



Теория вероятностей и математическая статистика

16.12.19

Теория вероятностей

Тема 1. Случайные события. Основные понятия. Алгебра событий. Частота и ее свойства. Вероятность события. Классическая формула. Основные теоремы. Геометрическая вероятность.

Теория вероятностей -

раздел математики, изучающий
закономерности случайных явлений,
наблюдаемых при массовых повторениях
испытаний

Литература

1. Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-Пресс, 2004.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика., М.: Высшая школа, 1977.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979.

Основные понятия теории вероятностей

Испытание (ОПЫТ)	Осуществление некоторого комплекса условий (или действие, результат которого заранее неизвестен)
Событие	Всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти

События обозначаются обычно большими латинскими буквами **A, B, D, F ...**

Классификация событий

Достоверное -
событие, которое при
повторении опыта
обязательно
произойдет

- обычно обозначается - Ω

Невозможное -
событие, которое при
повторениях опыта
никогда не
происходит

- обычно обозначается \emptyset

Случайное -
событие, которое при повторении
опыта иногда происходит, иногда нет

- обычно обозначается - $A, B, C, D \dots$

Взаимосвязь событий

<p>Совместные события</p>	<p>События A и B совместны, если появление одного из них не исключает появления другого. Несколько событий совместны, если совместны хотя бы 2 из них</p>
<p>Несовместные события</p>	<p>События A и B несовместны, если появление одного из них исключает появление другого. Несколько событий несовместны, если они попарно несовместны</p>
<p>Зависимые события</p>	<p>События A и B зависимы, если появление события B зависит от появления события A.</p>

Взаимосвязь событий

Независимые
события

События A и B независимы, если появление одного из них никак не влияет на возможность появления другого.

Равновозможные
события

События в опыте называются равновозможными, если условия их появления одинаковы и нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое

Элементарные
события

Если события A и B не могут быть выражены через более простые события их называют *элементарными событиями*

16.12.19

(элементарными исходами)

Взаимосвязь событий

Полная группа событий -

несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

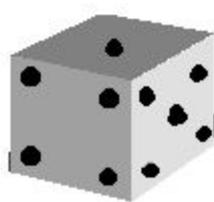
Противоположные события -

2 несовместных события , образующих полную группу событий

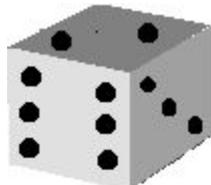
Пример 1:

Опыт - бросание игральной кости

События:



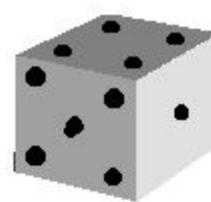
A_1



A_2



A_3



A_4



A_5



A_6

B - выпадение четного числа очков

C - выпадение более 7 очков

D - выпадение не менее 3 очков

E – выпадение более 6 очков

F - выпадение не менее 1 очка

Анализ событий опыта:

E - невозможное событие

F - достоверное событие

$A_1 - A_6$ - элементарные события

$A_1 - A_6$ - полная группа несовместных
равновозможных событий

B, C, D - можно выразить через более
простые (элементарные) события

Например:

B - наступит либо A_2 , либо A_4 , либо A_6

Алгебра событий

Сумма (объединение) событий A_1, A_2, \dots, A_n -

событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий

Обозначение: $A_1 + A_2 + \dots + A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

Произведение (пересечение) событий A_1, A_2, \dots, A_n -

событие, состоящее в появлении всех этих событий

Обозначение: $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

$$0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$$

Частота события и ее свойства

Если опыт воспроизведен n раз, а событие A произошло m раз, то **частотой (относительной частотой)** события A назовем

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$

т.е. отношение числа испытаний, в которых появилось событие A , к числу всех испытаний.

Свойства частоты.

- 1) $0 \leq P^*(A) \leq 1$, так как $0 \leq m \leq n$, следовательно, $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$
- 2) $P^*(\Omega) = 1$, так как $m = n$.
- 3) $P^*(\Theta) = 0$, так как $m = 0$.
- 4) $P^*(A+B) = P^*(A) + P^*(B) - P^*(A \cdot B)$.

