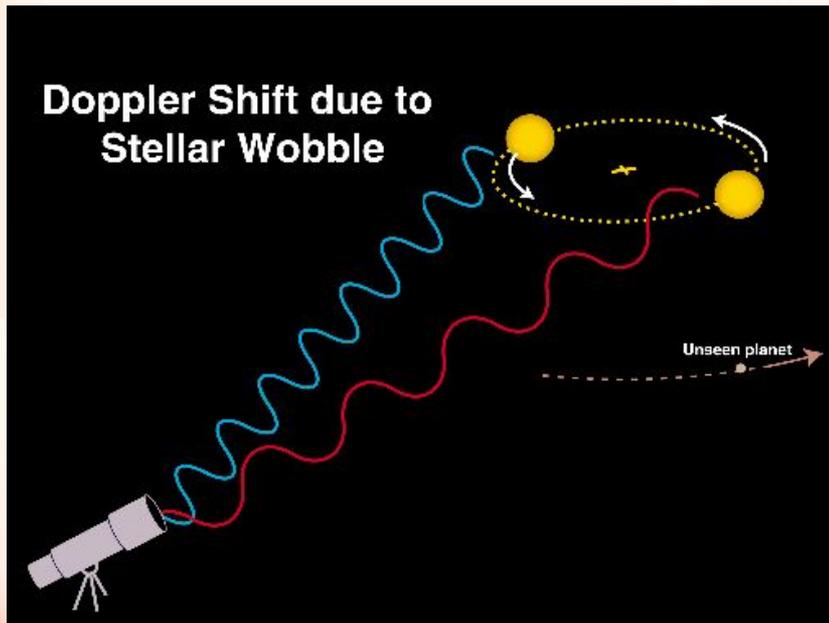
$$\Delta t_1 = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$



$$\lambda = \Delta t_1 (c - u) \quad T = \frac{\lambda}{c} = \frac{\Delta t_1 (c - u)}{c} = \frac{\Delta t_0 (c - u)}{c \sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

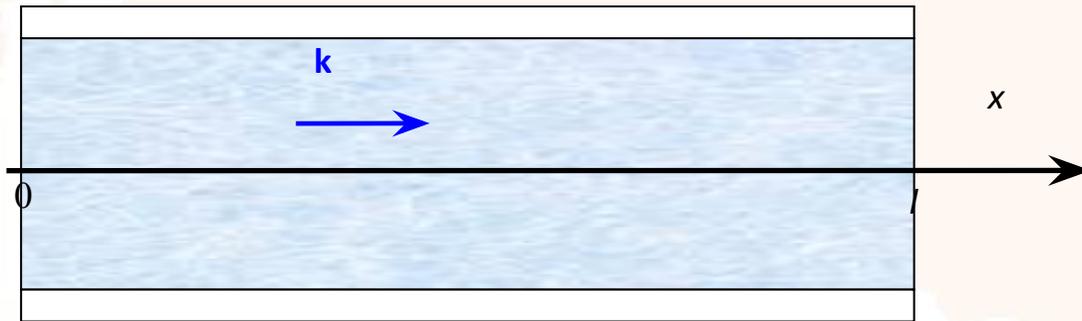
$$v = \frac{1}{T} \quad v_0 = \frac{1}{\Delta t_0} \Rightarrow v = v_0 = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c} = v_0 \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}$$

