# ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

## Електронний курс лекцій

Укладач: Данилов А.Б.

# Лекція *15*

## Теорема Гаусса

## та її застосування.

Всі науки можна класифікувати на дві групи:

1. Фізика.
2. *Колекціонування марок.*

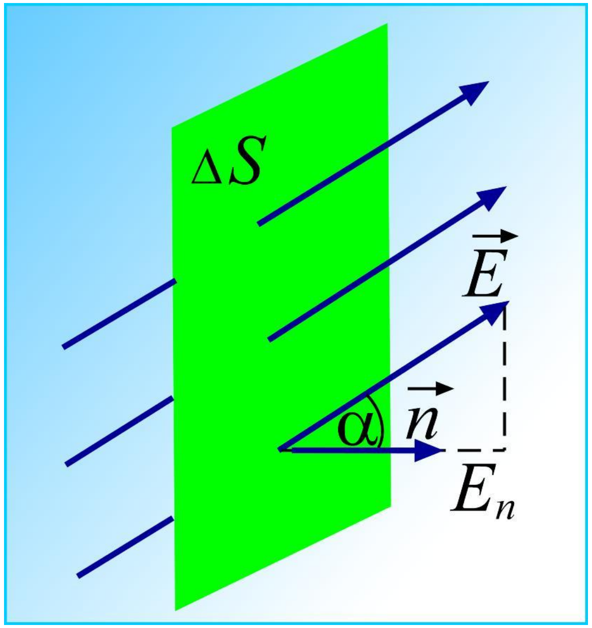
*Ернест Резерфорд*

# План лекції

- Потік вектора напруженості електричного поля.
- Теорема Остроградського-Гаусса.
- Застосування теореми Остроградського-Гаусса до розрахунку електричних полів.
- Теорема Гаусса у диференціальній формі.
- Робота сил електростатичного поля.

**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

***Потік вектора*** $\vec{E}$




***Потік вектора E*** крізь площадку ΔS

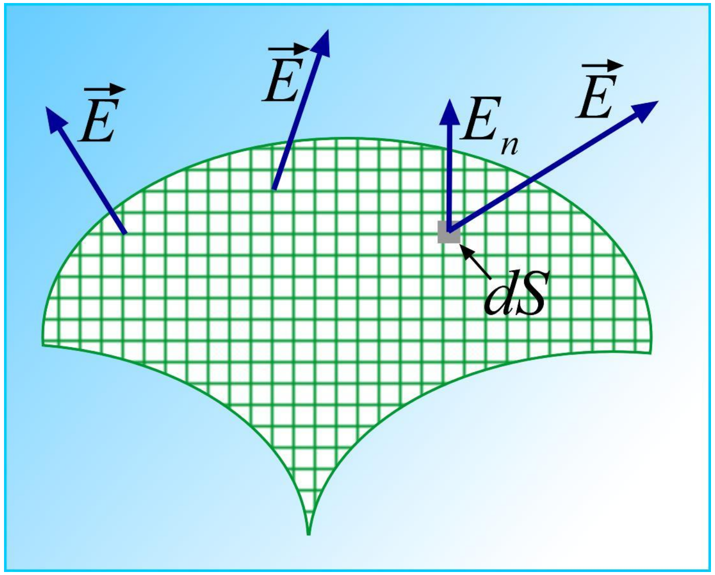
$$\boxed{\Delta\Phi_E = E\Delta S\cos\alpha = E_n\,\Delta S}$$

**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

# *Потік вектора E*

**Елементарний електричний потік**

$$\boxed{d\Phi_E = E_n dS}$$




**Повний потік крізь поверхню *S***

$$\boxed{\Phi_E = \int_S E_n dS}$$

**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

## *Теорема Гаусса*

***Гаусс Карл Фрідріх,***
***(1777-1855)***

*Німецький математик і фізик. Роботи з алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії і теорії чисел, електрики і магнетизму, астрономії.*