□ *Доказательство:*

Пусть опыт повторен n раз, причем событие A появилось m_1 раз, событие B появилось m_2 раз, вместе A и B появились при этом m_3 раз. Тогда

$$P^*(A+B) = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n} = P^*(A) + P^*(B) - P^*(A \cdot B)$$

$$5) P^*(A \cdot B) = P^*(A) \cdot P^*(B/A).$$

□ **Доказательство:**

Пусть опыт повторен n раз, событие A при этом появилось m_1 раз, событие B появилось m_2 раза, вместе A и B появились m_3 раза. Тогда

$$P^*(A \cdot B) = \frac{m_3}{n} = \frac{m_3 \cdot m_1}{n \cdot m_1} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_3}{m_1} = P^*(A) \cdot P^*(B/A).$$

Аналогично, можно доказать, что $P^*(A \cdot B) = P^*(B) \cdot P^*(A/B)$.

Частота случайного события обладает **свойством устойчивости**, т.е. при увеличении числа опытов значения частоты события группируются около некоторого числа, характеризующего возможность появления данного события в данном опыте.

Таким образом, мы приходим к понятию вероятности события в данном опыте.

Вероятность события. Аксиомы теории вероятностей

Вероятностью $P(A)$ события A в опыте назовем численную меру объективной возможности появления события A в данном опыте.

Основные аксиомы:

Аксиома 1. Вероятность любого события A есть число $P(A)$, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq P(A) \leq 1$.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице, т.е. $P(\Omega)=1$.

Аксиома 3. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $P(\Theta)=0$.

Классическая формула

События E_1, E_2, \dots, E_n называются **случаями** в опыте, если

- они образуют **полную группу событий**, т.е.

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = \Omega;$$

- несовместны**, т.е. $E_i \cdot E_j = \Theta$, где $i \neq j$;

- равновозможны**.

Случай называется **благоприятным** событию A , если появление этого случая влечет появление события A . Пусть в данном опыте

благоприятными событию A являются случаи E_1, E_2, \dots, E_m , т.е. $A = E_1 + E_2 + \dots + E_m$, тогда $P(A) = \frac{m}{n}$,

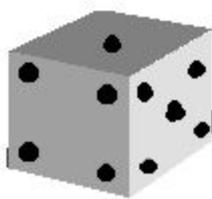
где m - число благоприятных событию A случаев, n - число всех случаев в данном опыте.

Пример 4:

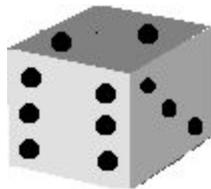
Опыт - бросание игральной кости

Событие A - выпадение числа очков, кратного 3.
Найдем вероятность события A .

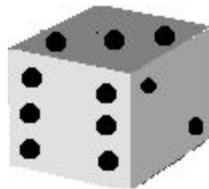
Решение:



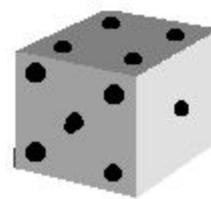
A_1



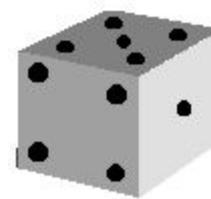
A_2



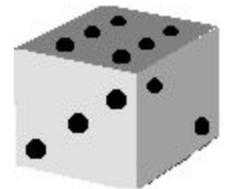
A_3



A_4



A_5



A_6

Всего случаев 6. Благоприятных из них 2,
следовательно, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Пример 5:

Два счета из десяти выполнены с ошибками. Найти вероятность того, что из четырех взятых на проверку счетов один счет окажется с ошибками

Решение:

Имеем дело с неупорядоченными выборками без повторений, следовательно, всего случаев $n = C_{10}^4$, благоприятных из них $m = C_2^1 \cdot C_8^3$.

Следовательно

$$P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^3}{C_{10}^4} =$$

$$\frac{2! \cdot 8!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 5!}$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10)}$$

$$\frac{8}{15}$$

16.12.19

$$\frac{10!}{4! \cdot 6!}$$

20

Основные теоремы

Теорема 1. Теорема сложения вероятностей.

