

**Нечеткие меры. Методы
построения функций
принадлежности нечетких
переменных множествам.
Классификация функций
принадлежности.**

При проведении экспертиз важным условием успеха является возможность формализовать информацию, не поддающуюся количественному измерению, так, чтобы помочь принимающему решение выбрать из множества действий одно.

Поэтому в вопросах, связанных с теорией измерений, основное место отводится понятию шкалы измерения.

В зависимости от того, по какой шкале идет измерение, экспертные оценки содержат больший или меньший объем информации и обладают различной способностью к математической формализации.

Типы шкал

- **Шкалы наименований или классификации** используются для описания принадлежности объектов к определенным классам. Всем объектам одного и того же класса присваивается одно и то же число, объектам разных классов — разные.
- **Шкала порядка** применяется для измерения упорядочения объектов по единичному или совокупности признаков. Числа в шкале порядка отражают только порядок следования объектов и не дают возможности сказать, на сколько или во сколько один объект предпочтительнее другого.

- Разновидностью *шкалы порядка* является шкала рангов, где используются только числа, идущие подряд от 1 до m вверх по возрастанию.
- К типу *шкал порядка* относится и широко используемая шкала баллов. При этом используются целые числа в ограниченном диапазоне их значений: от 0 до 10 в системе образования, от 0 до 6 или до 10 в спорте и т.д.
- В любом из этих случаев протокол содержит информацию только о трех эмпирических отношениях: " $<$ ", " $>$ " и " $=$ ".

Шкала интервалов

- **Шкала интервалов** применяется для отображения величины различия между свойствами объектов . Шкала может иметь произвольные масштаб и точки отсчета.
- Здесь между протоколами x и y допустимы линейные преобразования: $y=ax+b$, где a — любое положительное число, а b может быть как положительным, так и отрицательным. Это значит, что в разных протоколах может использоваться разный масштаб единиц (a) и разные начала отсчета (b).
- Если записи в протоколе сопровождаются информацией о том, какие именно градусы имеются в виду (например, " 18°C "), то мы имеем дело с протоколом в абсолютной шкале.

Шкала отношений

Шкала отношений используется, например, для измерения массы, длины, веса. В этой шкале числа отражают отношения свойств объектов, т. е. во сколько раз свойство одного объекта превосходит свойство другого.

Инвариантность отношений отражена в названии шкалы данного типа. Если же в протоколе указана единица измерений (напр. веса), то такой протокол отражает свойства тел в абсолютной шкале.

Шкала разностей

Абсолютная шкала

- **Шкала разностей** используется для измерения свойств объектов при необходимости указания, на сколько один объект превосходит другой по одному или нескольким признакам. Является частным случаем шкалы интервалов при выборе единицы масштаба.
- **Абсолютная шкала** — частный случай шкалы интервалов. В ней обозначается нулевая точка отсчета и единичный масштаб. Применяется для измерения количества объектов.

Методы измерений

- **Ранжирование.** При ранжировании эксперт располагает объекты в порядке предпочтения, руководствуясь одним или несколькими показателями сравнения.
- **Парная оценка или метод парных сравнений** представляет собой процедуру установления предпочтений объектов при сравнении всех возможных пар.
- **Непосредственная оценка** представляет собой процедуру приписывания объектам числовых значений по шкале интервалов. Эквивалентным объектам приписывается одно и то же число. Этот метод может быть осуществлен только при полной информированности экспертов о свойствах объектов. Вместо числовой оси может использоваться балльная оценка.
- **Последовательное сравнение** включает в себя ранжирование и непосредственную оценку.

Методы проведения групповой экспертизы

- очные и заочные;
- индивидуальные и коллективные;
- с обратной связью и без обратной связи.

Классификация методов построения функции принадлежности

Для теории нечетких множеств основополагающим понятием является понятие нечеткого множества, которое характеризуется функцией принадлежности.

Существует ряд методов построения по экспертным оценкам функции принадлежности нечеткого множества. Можно выделить две группы методов:
прямые и косвенные методы.

Прямые методы

- Прямые методы определяются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности, характеризующей данное понятие.

Косвенные методы

- В *косвенных методах* значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворять заранее сформулированным условиям.

Экспертная информация является только исходными данными для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки.

Основные методы построения функции принадлежности

- *Прямые методы для одного эксперта*
- *Косвенные методы для одного эксперта*
- *Прямые методы для группы экспертов*
- *Косвенные методы для группы экспертов*

Прямые методы для одного эксперта

Прямые методы для одного эксперта состоят в непосредственном задании функции, позволяющей вычислять значения.

