Элементы дискретной математики

Элементы комбинаторики

- ***Комбинаторика*** – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

- Например: сколько различных четырехзначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4 без повторения цифр?

Элементы комбинаторики

Основные правила комбинаторики

1. **Правило сложения**

Из пункта А в пункт Б можно добраться:

- самолетом (2 авиамаршрута)
- поездом (1 маршрут)
- автобусом (3 маршрута)

Общее число маршрутов 2+1+3=6

Если элемент **A** можно выбрать **n** способами, а элемент **B** можно выбрать **m** способами, то выбрать **A или B** можно **n+m** способами.

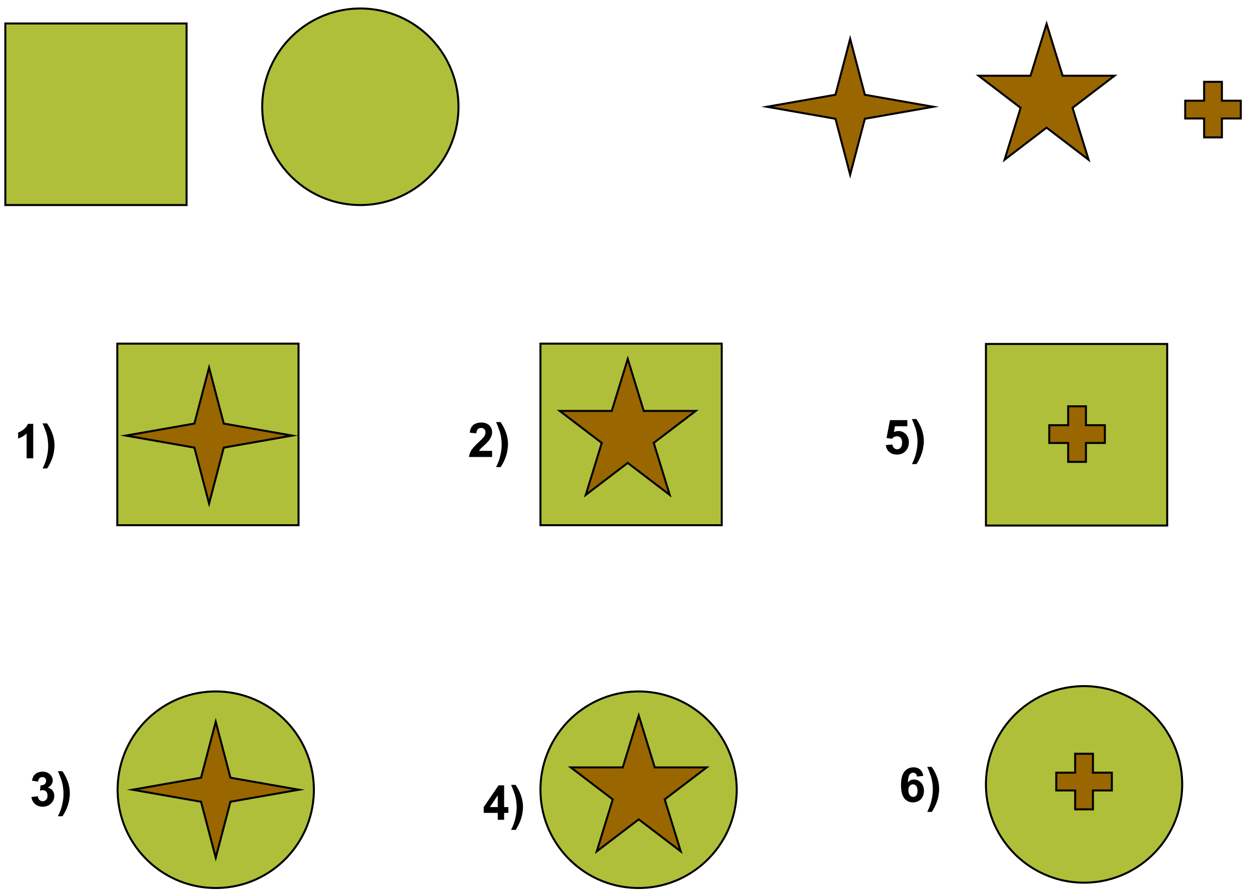
Основные правила комбинаторики

2. **Правило умножения**

   Если элемент А можно выбрать n способами и, при любом выборе А (то есть независимо), элемент В можно выбрать m способами, то пару (А, В) можно выбрать n*m способами.

