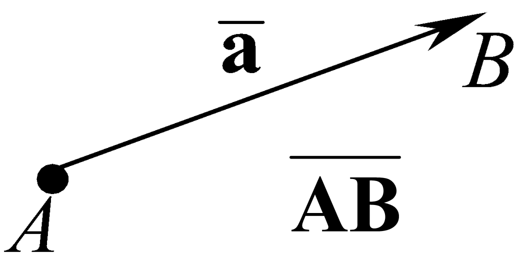
Векторная алгебра

- Разложение вектора по базису
- Системы координат
- Декартова прямоугольная система координат
- Скалярное произведение векторов
- Свойства скалярного произведения
- Векторное произведение
- Смешанное произведение
- Свойства смешанного произведения

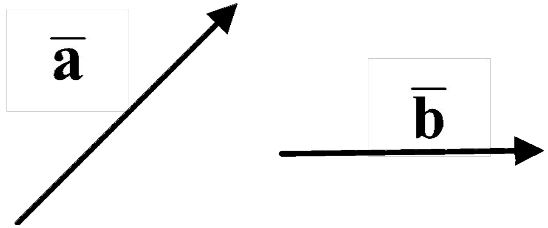
Определение. ***Вектором*** или по-другому ***свободным вектором*** называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).

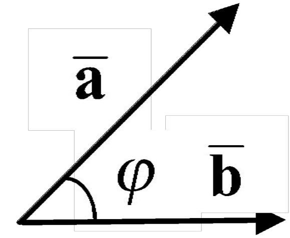


Расстояние от начала вектора до его конца называется ***длиной*** (***модулем***) вектора. $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$ $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** вектором или ***ортом***.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{\mathbf{0}}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.





Под ***углом*** между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ будем понимать угол, величина которого не превышает 180^0.

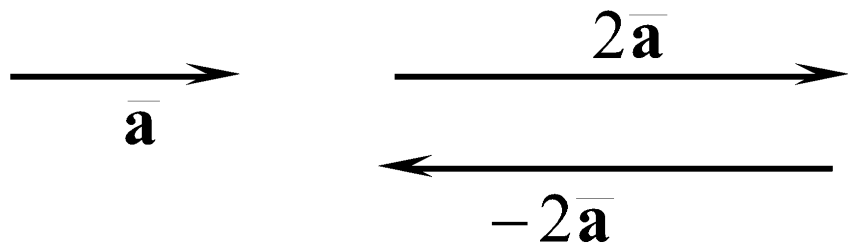
Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются ***ортогональными***, если угол между ними равен 90^0. $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной или параллельных прямых. $\bar{\mathbf{a}} \parallel \bar{\mathbf{b}}$

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

Два вектора называются ***равными***, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Все нулевые векторы считаются равными.

Определение. ***Произведением вектора*** $\bar{\mathbf{a}}$ ***на число*** $\alpha \neq 0$ называется вектор, длина которого $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{\mathbf{a}}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$. Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ или $\alpha = 0$, то их произведение полагают равным $\bar{\mathbf{0}}$.

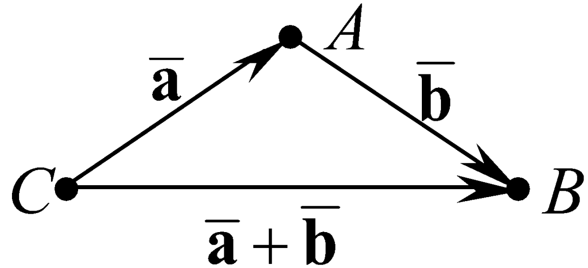


$(-1)\bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}}$ ***противоположный вектору*** $\bar{\mathbf{a}}$

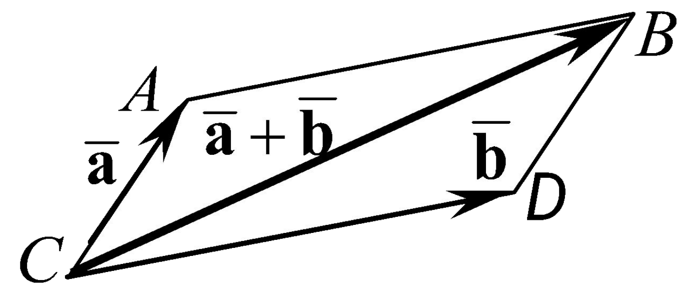
Лемма 2.1 (критерий коллинеарности векторов). Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$, для некоторого числа $\alpha \neq 0$.