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 + u_x/c}{1 - u_x/c}}$$



Пример:  $u_x > 0 \Rightarrow v > v_0$   
 $u_x < 0 \Rightarrow v < v_0$

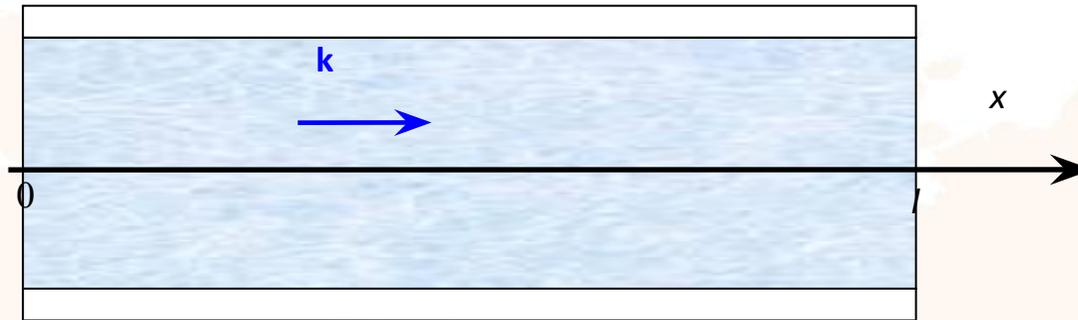
**Пример 1.** Звуковая волна распространяется вдоль трубы длиной  $l = 50$  м, заполненной воздухом. Коэффициент затухания звука в трубе  $\gamma = 0,010$  м<sup>-1</sup>. Каков уровень громкости звука у конца трубы, если у её начала он равен  $L_1 = 60$  дБ?



$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$

$$a = a_1 \exp(-\gamma x)$$

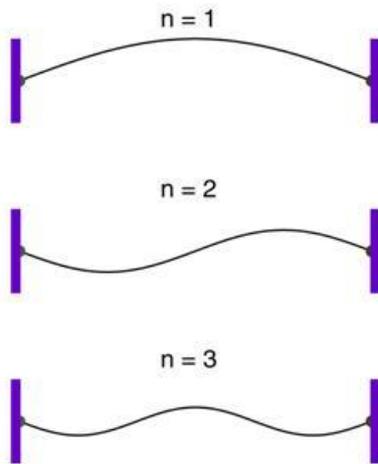
# Примеры решения задач



$$I = I_1 \exp(-2\gamma x) \quad L = 10 \lg \frac{I_1}{I_0} - 20\gamma l \lg e$$

$$L = L_1 - 20\gamma l \lg e = 56$$

**Пример 2.** В упругой струне массы  $m$  возбудили стоячую волну основного тона с частотой  $\omega_1$ . Амплитуда колебаний струны в пучности смещений составила  $a_1$ . Найти максимальное значение кинетической энергии струны.?



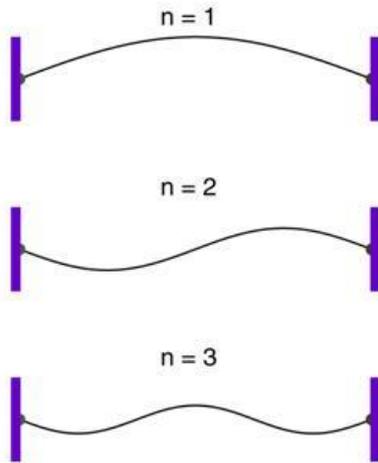
$$\xi(x, t) = A \sin kx \sin \omega t$$

$$\xi(0, t) = \xi(l, t) = 0$$

$$\Rightarrow \sin kl = 0$$

$$kl = \pi n, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

# Примеры решения задач



$$k_n = \pi n/l, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$A = a_1 \quad \omega = \omega_1 \quad k = \pi/l$$

$$\xi(x, t) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega_1 t$$

$$w_k = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

$$w_k = \frac{\rho a_1^2 \omega_1^2}{2} \sin^2 \frac{\pi x}{l} \cos^2 \omega_1 t$$



# Примеры решения задач

$$dV = Sdx \quad dW_{\kappa} = w_{\kappa} dV \quad W_{\kappa} = \frac{\rho S a_1^2 \omega_1^2}{2} \cos^2 \omega_1 t \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx$$