Основные правила комбинаторики

Правило умножения (пример)



$2 \cdot 3 = 6$ способов

Элементы комбинаторики

- **Размещения**

  Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

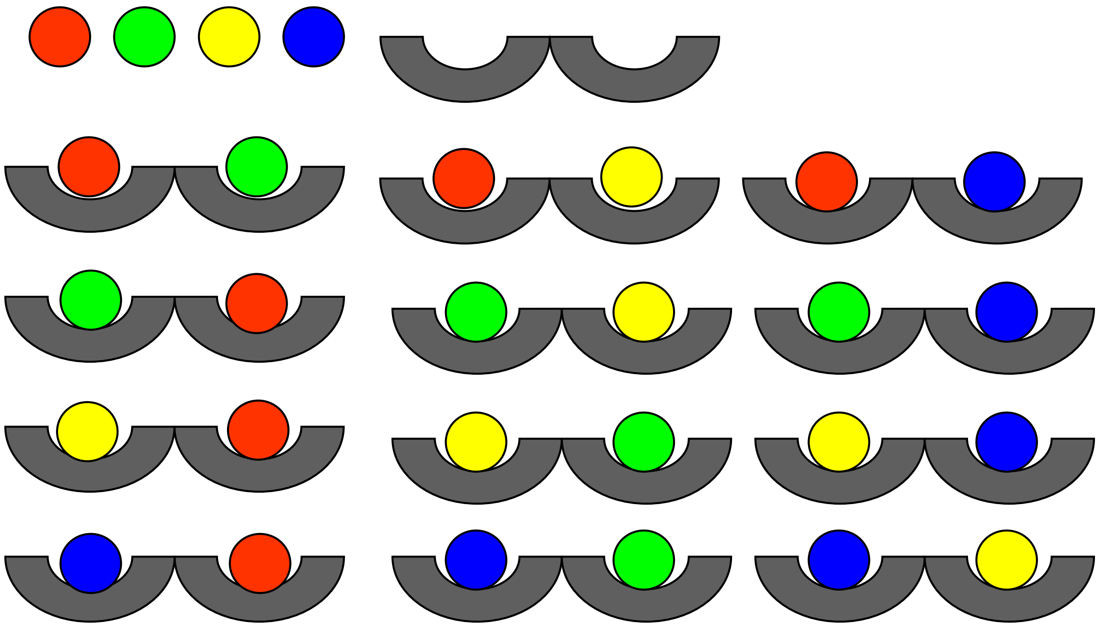
  Размещением из ***n*** элементов по ***k*** элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее ***k*** различных элементов данного множества. Эти подмножества могут отличаться друг от друга составом элементов или порядком их следования.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \ -\text{факториал числа } n, \quad 0! = 1$$

Основные правила комбинаторики

Число размещений (пример)