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \\ & \dots + P(A_n) - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) - \dots - \\ & - P(A_{n-1} \cdot A_n) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_4) + \dots + \\ & + P(A_{n-2} \cdot A_{n-1} \cdot A_n) - \dots + \\ & + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n). \end{aligned}$$

□ **Доказательство** (для $n=3$).

$$\begin{aligned} P(A+B+C) &= P((A+B)+C) = / \text{ по аксиоме 4 } / = P \\ &(A+B)+P(C)-P((A+B) \cdot C) = P(A+B) + P(C) - P \\ &(A \cdot C+B \cdot C) = P(A+B) + P(C) - (P(A \cdot C) + P(B \cdot C) \\ &- P(A \cdot B \cdot C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P \\ &(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C). \square \end{aligned}$$

Следствие.

Если события A_1, A_2, \dots, A_n **несовместны**,
то

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n).$$

Следствие 1. Вероятность суммы двух любых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B).$$

Следствие 2. Если события A и B несовместны, то $A \cdot B = \emptyset$ и следовательно,

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие 2. Если события A_1, A_2, \dots, A_n несовместны, то

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n).$$

Замечание .

Так как , $A + \bar{A} = \Omega$, то $P(A + \bar{A}) = 1$

События A и \bar{A} несовместны, поэтому

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

Следовательно, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$,

откуда

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Определение. Условной вероятностью $P(A/B)$ события A относительно события B назовем вероятность события A при условии, что событие B уже произошло.

Теорема 2. Теорема умножения вероятностей.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1}).$$

□ Доказательство

Воспользуемся методом математической индукции.

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1).$$

Предполагаем, что теорема верна для $(n-1)$ событий; докажем, что она верна для n событий.

$$\begin{aligned} \text{Найдем } P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) &= P((A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \cdot A_n) \\ &= P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = / \text{ по} \\ \text{предположению } &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \\ &\cdot P(A_{n-1}/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1}). \square \end{aligned}$$

Следствие 1. Вероятность произведения двух любых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого относительно первого, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Событие A называется **независимым** от события B , если условная вероятность события A относительно события B равна безусловной вероятности события A , т.е. $P(A/B) = P(A)$. Нетрудно доказать, что если A не зависит от B , то и B не зависит от A .

Следствие 2. Если события A и B **независимы**, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 7:

Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов. Какова вероятность того, что он ответит на два выбранных наудачу вопроса?



Решение.

Рассмотрим события:

A- студент знает ответ на первый вопрос,

B- студент знает ответ на второй вопрос.

Найдем $P(A \cdot B)$.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = \frac{19}{30} \quad \square$$

Определение.

Несколько событий называют **независимыми** (или независимыми в совокупности), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Следовательно, если A_1, A_2, \dots, A_n независимы, то $P(A_2/A_1) = P(A_2)$, $P(A_3/A_1 \cdot A_2) = P(A_3)$, \dots , $P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = P(A_n)$, тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Пример 8:

Два студента выполняют независимо друг от друга задание. Вероятность того, что задание будет выполнено первым студентом 0,6; для второго студента эта вероятность равна 0,8.

Найти вероятность того, что

- 1) оба студента выполнят задание;
- 2) только один из них выполнит задание;
- 3) хотя бы один из них выполнит задание.

Решение.

События: A - задание выполнит первый студент,
 B - задание выполнит второй студент.

По условию $P(A) = p_1 = 0,6$; $P(B) = p_2 = 0,8$; следовательно, $P(\bar{A}) = 1 - p_1 = q_1 = 1 - 0,6 = 0,4$; $P(\bar{B}) = 1 - p_2 = q_2 = 1 - 0,8 = 0,2$.

• $P(A \cdot B) =$ / события A и B - независимые события / $= P(A) \cdot P(B) = p_1 \cdot p_2 = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$.

• $P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) =$ / $A\bar{B}$ и $\bar{A} \cdot B$ - несовместные события / $= P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,44$.

• $P(A+B) =$ / A и B - совместные события / $= P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,6 + 0,8 - 0,48 = 0,92$

или т.к. $A+B$ и $\bar{A}\bar{B}$ противоположные события, то

$P(A+B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,4 \cdot 0,2 = 1 - 0,08 = 0,92$. \square

Пример 9:

Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Статистические исследования показали, что вероятности выделения кредита этими банками соответственно равны $p_1=0,5$, $p_2=0,4$ и $p_3=0,9$. Банки выделяют кредит независимо друг от друга и, если примут решение о его выделении, то в размере: первый банк-160 тыс. руб., второй-40 тыс. руб., третий-200 тыс. руб.