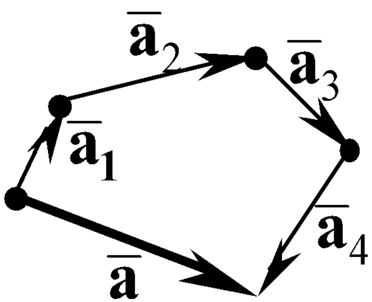
Определение. ***Суммой векторов*** $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называется вектор, соединяющий начало вектора $\overline{\mathbf{a}}$ с концом вектора $\overline{\mathbf{b}}$, отложенного от конца вектора $\overline{\mathbf{a}}$

Правило треугольника



Правило параллелограмма

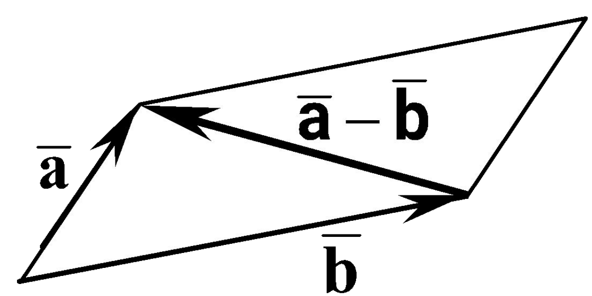




$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2 + \overline{\mathbf{a}}_3 + \overline{\mathbf{a}}_4$$

$$\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{b}}) = \overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}$$

разность векторов



Определение. Пусть даны векторы $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k$. Тогда вектор $\bar{\mathbf{b}} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k$ называют ***линейной комбинацией*** векторов $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k$. При этом говорят, что вектор $\bar{\mathbf{b}}$ ***линейно выражается*** через вектора $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k$, или другими словами ***разложен по векторам*** $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k$.

Лемма 2.2 (критерий компланарности векторов). Три ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другие (например, $\bar{\mathbf{c}} = \lambda_1 \bar{\mathbf{a}} + \lambda_2 \bar{\mathbf{b}}$).

Свойства линейных операций над векторами

1. $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}}$
2. $(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})$
3. $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{a}}$
4. $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{0}}$
5. $\alpha(\beta\,\overline{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\overline{\mathbf{a}}$
6. $(\alpha + \beta)\overline{\mathbf{a}} = \alpha\,\overline{\mathbf{a}} + \beta\,\overline{\mathbf{a}}$
7. $\alpha(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) = \alpha\,\overline{\mathbf{a}} + \alpha\,\overline{\mathbf{b}}$
8. $1\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}$

Определение. Говорят, что векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\ldots$, $\overline{a}_k$ ***линейно зависимы***, если существуют числа α_1, α_2, $\ldots$, α_k, не равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \cdot \overline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \overline{a}_k = 0$.

Если же равенство $\alpha_1 \cdot \overline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \overline{a}_k = 0$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\ldots$, $\overline{a}_k$ называют ***линейно независимыми***.

Лемма 3.1. Векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\ldots$, $\overline{a}_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.

Лемма 3.2 *(критерий линейной зависимости двух векторов).* Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Лемма 3.3 *(критерий линейной зависимости трёх векторов).* Три ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Определение. ***Базисом*** некоторой системы векторов называется любая максимальная линейно независимая подсистема этой системы векторов.

Иначе говоря $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ – базис, если

1) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ – линейно независимы;

2) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n, \bar{\mathbf{a}}$ – линейно зависимы для любого вектора $\bar{\mathbf{a}}$ из данной системы векторов.

Базис можно выбрать не единственным образом.

Например, если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ – базис, то при $\alpha \neq 0$ $\alpha\bar{e}_1, \alpha\bar{e}_2, \ldots, \alpha\bar{e}_n$ – также базис.

Теорема 3.4. Любые два базиса данной системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

Теорема 3.5. 1) Базисом на плоскости являются любые два неколлинеарных вектора.