$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2} = \frac{24}{2} = 12$$

Элементы комбинаторики

- **Перестановки**

Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

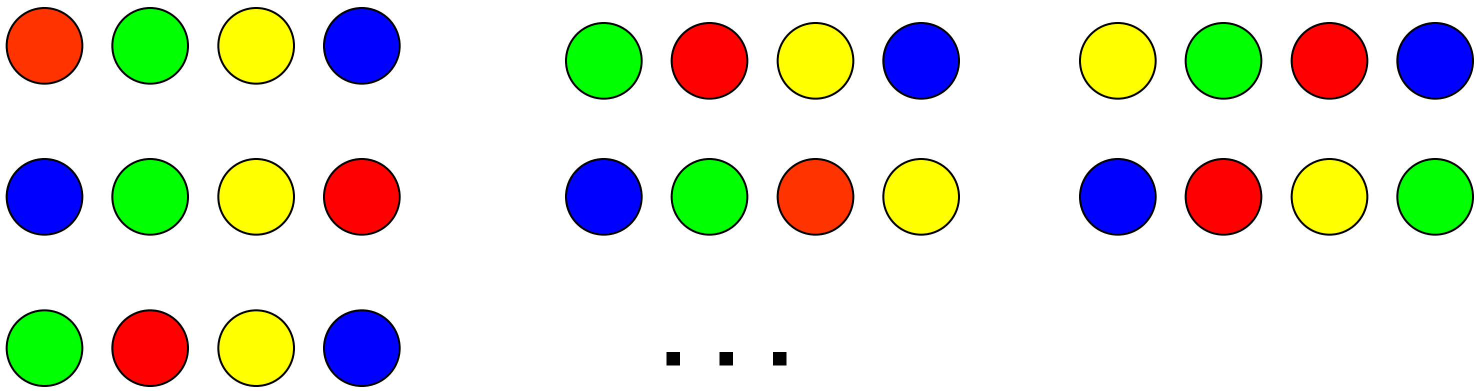
Перестановкой из ***n*** элементов называется размещение из ***n*** элементов по ***n*** элементов.

Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \quad \text{т.е.} \quad P_n = n!$$

Основные правила комбинаторики

Число перестановок (пример)



$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Элементы комбинаторики

- **Сочетания**

  Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

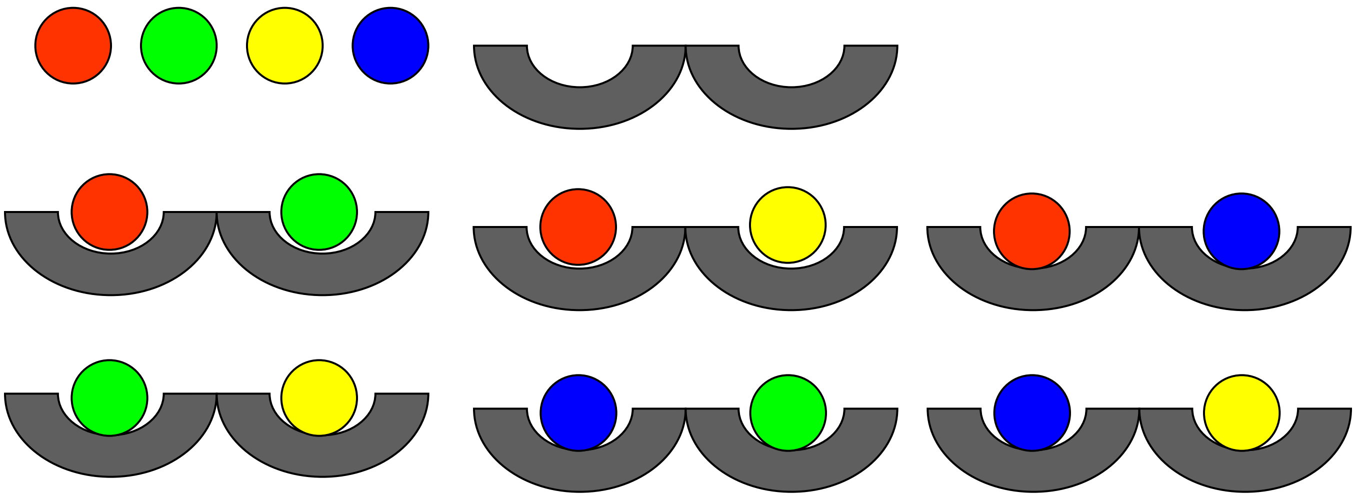
  Сочетанием из ***n*** элементов по ***k*** элементов называется любое подмножество, которое содержит ***k*** различных элементов данного множества.