Найти вероятности того, что предприятие получит кредит

- а) в размере 200 тыс. руб.,
- б) не менее 240 тыс. руб.
- с) в любом размере.

Решение.

События:

А - первый банк выделит кредит,

В - второй банк выделит кредит,

С - третий банк выделит кредит,

Д - предприятие получит кредит в размере 200 тыс. руб.,

Е - предприятие получит кредит в размере не менее 240 тыс. руб.,

Ф – получит кредит.

a) Т.к. $D = A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C$,

то $P(D) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,9) + (1 - 0,5) \cdot (1 - 0,4) \cdot 0,9 = 0,02 + 0,27 = 0,29$.

б) Т.к. $E = A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C$,

то $P(E) = 0,5 \cdot (1 - 0,4) \cdot 0,9 + (1 - 0,5) \cdot 0,4 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,9 = 0,63$.

в) $\bar{F} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$, то $P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,1 = 0,97$. □



Теорема 3. Формула полной вероятности

Пусть в результате опыта может появиться какое-либо из несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу. Событие A может появиться только вместе с одним из этих событий. События H_1, H_2, \dots, H_n называются **гипотезами**. Если известны вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$, где $i = \overline{1, n}$, то

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

□ **Доказательство.**

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (H_1 + H_2 + \dots + H_n)) = P(A \cap H_1 + A \cap H_2 + \dots + A \cap H_n) =$$

/события $A \cap H_i$ и $A \cap H_j$, где $i \neq j$, несовместные события, т.к. $(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = A \cap H_i \cap H_j = \emptyset$ /

$$= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n) = \\ = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n). \square$$

Пример 10:

В лабораторию поступают образцы с трех баз, причем 50% с первой базы, 30% со второй базы, остальные с третьей базы. Вероятность того, что образец с первой базы бракованный - 0,09; со второй - 0,1; с третьей - 0,08. Найти вероятность того, что взятый наудачу образец окажется бракованным.

Решение.

Рассмотрим гипотезы:

H_1 - взятый образец поступил с первой базы,

H_2 - взятый образец поступил со второй базы,

H_3 - взятый образец поступил с третьей базы.

Событие A - образец окажется бракованным.

По условию

$$P(H_1) = 50/100 = 0,5;$$

$$P(H_2) = 30/100 = 0,3;$$

$$P(H_3) = 20/100 = 0,2.$$

$$P(A/H_1) = 0,09;$$

$$P(A/H_2) = 0,1;$$

$$P(A/H_3) = 0,08.$$

Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,09 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,08 = 0,091. \square$$

Запомним

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1.$$

Теорема 4. Формула Байеса (теорема переоценки гипотез)

Пусть в условиях предыдущей теоремы событие A наступило и мы нашли вероятность $P(A)$. Спросим, как изменились вероятности гипотез в связи с появлением события A , т.е. найдем $P(H_i/A)$, где $i=1,2,\dots,n$.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}$$

Пример 11:

Пусть в предыдущем примере событие A наступило, т.е. взятый наудачу образец оказался бракованным. Определить вероятность того, что этот образец поступил со второй базы.

Решение.

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,091} = \frac{30}{91} \approx 0,33.$$

Теорема 5 . Формула Бернулли

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с постоянной вероятностью p . Найдем вероятность того, что в этих n испытаниях событие A появится ровно k раз, т.е. найдем $P(X_n = k)$.

$$P(X_n = k) = C_n^m p^k q^{n-k}, \text{ где } q=1-p$$

Пример 12:

Каждый из пяти независимо работающих элементов отказывает с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что откажут три элемента из пяти.

Решение.

$$\begin{aligned} P_5(3) &= C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 = \\ &= 10 \cdot 0,064 \cdot 0,36 = 0,23. \end{aligned}$$

Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний

Если k_0 - наивероятнейшее число появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых событие A наступает с постоянной вероятностью p

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Пример 13:

Найти наивероятнейшее число отказавших элементов, если каждый из пяти независимо работающих элементов отказывает с вероятностью 0,4.

Решение.

Так как $n=5$, $p=0,4$, $q=0,6$, то $5 \cdot 0,4 - 0,6 \leq k_0 \leq 5 \cdot 0,4 + 0,4$
или

$1,4 \leq k_0 \leq 2,4$. Следовательно, $k_0=2$. \square