2) Базисом в пространстве являются любые три некомпланарных вектора.

Теорема 3.6 *(о базисе)*. Каждый вектор линейно выражается через базис, причем единственным образом.

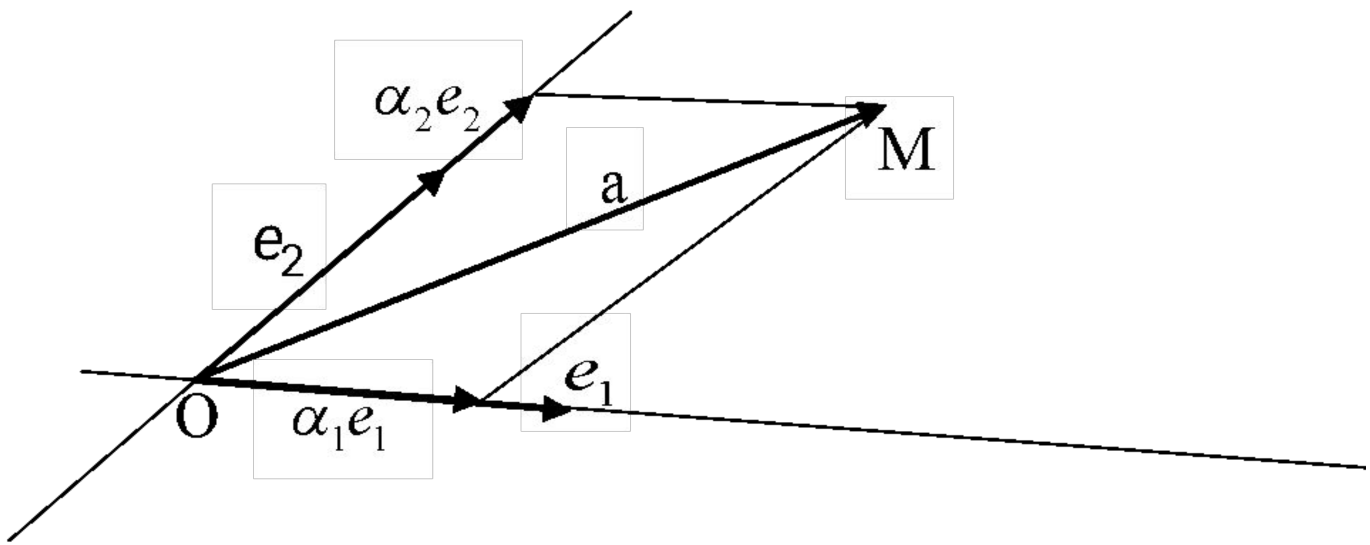
$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – базис, $\bar{\mathbf{a}}$ – произвольный вектор $\Rightarrow$

$$\bar{a} = \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n$$

При этом $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называют ***координатами*** вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$

Зафиксируем произвольную точку О в пространстве и выберем некоторый базис.

Совокупность этой точки и этого базиса называется ***системой координат.***



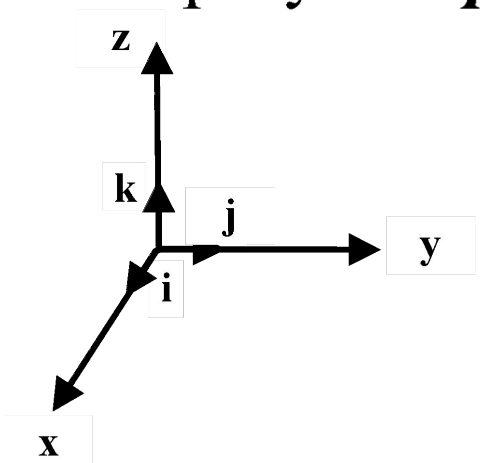
$$\bar{\mathbf{a}} = \overline{OM} = \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2$$

α_1 и α_2 – координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в этом базисе

Также говорят, что α_1 и α_2 – ***координаты точки*** М.

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называют систему координат, базисом в которой являются единичные векторы, попарно ортогональные друг с другом.

Правая система координат, в которой векторы базиса образуют ***правую тройку***, обозначают $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:



Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ – произвольный вектор.