**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

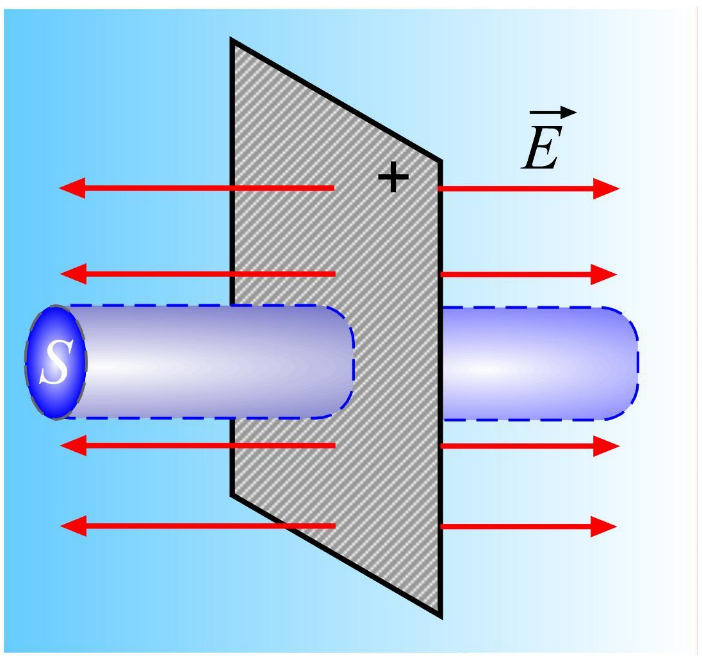
***Теорема Гаусса***

***Потік вектора напруженості*** $\Phi_E$ ***електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню S зсередини назовні дорівнює алгебричній сумі тих точкових зарядів*** $q_i$***, які охоплюються поверхнею S, поділеній на електричну сталу*** $\varepsilon_0$***.***

