КОМБИНАТОРИКА

Выборки

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество из n элементов.

Набор элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$, $r \geq 1$, называется **выборкой объема r из n элементов**, или (n, r)-**выборкой**.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считаются **различными**.

Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется **неупорядоченной**.

В выборках могут допускаться или не допускаться **повторения** элементов.

Правило суммы правило произведения

Правило суммы: если объект A может быть выбран m способами, а объект B – другими n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор "A или B" можно осуществить $m + n$ способами.

Правило произведения: если объект A может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор "A и B" в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

ПРАВИЛО СУММЫ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Основной вопрос заключается в подсчете выборок (комбинаторных объектов) с определенными свойствами

Правило умножения. Если элемент A можно выбрать из некоторого множества m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то пара элементов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $(m \times n)$ способами.

Пример 1. Из пункта A в пункт B ведут 3 дороги, а из пункта B в пункт C – 4 дороги. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B?

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если: а) цифры не повторяются; б) повторение допустимо; в) числа должны быть нечетные и без повторения.

Пример 3. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марки. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Пример 4. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с неё?

Правило сложения. Если элемент А можно выбрать из некоторого множества m способами, а другой элемент В – n способами, причём выборы А и В таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть выбраны одновременно, то выбор какого-либо одного из этих элементов (либо А, либо В) можно осуществить (m+n) способами.

Пример 1. Пусть из города А в город В можно добраться одним авиамаршрутом, двумя железнодорожными маршрутами и тремя автобусными маршрутами. Сколькими способами можно добраться из города А в город В?

Пример 2. В магазине электроники продаются три марки телевизоров и два вида видеомагнитофонов. У покупателя есть возможности приобрести либо телевизор, либо видеомагнитофон. Сколько способами он может совершить одну покупку?

Пример 3. В урне содержится 3 синих, 5 красных и 2 белых шара. Сколькими способами можно вытащить из урны либо два белых шара, либо два цветных шара, из которых один синий, а другой – красный?

Пример 3. Имеется 6 различных конвертов без марок, 4 различные марки и 3 различных конверта с марками. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для отправки письма?

Размещения

Размещением из n элементов по k называется *упорядоченная* (n, k)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.

Перечислим все размещения из элементов множества A по 2:
$1, 2$; $1, 3$; $2, 1$; $2, 3$; $3, 1$; $3, 2$.

Пример. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Для решения этой задачи надо подсчитать число размещений из 5 по 3.

Число размещений A_n^k (читается: число размещений из n элементов по k элементов) можно найти из принципа умножения. Первый элемент размещения можно выбрать n способами. Как только такой выбор будет сделан, останется (n−1) возможностей, чтобы выбрать второй элемент; после этого останется (n–2) возможностей для выбора третьего элемента и т. д.; для выбора k-го элемента будет (n–k+1) возможностей. По принципу умножения находим

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k \text{ множителей}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Легко понять, что $A_n^1 = n$.

Пример 1. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить 4 различных фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Пример 2. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани пяти различных цветов? Решите эту же задачу при условии, что одна полоса должна быть красной.

Пример 3. Сколькими способами 10 человек можно поставить парами в ряд?

Пример 4. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление различных видов деталей (по одному виду на каждого).

Пример 5. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Пример 6. Из 10 книг выбирают 4 для рассылки по разным адресам. Сколькими способами это можно сделать?

Пример 7. Сколькими способами можно опустить 5 писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускают не более одного письма?

Пример 8. Студенту необходимо сдать 5 экзаменов в течение 12 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в течение дня он может сдать не более одного экзамена?

Перестановки

Перестановкой n элементов называется *упорядоченная* (n, n)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все перестановки элементов множества A:
$1, 2, 3$; $1, 3, 2$; $2, 1, 3$; $2, 3, 1$; $3, 1, 2$; $3, 2, 1$.

Пример. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.
Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Для решения этой задачи надо подсчитать число перестановок 8 элементов.

Рассмотрим частный случай, когда $k=n$. Соответствующее этому случаю размещение называется перестановкой.

Перестановками из n элементов называются такие комбинации, каждая из которых содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

Поясним это на следующем примере. Из этих трёх элементов: a, b и c. можно составить шесть перестановок: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Все приведённые перестановки отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок n различных элементов $P_n = A_n^n = n!$

Пример Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

Пример 1. Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани 6 различных цветов и все стулья должны быть разного цвета.

Пример 2. Дачник выделил на своём участке семь грядок для выращивания овощей, т. к. хочет иметь свои помидоры, огурцы, перец, лук, чеснок, салат и кабачки. Каждый вид должен иметь отдельную грядку. Сколькими способами он может расположить грядки для посадки?

Пример 3. Пассажирский поезд состоит из трех багажных вагонов и восьми купированных. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные вагоны должны находиться в его начале?