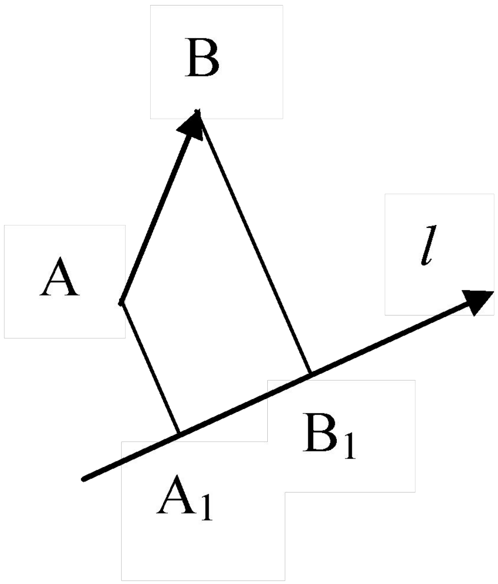
Тогда $\bar{\mathbf{a}} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$

или $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$

Замечание. Иногда в качестве базиса берут ***левую тройку*** векторов ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$). Тогда такую систему координат называют ***левой***.

Пусть в пространстве задана ось l, то есть направленная прямая, $\overline{\mathbf{AB}}$ – произвольный вектор.

Обозначим через $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_1}$ – проекции на ось l точек **A** и **B** соответственно.



Проекцией вектора $\overline{\mathbf{AB}}$ ***на ось*** l называется положительное число $\left|\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}\right|$, если вектор $\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}$ и ось l одинаково направлены, и отрицательное число $-\left|\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}\right|$, если вектор $\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}$ и ось l противоположно направлены.

Если точки $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_1}$ совпадают, то проекция вектора $\overline{\mathbf{AB}}$ равна 0.

$$\text{пр}_l\,\overline{\mathbf{AB}}$$

Свойства проекций:

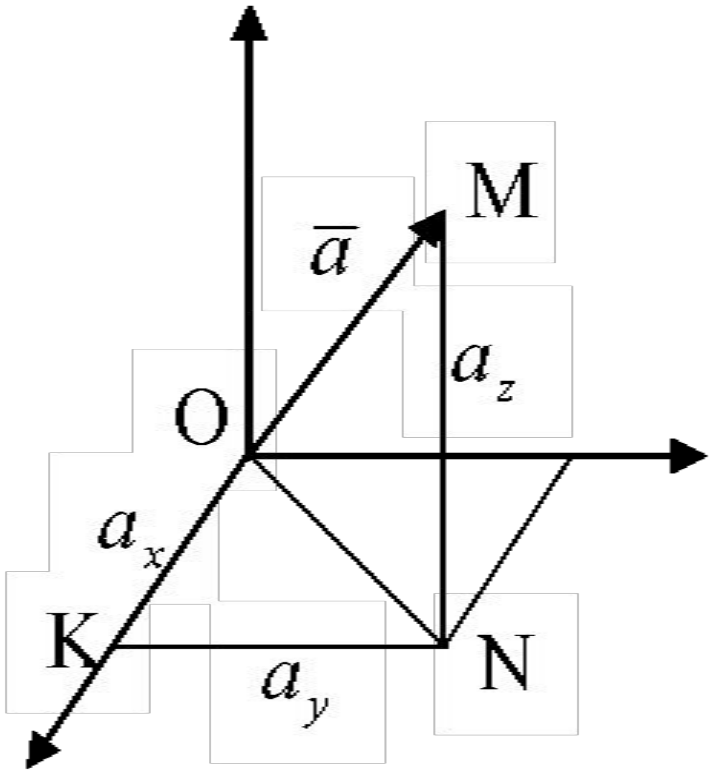
1. Проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось l равна произведению длины вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на косинус угла φ между вектором и осью: $\text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = \left| \bar{\mathbf{a}} \right| \cdot \cos\varphi$.
2. Проекция суммы нескольких векторов на ось l равна сумме их проекций на эту ось.
3. При умножении вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число λ его проекция на ось l также умножается на это число: $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}$.