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i}$$

## Приклади розрахунку полів за Гауссом

# *Напруженість поля нескінченної площини*

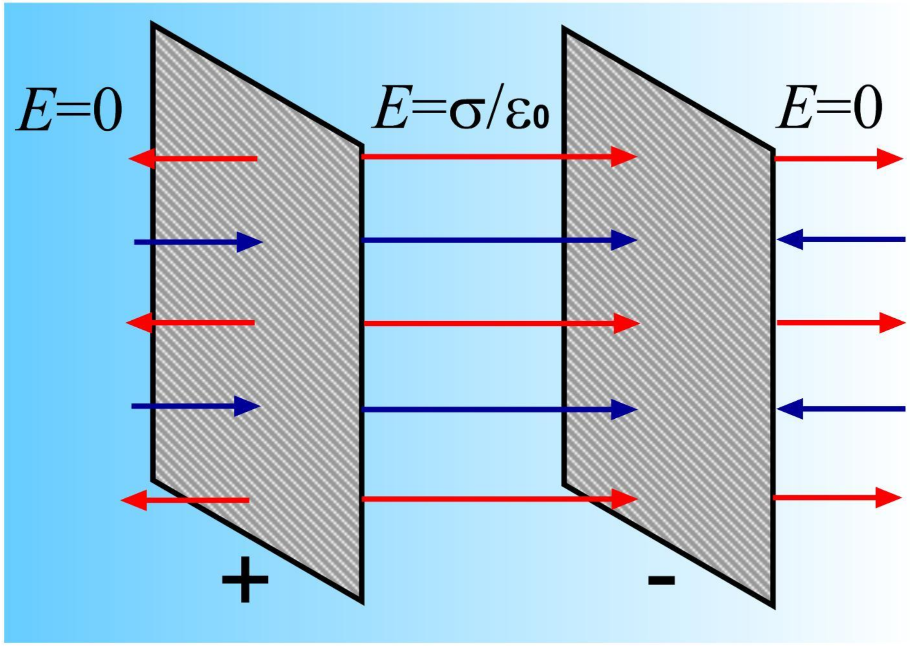



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

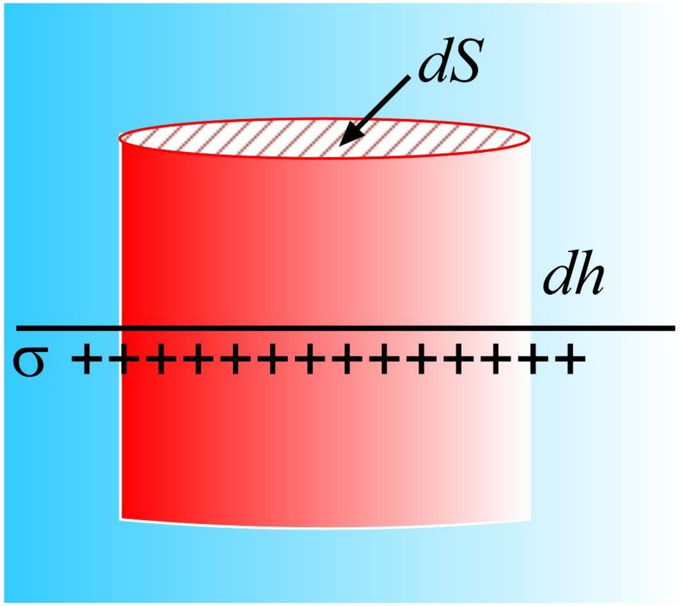
Приклади розрахунку полів за Гауссом

# Напруженість поля двох різнойменно заряджених площин



**Приклади розрахунку полів за Гауссом**

# *Напруженість поля поблизу поверхні зарядженого провідника*

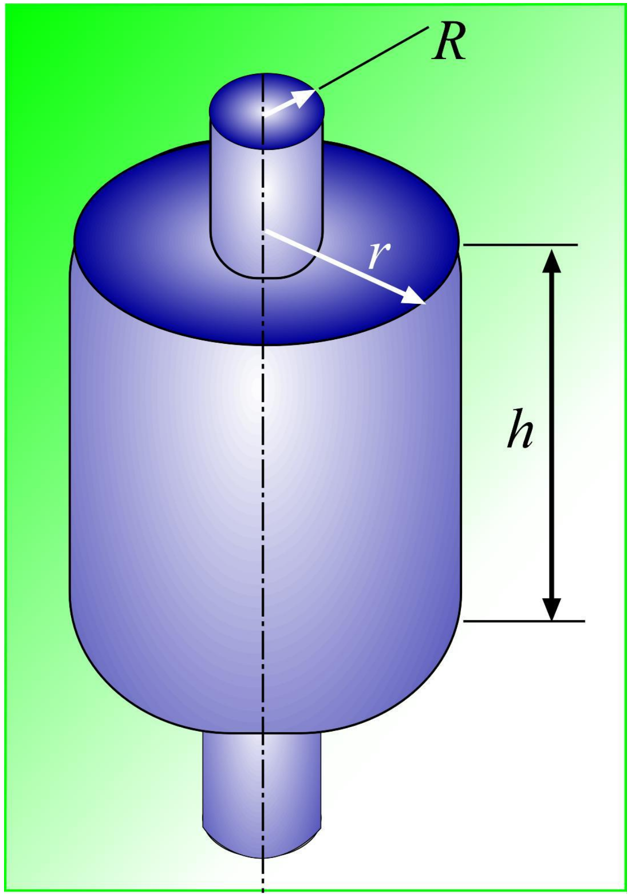



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

***Приклади розрахунку полів за Гауссом***

## *Напруженість поля нескінченної зарядженої нитки, довгого циліндра*




Провідний циліндр радіуса $R$, по якому заряд розподілено рівномірно з лінійної густиною τ

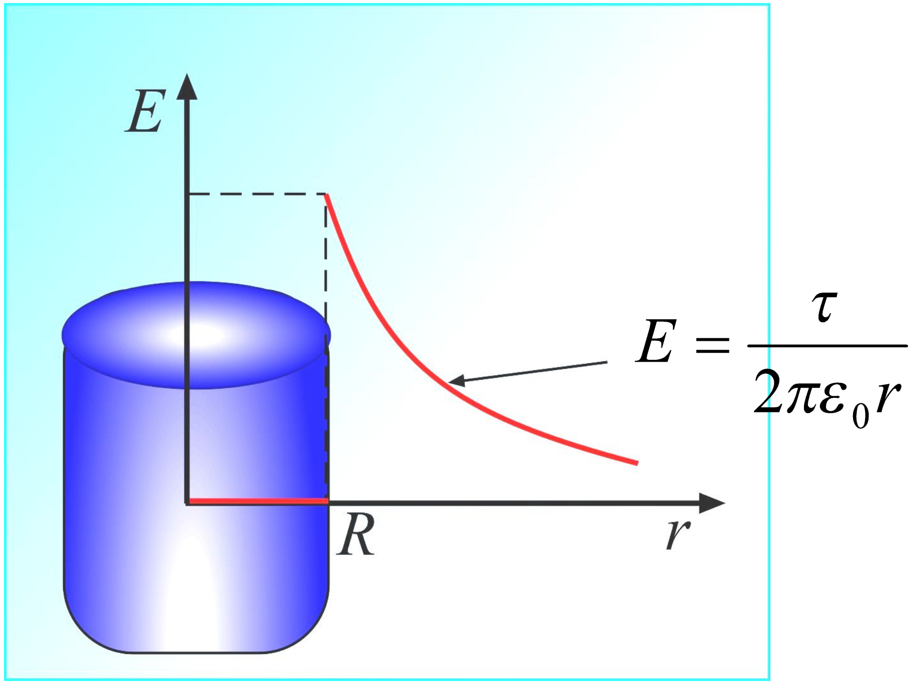
Ззовні
$$\boxed{E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