Метод семантических дифференциалов. Практически в любой области можно получить множество шкал оценок, используя следующую процедуру:

- определить список свойств, по которым оценивается понятие (объект);
- найти в этом списке полярные свойства и сформировать полярную шкалу;
- для каждой пары полюсов оценить, в какой степени введенное понятие обладает положительным свойством.

Пример 1

В задаче распознавания лиц можно выделить следующие шкалы:

x_1	Высота лба	Низкий-широкий
x_2	Профиль носа	Горбатый-курносый
x_3	Длина носа	Короткий-длинный
x_4	Разрез глаз	Узкие-широкие
x_5	Цвет глаз	Темные-светлые
x_6	Форма подбородка	Остроконечный- квадратный
x_7	Толщина губ	Тонкие-толстые
x_8	Цвет лица	Смуглое-светлое
x_9	Очертание лица	Овальное-квадратное

Косвенные методы для одного эксперта

- Среди косвенных методов определения функции принадлежности наибольшее распространение получил *метод парных сравнений Саати*.

Сложность использования этого метода заключается в необходимости нахождения собственного вектора матрицы парных сравнений, которая задается с помощью специально предложенной шкалы. Причем эти сложности увеличиваются с ростом размерности универсального множества, на которой задается лингвистический терм.

- Другой метод, предлагаемый для решения задач, базируется на идее распределения степеней принадлежности элементов универсального множества согласно с их рангами. Допускается, что выполняется правило: **чем больший ранг* элемента, тем больше степень принадлежности.**

Косвенные методы для одного эксперта

9 балльная шкала Саати

Числовая оценка (s_{ij})	Качественная оценка (сравнение T_i и T_j)
1	отсутствие преимущества T_i над T_j
3	слабое преимущество T_i над T_j
5	существенное преимущество T_i над T_j
7	явное преимущество T_i над T_j
9	абсолютное преимущество T_i над T_j
2, 4, 6, 8	промежуточные сравнительные оценки

Прямые методы для группы экспертов

Одна из существующих методик оценки функции принадлежности состоит в следующем:

Система должна состоять из классов, представляющих противоположные события. Сумма значений функции принадлежности произвольного элемента к системе таких классов будет равна единице, т.е. в случае двух классов, если функция принадлежности объекта к 1-му классу равна 0,4, то к 2-му – 0,6.

Если число классов и их состав четко не определены, то необходимо вводить условный класс, включающий те классы, которые не выявлены. Далее эксперты оценивают в процентах при данном состоянии степень проявления каждого класса из названного перечня.

Косвенные методы для группы экспертов

- Определение функции принадлежности на основе интервальных оценок.
- Метод Зиммермана
- Метод А.П.Шера
- Метод З.А.Киквидзе

Лингвистическая переменная

Лингвистическая переменная отличается от числовой переменной тем, что ее значениями являются не числа, а слова или предложения в естественном или формальном языке.

Поскольку слова в общем менее точны, чем числа, понятие *лингвистической переменной* дает возможность приблизительно описывать явления, которые настолько сложны, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах.

Важный аспект понятия *лингвистической переменной* состоит в том, что эта переменная более высокого порядка, чем нечеткая переменная, в том смысле, что значениями лингвистической переменной являются нечеткие переменные.

Если x — название нечеткой переменной, то ограничение, обусловленное этим названием, можно интерпретировать как смысл нечеткой переменной x .

Другой важный аспект понятия *лингвистической переменной* состоит в том, что *лингвистической переменной* присущи два правила:

- Синтаксическое, которое может быть задано в форме грамматики, порождающей название значений переменной;
- Семантическое, которое определяет алгоритмическую процедуру для вычисления смысла каждого значения.

Лингвистическая переменная характеризуется набором свойств $(X, T(X), U, G, M)$, в котором:

- X — название переменной;
- $T(X)$ обозначает терм-множество переменной X ,
- G — синтаксическое правило, порождающее названия x значений переменной X ;
- M — семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной x ее смысл $M(x)$, т.е. нечеткое подмножество $M(x)$ универсального множества U .

Конкретное название x , порожденное синтаксическим правилом G , называется термом.

Терм, который состоит из одного слова или из нескольких слов, всегда фигурирующих вместе друг с другом, называется **атомарным** термом.

Терм, который состоит из более чем одного атомарного терма, называется **составным** термом.