$\bar{\mathbf{a}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$

координата a_x – это проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Ox

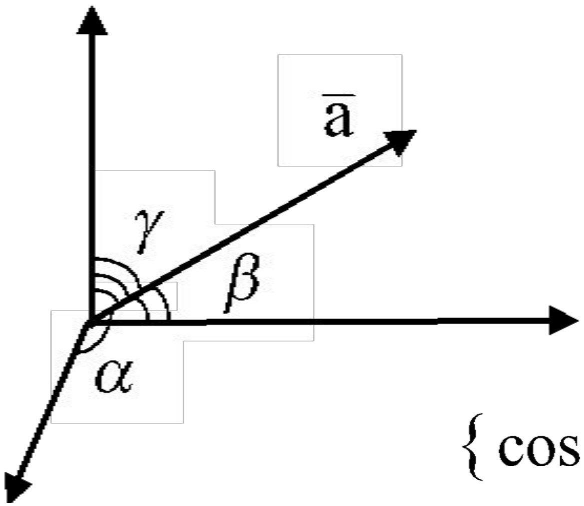
координата a_y – проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Oy

координата a_z – проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Oz.



$$|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

$\bar{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$ Рассмотрим вектор $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$.



По свойству 1 проекций

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\bar{\mathbf{a}} = |\bar{a}|\cdot\cos\alpha,$$

$$a_y = \text{пр}_{Oy}\bar{\mathbf{a}} = |\bar{a}|\cdot\cos\beta,$$

$$a_z = \text{пр}_{Oz}\bar{\mathbf{a}} = |\bar{a}|\cdot\cos\gamma \quad \Rightarrow$$

$$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}=\frac{a_x}{|\bar{a}|}\,\mathbf{i}+\frac{a_y}{|\bar{a}|}\,\mathbf{j}+\frac{a_z}{|\bar{a}|}\,\mathbf{k}=\frac{1}{|\bar{a}|}\,\bar{\mathbf{a}},$$

то есть вектор $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ – единичный и направлен также, как и $\bar{\mathbf{a}}$. Этот вектор называют ***ортом вектора*** $\bar{\mathbf{a}}$.

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – ***направляющие косинусы*** вектора $\bar{\mathbf{a}}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ – ***свойство*** направляющих косинусов.

Пусть $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x, b_y, b_z\}$.

$$\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}} = (a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k})+(b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k}) =$$
$$= (a_x+b_x)\mathbf{i}+(a_y+b_y)\mathbf{j}+(a_z+b_z)\mathbf{k} =$$
$$= \{a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z\}$$

$$\alpha\cdot\overline{\mathbf{a}} = \alpha\cdot(a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}) =$$
$$= (\alpha\cdot a_x)\mathbf{i}+(\alpha\cdot a_y)\mathbf{j}+(\alpha\cdot a_z)\mathbf{k} =$$
$$= \{\alpha\cdot a_x,\ \alpha\cdot a_y,\ \alpha\cdot a_z\}$$

Теорема 4.1. Если $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x, b_y, b_z\}$, то

1) $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}} = \{a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z\}$,

2) $\alpha\cdot\overline{\mathbf{a}} = \{\alpha\cdot a_x,\ \alpha\cdot a_y,\ \alpha\cdot a_z\}$.

Лемма 4.2 *(критерий коллинеарности векторов в координатной форме)***.** Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Пример

$\bar{\mathbf{a}}=\{2, 4, 0\}$ $\quad 2=\alpha\cdot 1$

$\bar{\mathbf{b}}=\{1, 2, 0\}$ $\quad 4=\alpha\cdot 2$

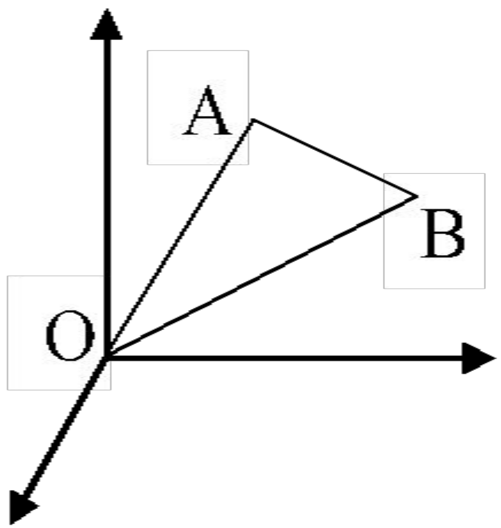
$0=\alpha\cdot 0$

$\Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow$ векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны

$$a_x=\alpha\cdot b_x,\ \ a_y=\alpha\cdot b_x,\ \ a_z=\alpha\cdot b_x \ \Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{a_x}{b_x},\ \ \alpha=\frac{a_y}{b_y},\ \ \alpha=\frac{a_z}{b_z} \ \Rightarrow \qquad \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