Всередині
$$\boxed{E = 0}$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

**Приклади розрахунку полів за Гауссом**

# *Напруженість поля нескінченної зарядженої нитки, довгого циліндра*



Лекція 15
Теорема Гаусса

**Приклади розрахунку полів за Гауссом**

## *Напруженість поля нескінченного довгого діелектричного циліндра*

Непровідний циліндр радіуса $R$, в якому заряд розподілено рівномірно з об'ємною густиною ρ

**Ззовні циліндра**

$$\Phi_E = ES_б = E2\pi\, r\, h = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho V_{непров.ц.} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi R^2 h$$

$$\boxed{E = \frac{\rho\pi\, R^2 h}{2\pi r h\, \varepsilon_0} = \frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_0 r}}$$

**Всередині циліндра**

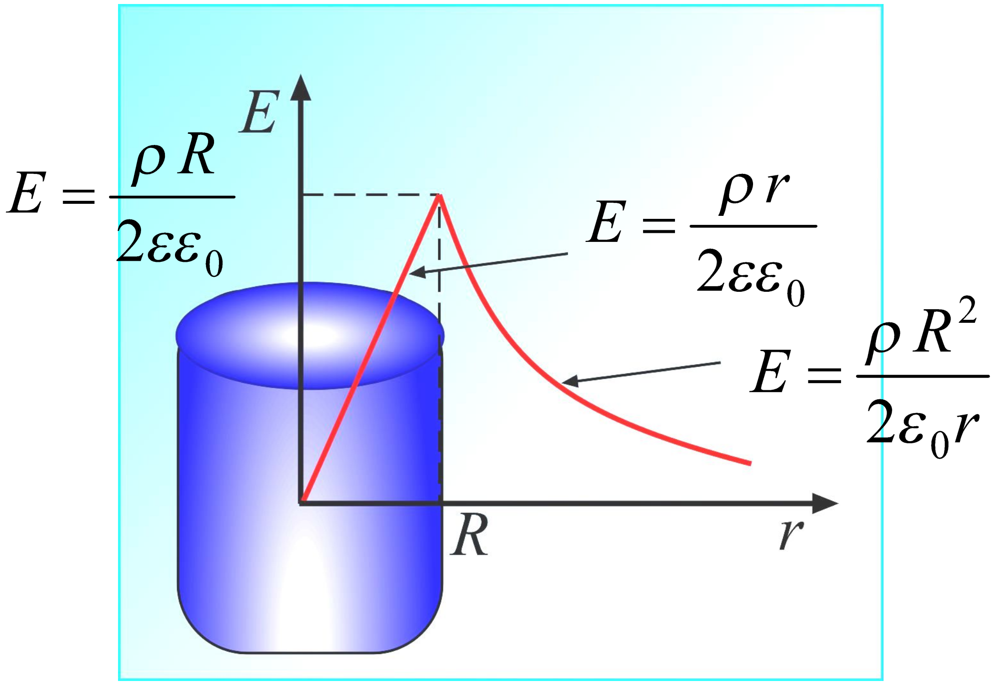
$$\Phi_E = ES_б = E2\pi rh = \frac{\rho V_{доп.ц.}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi\, r^2 h}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon\varepsilon_0}}$$