  Различные сочетания отличаются друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Основные правила комбинаторики

Число сочетаний (пример)



$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Элементы комбинаторики

Упражнения

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?
2. Сколькими способами восемь человек могут встать в очередь к театральной кассе?
3. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W. Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв, причем эти буквы могут повторяться?
4. Сколько слов (цепочек букв) можно образовать из букв слова **фрагмент**, если слова должны состоять из четырех букв? Сколько среди них таких, которые начинаются на букву «ф» и заканчиваются на букву «т»?
5. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Элементы комбинаторики

Задача на комбинированную выборку

- ***Задача:***
  В колоде – 36 карт: четыре масти по девять карт (от шестёрки до туза). Сколько существует способов составить набор из шести карт так, чтобы в него вошли два короля, три десятки и одна дама?

  В данной задаче важно определить, на какие сорта (классы) надо разбить всю совокупность, чтобы выбор осуществлялся из каждого класса в определенном количестве.

  Схема рассуждений такова:

  - **королей всего четыре, из них берем два, способов** $C_4^2 =$ ***6*****;**
  - **десяток всего четыре, из них берем три, способов** $C_4^3 =$ ***3*****;**
  - **дам всего четыре, из них берем одну, способов** $C_4^1 =$ ***4*****,**

  поскольку требуется сделать выбор и (1), и (2), и (3), то, по правилу умножения, число комбинированных наборов равно 6 · 3 · 4 = 72.

Элементы комбинаторики

Возможные ошибки

- ***Задача:***
  Сколько существует вариантов выбрать шесть карт из колоды (36 карт) так, чтобы среди них была хотя бы одна дама?

Первый способ. Возьмём одну даму (*4* варианта). В колоде осталось *35* карт. Выберем из них любые пять карт (*324632* способов). По правилу умножения получим всего *4 · 324632=1298528* способов.

Второй способ. Рассмотрим все варианты выбора по шесть из *36* (сочетания по шесть из *36*). Из них уберём все те варианты, в которых нет ни одной дамы (сочетания по шесть из *32*). Получим всего – *1041600* способов.

В первом способе допущена грубая ошибка: некоторые наборы просчитываются по нескольку раз. Например, если сначала выбрана дама пик, а затем дама червей и четыре туза, то это тот же набор, что и набор полученный выбором дамы червей, а затем дамы пик и четырёх тузов. Во втором способе все наборы просчитываются по одному разу. Второй ответ является верным.

Элементы комбинаторики

Задания для самостоятельной работы

Задача №1. У дизайнера имеется 5 различных стульев и 7 рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами он может осуществить обивку стульев, если каждый стул декорируется только одним цветом ткани?

Задача № 2. Первого сентября на I курсе одного из факультетов запланировано по расписанию 4 занятия по разным предметам. Всего на I курсе изучается 11 предметов. Сколько существует способов составить расписание на 1 сентября?

Задача № 3. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было выполнять переводы с любых из 5 языков на любой из этих пяти языков? На сколько больше словарей придется издать, если число языков равно 10?

Задача № 4. Известно, что в комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга).
Сформулируйте вопрос к этому условию, чтобы получилась задача, имеющая своим решением следующую формулу: $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172800$

Задача № 5. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, надо избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе трех человек. Сколькими способами может быть произведен выбор, если а) члены президиума могут войти в состав делегации? б) не могут?

Элементы комбинаторики

Задания на дом: 1) Составить таблицу 2) Придумать задачи

Размещения	Перестановки	Сочетания
Без повторений		
Определение. Размещениями из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов. **Признаки:** n различных элементов k различных мест порядок следования элементов на местах важен. **Описание и формула:** выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов можно $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ способами.	**Определение.** Перестановками называют размещения из n элементов по n мест. n различных предметов, расположенных на n различных местах, можно переставить **Признаки:** n различных элементов n различных мест порядок следования элементов на местах важен. **Описание и формула: …**	**Определение:** **Признаки:** **Описание и формула…**
С повторениями		
…	…	…