A (x_1, y_1, z_1), **B** (x_2, y_2, z_2). Найдем координаты $\overline{\mathbf{AB}}$.



Вектор $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{OB}} - \overline{\mathbf{OA}}$.

Так как $\overline{\mathbf{OB}} = \{x_2, y_2, z_2\}$,

$\overline{\mathbf{OA}} = \{x_1, y_1, z_1\}$,

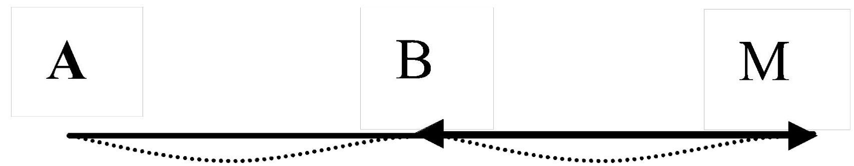
то $\overline{\mathbf{AB}} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Лемма 4.3. Если **A** имеет координаты (x_1, y_1, z_1), точка **B** – координаты (x_2, y_2, z_2), то вектор $\overline{\mathbf{AB}}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$.

Разделим отрезок **AB** в отношении λ, то есть на прямой, проходящей через точки **A** и **B,** найдём такую точку **M**, что $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

1) $\lambda = 1/2, \quad \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{MB}$.

2) $\lambda = -2, \quad \overline{AM} = -2\overline{MB}$.



3) $\lambda = -1$, то есть $\overline{AM} = -\overline{MB}$ – невозможно

$\lambda > 0 \;\Rightarrow\; \overline{AM}$ и $\overline{MB}$ одинаково направлены

$\Rightarrow$ точка **M** лежит внутри отрезка **AB**

$\lambda < 0 \;\Rightarrow\; \overline{AM}$ и $\overline{MB}$ противоположно направлены

$\Rightarrow$ точка **M** лежит вне отрезка **AB**

Пусть **A** (x_1, y_1, z_1), **B** (x_2, y_2, z_2).

Обозначим координаты точки **M** (x, y, z).

Тогда $\overline{AM} = \{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, $\overline{MB} = \{x_2-x, y_2-y, z_2-z\}$.

Так как $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$, то

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda (y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda (z_2 - z).$$

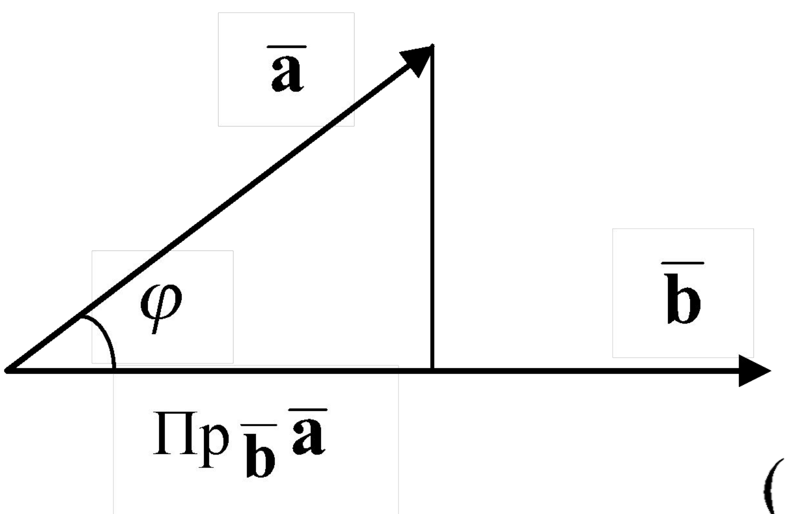
Откуда получаем, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Определение. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Записывают $\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}}$ или $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi$$