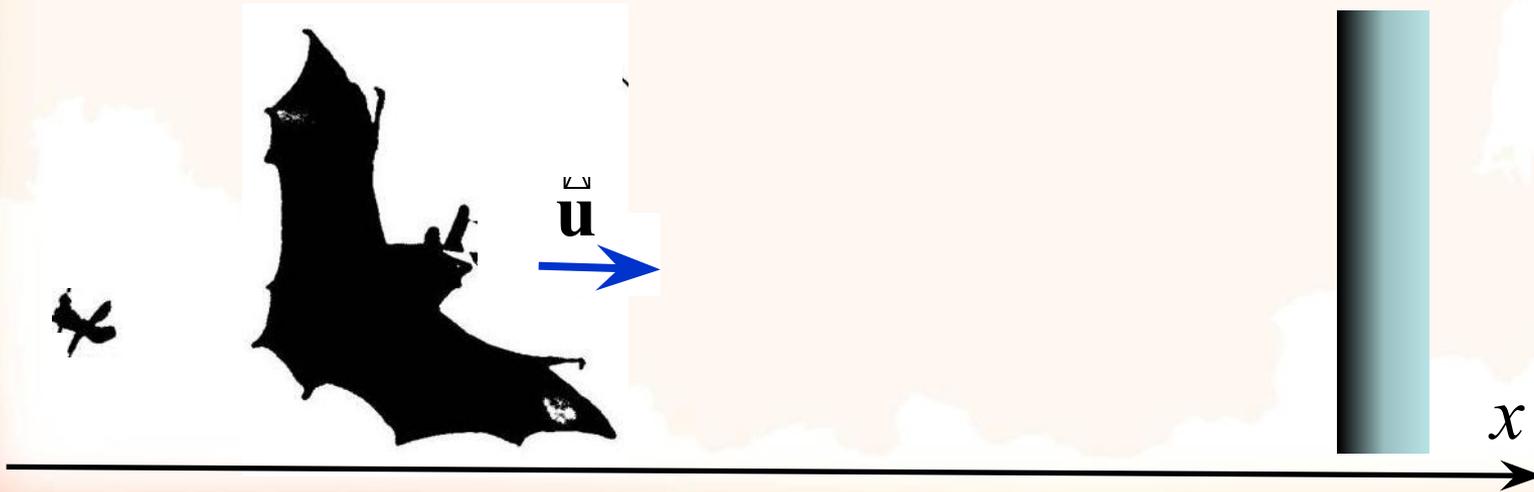
$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \int_0^l \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) dx = \frac{l}{2}$$

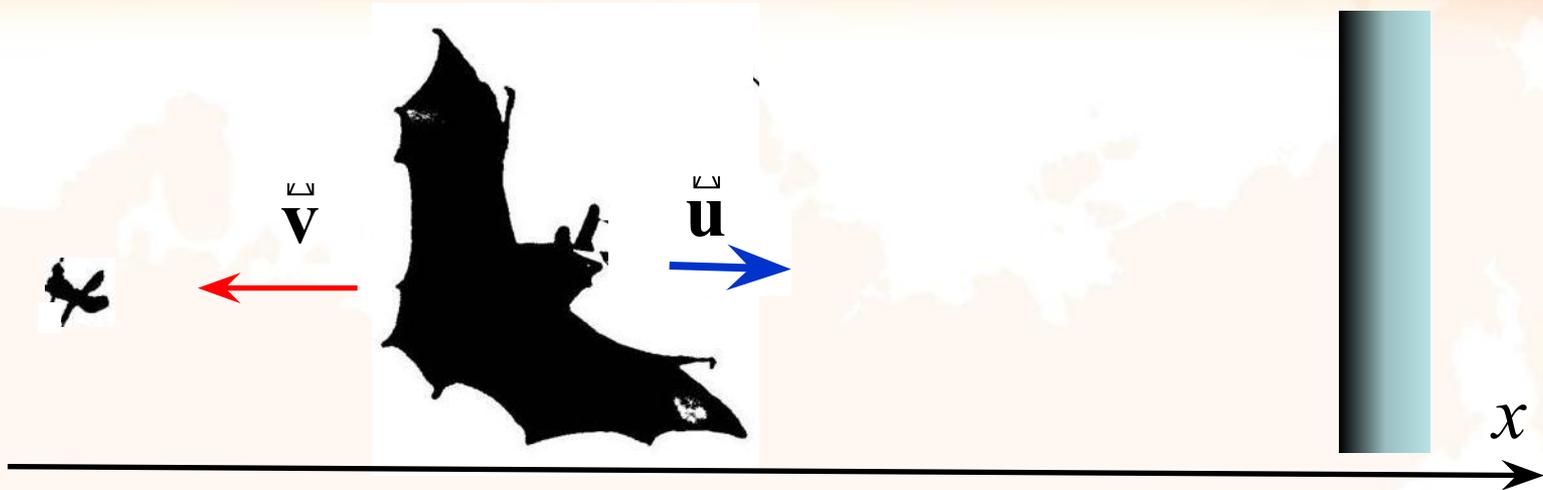
$$W_{\kappa} = \frac{\rho l S a_1^2 \omega_1^2}{4} \cos^2 \omega_1 t \quad W_{\kappa} = \frac{m a_1^2 \omega_1^2}{4} \cos^2 \omega_1 t$$