Пример 2

Рассмотрим лингвистическую переменную с именем $X =$ "ТЕМПЕРАТУРА В КОМНАТЕ". Тогда оставшуюся четверку (T, U, G, M) , можно определить так:

- универсальное множество $U = [5, 35]$;
- терм-множество $T = \{\text{"ХОЛОДНО"}, \text{"КОМФОРТНО"}, \text{"ЖАРКО"}\}$ с такими функциями принадлежности:

$$\mu''_{\text{холодно}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u-10}{7}\right)^{12}},$$

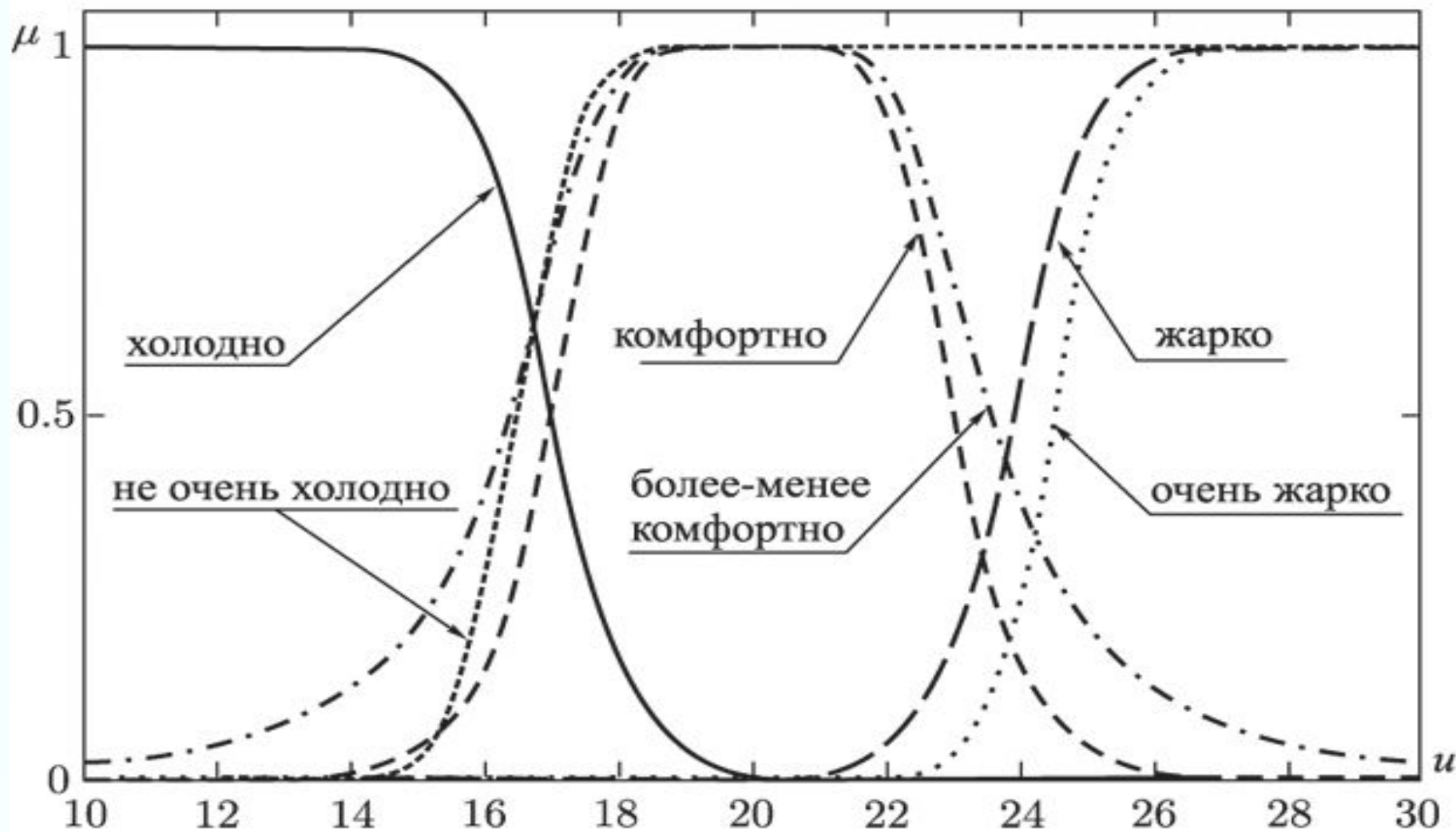
$$\mu''_{\text{комфортно}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u-20}{3}\right)^6},$$

$$\mu''_{\text{жарко}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u-30}{6}\right)^{10}};$$