Если один из двух векторов является нулевым, их скалярное произведение считается равным нулю.



$$\text{пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\overline{\mathbf{a}} = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow$$
$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \text{пр}_{\overline{\mathbf{a}}}\overline{\mathbf{b}}$$

$$\text{пр}_{\overline{\mathbf{a}}}\overline{\mathbf{b}} = |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow$$
$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot \text{пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\overline{\mathbf{a}}$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot \text{пр}_{\overline{\mathbf{a}}}\overline{\mathbf{b}} = |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \text{пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\overline{\mathbf{a}}$$

Свойства скалярного произведения

1. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$

2. $(\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}) = \lambda (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$

3. $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$

4. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) = |\bar{\mathbf{a}}|^2$

Лемма 5.1 *(критерий ортогональности векторов).* Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Лемма 5.2. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(\overline{\mathbf{a}},\ \overline{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Найдем угол между $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\overline{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$.

Имеем $(\overline{\mathbf{a}},\ \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi$, следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})}{|\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$$

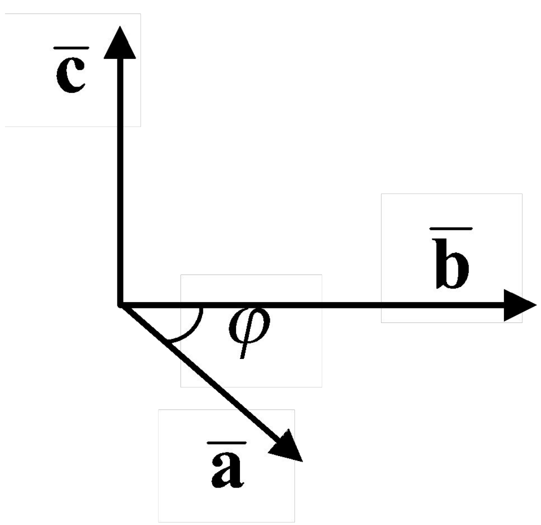
Определение. ***Векторным произведением*** двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$, для которого выполняются следующие условия:

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$,

2) $\bar{\mathbf{c}}$ ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$,

3) $\bar{\mathbf{c}}$ направлен так, что тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ – правая, то есть ориентирована одинаково с базисной тройкой $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$$



Если хотя бы один из векторов нулевой, то полагают, что векторное произведение равно нулевому вектору.

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k} \qquad [\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$$

$$[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i} \qquad [\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}$$

$$[\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j} \qquad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$$

Свойства векторного произведения

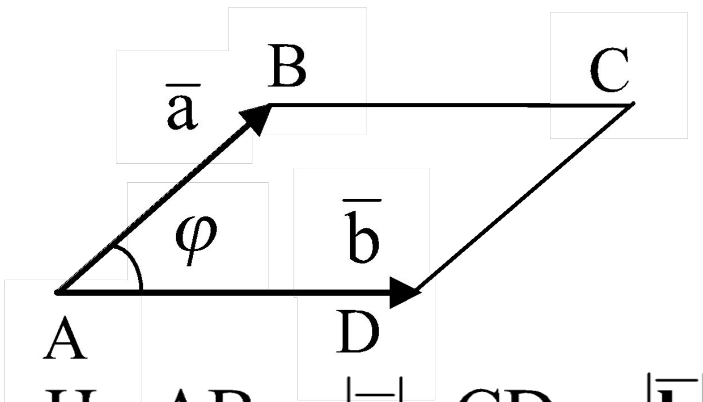
1. $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = -[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}]$
2. $[\alpha\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = [\overline{\mathbf{a}}, \alpha\overline{\mathbf{b}}] = \alpha[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$
3. $[\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}] = [\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}] + [\overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}]$
4. $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}] = \overline{0}$

Лемма 6.1. Векторное произведение двух ненулевых векторов есть нулевой вектор тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.

$$[\,\bar{\mathbf{a}}\,,\bar{\mathbf{b}}\,] = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$[\,\bar{\mathbf{a}}\,,\bar{\mathbf{b}}\,] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Лемма 6.2. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – неколлинеарные вектора. Тогда площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна модулю векторного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$: $S = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|$.