$$W_{\max} = \frac{m a_1^2 \omega_1^2}{4}$$



**Пример 3.** Летучая мышь летит перпендикулярно к стенке со скоростью  $u = 6 \text{ м/с}$ , излучая при этом ультразвуковую волну с частотой  $\nu_0 = 45 \text{ ц}$ . Насекомое, расположенное за спиной летучей мышью на линии её движения, слышит акустические биения. Какова частота этих биений? Скорость звука  $340 \text{ м/с}$ .

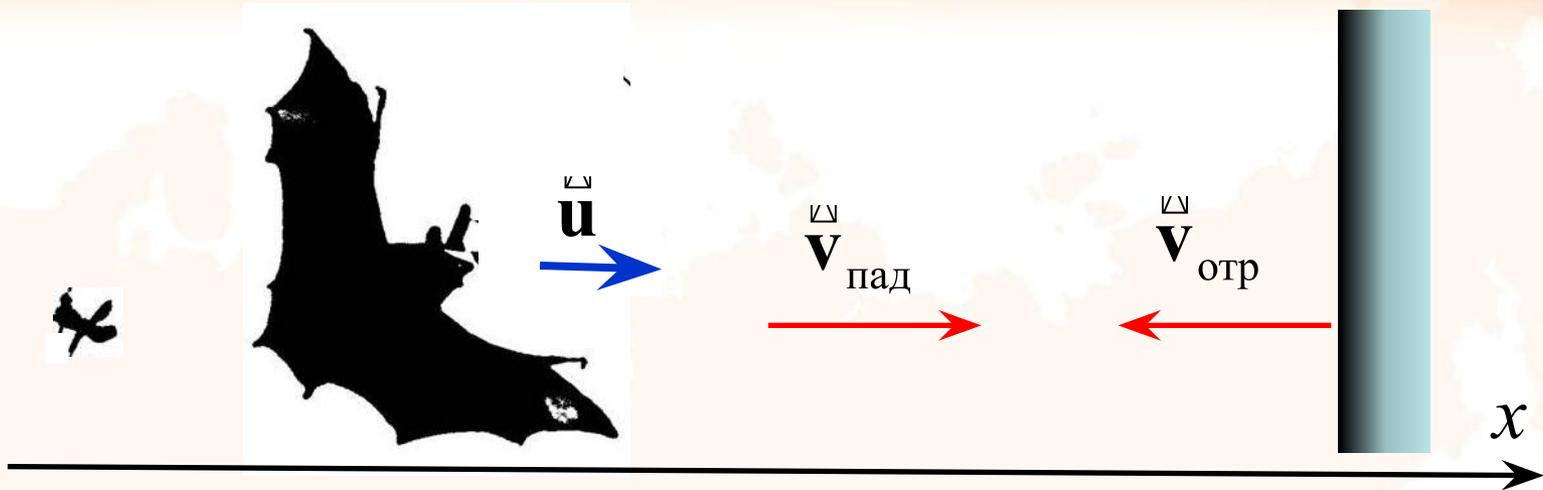




$$v = v_0 \frac{v_x - u_{\text{пр}_x}}{v_x - u_{\text{ист}_x}} \quad u_{\text{пр}_x} = 0, \quad u_{\text{ист}_x} = u, \quad v_x = -v$$