Пример 4. В первенстве края по футболу участвуют 11 команд. Сколько существует различных способов распределения мест в таблице розыгрыша, если на первое место могут претендовать только 4 определенные

Размещения с повторениями

Размещением с повторениями из n элементов по k называется *упорядоченная* (n, k)-выборка с возможными повторениями элементов.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все размещения с повторениями по 2 из элементов множества A:
$1, 1;\ \ 1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 1;\ \ 2, 2;\ \ 2, 3;\ \ 3, 1;\ \ 3, 2;\ \ 3, 3.$

Пример. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Пример 1. Пусть имеется множество из четырех различных цифр $\{3,5,7,8\}$. Необходимо составить всевозможные трехзначные числа. Каково их количество?

Пример 2. Пятеро студентов сдают экзамен. Каким количеством способов могут быть выставлены оценки, если известно, что никто из студентов не получил неудовлетворительной оценки?

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называется *неупорядоченная* (n, k)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания из элементов множества A по 2:
$1, 2$; $1, 3$; $2, 3$.

Пример. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.
Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Для решения этой задачи нужно подсчитать число сочетаний из 20 по 3.

$$A_n^k = C_n^k P_k$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример 1. Сколькими способами можно составить комиссию в составе из трех человек из имеющихся 9 человек, 4 женщин и 5 мужчин, если: а) не важен пол членов комиссии; б) комиссия должна состоять из двух женщин и одного мужчины.

Пример 2. Сколькими различных правильных дробей можно составить из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, берущихся попарно?

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать 5 делегатов из состава конференции, на которой присутствуют 15 человек?

Пример 4. Компания из 15 человек разделяется на две группы, одна из которых состоит из 6 человек, а другая – из 9 человек. Сколькими способами это можно сделать?

Сочетания с повторениями

Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется *неупорядоченная* (n, k)-выборка с возможными повторениями элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания с повторениями из элементов множества A по 2:
$1, 1$; $1, 2$; $1, 3$; $2, 2$; $2, 3$; $3, 3$.

Пример. На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Для решения этой задачи надо подсчитать число сочетаний с повторениями из 5 по 7.

$$\hat{C}(n,k) = C(n+k-1,k).$$

Пример 1. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Пример 2. Сколькими способами можно представить число 5 в виде суммы 3-х неотрицательных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются различными?

Перестановки с повторениями

Имеется n элементов k различных типов: n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, …, n_k элементов k-го типа, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Сколько можно составить различных перестановок из этих элементов?

Число перестановок с повторениями обозначают $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Сколько же их? Если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы n!. Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. В первой группе элементы (первого типа) можно переставлять друг с другом n_1! способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то перестановки ничего не меняют. Точно также ничего не меняют n_2! перестановок элементов во второй группе и т. д. Перестановки элементов в разных группах можно делать независимо друг от друга. Поэтому (из принципы умножения) элементы можно переставлять друг с другом $n_1!n_2!\ldots n_k!$ способами так, что она остаётся неизменной.

Число различных перестановок с повторениями, которые можно составить из данных элементов, равно

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!},$$ где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Пример 1. Сколькими способами можно нанизать на нить 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бус?

Пример 2. У мамы было 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых груши и 4 одинаковых апельсина. Каждый день она давала ребенку по одному фрукту. Сколькими способами она могла это сделать?

Пример 3. Сколькими способами можно расположить в ряд две зелёные и четыре красные лампочки?

Существует две принципиально различные схемы выбора. В первой схеме выбор осуществляется без возвращения элементов. Это означает, что в выборке невозможны повторения элементов. Во **второй схеме** выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента при каждом шаге. Это означает, что в выборке **возможны повторения**.

После того как выбор тем или иным способом осуществлен, отобранные элементы могут быть либо упорядочены, либо неупорядочены. В первом случае, выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком следования этих элементов, объявляются различными. Во втором случае порядок следования элементов не принимается во внимание, и такие выборки объявляются тождественными.

В результате получаются четыре различные постановки эксперимента по выбору k элементов из общего числа n элементов некоторого множества.

Набор Выбор	Упорядоченный	Неупорядоченный
Без возвращений (без повторений)	Размещения $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Сочетания $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
С возвращением (с повторениями)	Размещения с повторениями $\overline{A}_n^k = n^k$	Сочетания с повторениями $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Набор Выбор	Упорядоченный	Неупорядоченный
Без возвращений (без повторений)	(1,2) (1,3) (2,3) (2,1) (3,1) (3,2)	(1,2) (1,3) (2,3)
С возвращением (с повторениями)	(1,2) (2,1) (1,1) (1,3) (3,1) (2,2) (2,3) (3,2) (3,3)	(1,2) (1,3) (2,3) (1,1) (2,2) (3,3)