Пусть ABCD – параллелограмм, где $\overline{AB} = \bar{\mathbf{a}}$, $\overline{AD} = \bar{\mathbf{b}}$.

$$S = AB \cdot AD \cdot \sin\varphi$$

Но $AB = |\bar{\mathbf{a}}|$, $CD = |\bar{\mathbf{b}}| \Rightarrow S = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$.

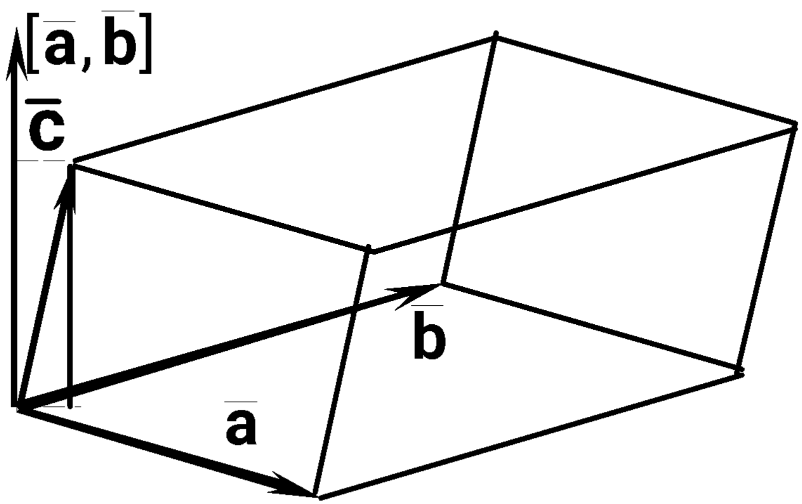
Следствие 6.3. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – неколлинеарные вектора. Тогда площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна половине модуля векторного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$: $S = \frac{1}{2} \cdot |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|$.

Определение. ***Смешанным произведением*** трёх векторов $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ умножаем скалярно на $\overline{\mathbf{c}}$:

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}}).$$

Лемма 7.1. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – некомпланарные вектора. Тогда объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен модулю смешанного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$:

$$V = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$



$$V = S_{осн} \cdot H$$

Основание параллелепипеда – параллелограмм, построенный на векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$.

По лемме 6.2 $S_{осн} = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|$.

Высота параллелепипеда $H = |\text{Пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}}|$.

$$V = S_{осн} \cdot H = \left| |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]| \cdot \text{Пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}} \right| = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|$$

Следствие 7.2. Пусть $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ – некомпланарные вектора. Тогда объём пирамиды, построенной на этих векторах, равен одной шестой модуля смешанного произведения векторов $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6} \cdot \left| (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) \right|.$$

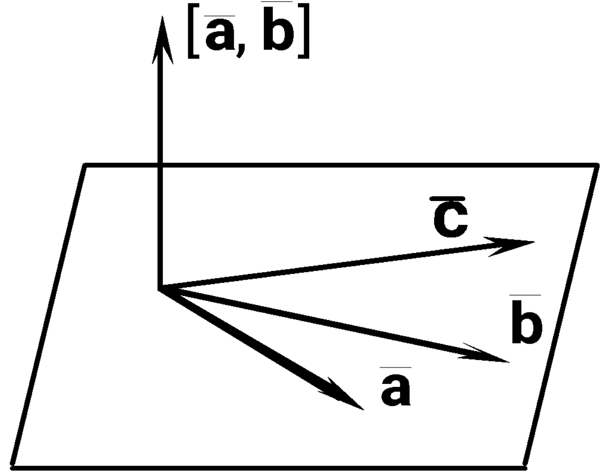
Свойства смешанного произведения

1. $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = -([\bar{b},\bar{a}],\bar{c})$

2. $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = ([\bar{b},\bar{c}],\bar{a}) = ([\bar{c},\bar{a}],\bar{b})$

3. $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = (\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$

Лемма 7.3 *(критерий компланарности векторов через смешанное произведение)*. Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.



Пусть $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x, b_y, b_z\}$, $\overline{\mathbf{c}}=\{c_x, c_y, c_z\}$.

$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}})=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$