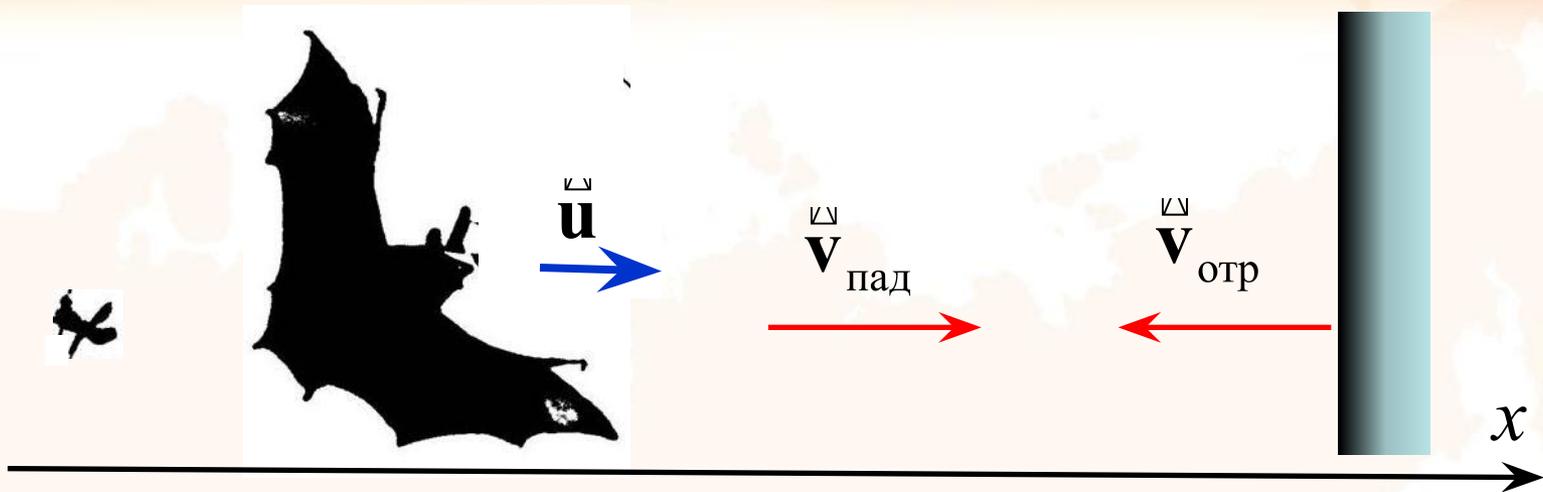
$$v_1 = v_0 \frac{-v}{-v - u} = v_0 \frac{v}{v_x + u}$$

# Примеры решения задач



$$V = V_0 \frac{V_x - u_{\text{пр}_x}}{V_x - u_{\text{ист}_x}} \quad u_{\text{пр}_x} = 0, \quad u_{\text{ист}_x} = u, \quad V_x = V$$

$$V_{\text{пад}} = V_{\text{отр}} = V_0 \frac{V}{V - u}$$



$$v_{\delta} = v_{\text{отр}} - v_1 = v_0 \frac{v}{v - u} - v_0 \frac{v}{v + u}$$

$$v_{\delta} = v_0 \frac{2vu}{v^2 - u^2} \approx v_0 \frac{2u}{v} = 46 \cdot 10^3 \frac{2 \cdot 6}{340} = 1,6 \cdot 10^3$$



**Спасибо за внимание!**

**Следующая лекция  
16 марта**