- синтаксическое правило G, порождающее новые термы с использованием квантификаторов "и", "или", "не", "очень", "более-менее" и других;
- M будет являться процедурой, ставящей каждому новому терму в соответствие нечеткое множество из X по правилам: если термы A и B имели функции принадлежности $\mu(A)$ и $\mu(B)$ соответственно, то новые термы будут иметь некоторые функции принадлежности, задаваемые обычно таблицей, например:

Квантификатор		Функция принадлежности ($u \in U$)
не	t	$1 - \mu_t(u)$
очень	t	$(\mu_t(u))^2$
более-менее	t	$\sqrt{\mu_t(u)}$
и	t	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
A или B		$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
A	B	

Графики функций принадлежности термов "холодно", "не очень холодно" и т.п. к лингвистической переменной "температура в комнате" показаны ниже:



- Если терм-множество состоит лишь из небольшого числа термов, целесообразно просто перечислить элементы терм-множества и установить прямое соответствие между каждым элементом и его смыслом.
- В более общем случае, число элементов может быть бесконечным, и тогда как для порождения элементов множества, так и для вычисления их смысла необходимо применять алгоритм, а не просто процедуру перечисления.

В этом случае лингвистическая переменная называется **структурированной**.

Формализация понятия нечеткого алгоритма

Для описания сложных соотношений между переменными удобно использовать *нечеткие алгоритмы*.

Под алгоритмом понимается точно определенное правило действий (программа), для которого задано указание, как и в какой последовательности это правило необходимо применять к исходным данным задачи, чтобы получить ее решение.

Характеристиками алгоритма являются:

- а) детерминированность
- б) дискретность определяемого алгоритмом процесса
- в) массовость

***Нечеткий алгоритм* определяется упорядоченным множеством *нечетких инструкций* (нечетких высказываний), которые содержат понятия, формализуемые нечеткими множествами.**

Под ***нечеткими инструкциями*** понимаются инструкции, содержащие нечеткое понятие, например, "пройти около 100 метров", а под машинными — инструкции, не содержащие никаких нечетких понятий: "пройти 100 метров".

- Для определения понятия нечеткого алгоритма и нечеткой программы вводятся специальные понятия «инструкция» (инструкция начала, операции, условия, окончания), «W-машина», нечеткая функция и ряд других.
- В общем можно определить нечеткий алгоритм как конечное множество инструкций, применяющих нечеткие понятия и реализуемых на определенной W-машине (т.е. программе)
- **Важно!** Способов реализации нечетких алгоритмов может быть несколько в зависимости от типа нечеткой машины (правил выполнения шагов, инструкций).

Примеры применения *нечетких алгоритмов*.

- Алгоритмы определения сложного нечеткого понятия через более простые понятия, которые легко описать нечеткими множествами; результатом применения таких алгоритмов к некоторому элементу области рассуждений будет степень принадлежности понятию (степень, с которой элемент может характеризоваться понятием);
- Алгоритмы порождения, в результате выполнения которых порождается один из элементов нечеткого множества, которое описывает интересующее нас понятие (например, алгоритм порождения образцов почерка, рецептов приготовления пищи, сочинения музыки, предложений в естественном языке);

- Алгоритмы описания отношений между нечеткими переменными, например, в виде последовательности *нечетких инструкций* типа: «если x мало и x увеличить слегка, то y увеличится слабо».

Такие алгоритмы позволяют приближенно описывать поведение систем, входные и выходные сигналы которых являются нечеткими подмножествами.

● Алгоритмы принятия решения, позволяющие приближенно описывать стратегию или важнейшее правило, например, алгоритм проезда перекрестка, содержащий последовательность действий, которые необходимо выполнить, при этом описания этих действий состоят из нечетких понятий типа: нормальная скорость, несколько секунд, медленно приближаться.

Представление нечеткого алгоритма в виде графа

- Во многих случаях *нечеткий алгоритм* удобно представлять в виде ориентированного графа. Каждой дуге ставят в соответствие инструкцию условия или инструкцию операции.
- Входные, выходные, внутренние переменные в *нечетком алгоритме* представляются нечеткими множествами.
- Выполнение алгоритма эквивалентно поиску в графе путей, связывающих помеченные вершины: начальные и конечные.

Нечеткие алгоритмы обучения

Выделяют следующие группы *нечетких алгоритмов обучения*:

- обучающийся нечеткий автомат,
- обучение на основе условной нечеткой меры,
- адаптивный нечеткий логический регулятор,
- обучение при лингвистическом описании предпочтения.