**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

**Приклади розрахунку полів за Гауссом**

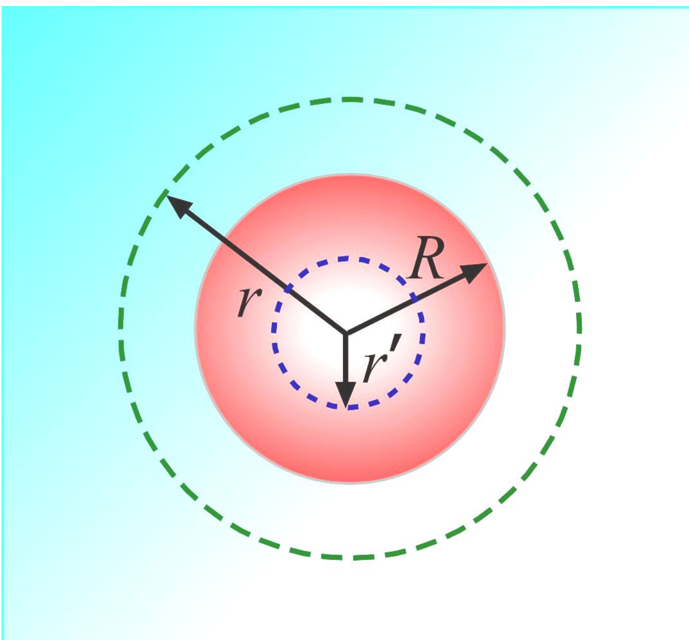
## *Напруженість поля нескінченного довгого діелектричного циліндра*



Лекція 15
Теорема Гаусса

Приклади розрахунку полів за Гауссом

## *Напруженість поля рівномірно зарядженої сфери*




**Провідна сфера:**

Ззовні

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

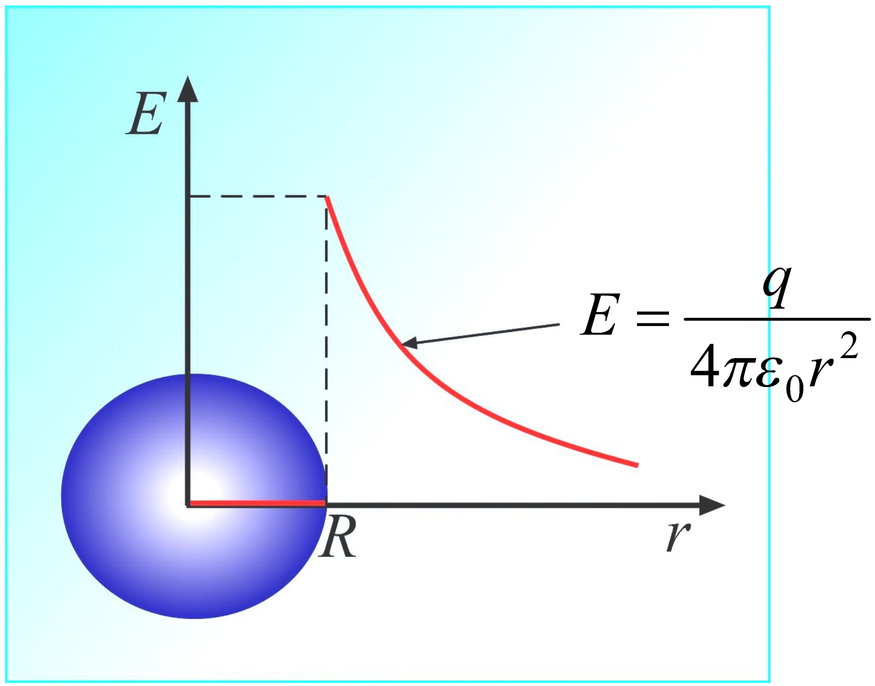
Всередині

$$\boxed{E = 0}$$

Лекція 15
Теорема Гаусса

**Приклади розрахунку полів за Гауссом**

## *Напруженість поля рівномірно зарядженої сфери*



Лекція 15
Теорема Гаусса

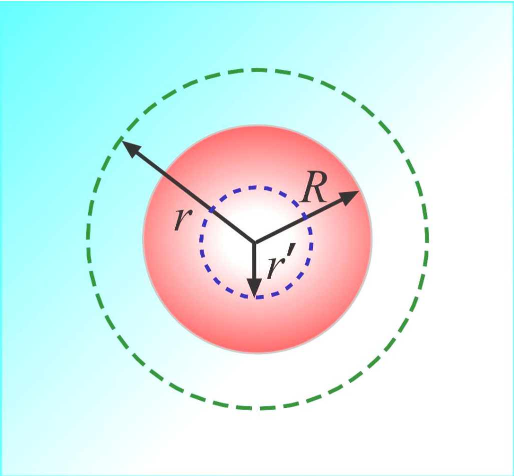
**Приклади розрахунку полів за Гауссом**

## *Напруженість поля* ***непровідної кулі***

Ззовні кулі

$$\Phi_E = E\,S = E\,4\pi\,r^2 \;=\frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\,4\pi\,R^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\rho\,4\pi\,R^3}{4\pi r^2\,3\,\varepsilon_0} = \frac{\rho\,R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$



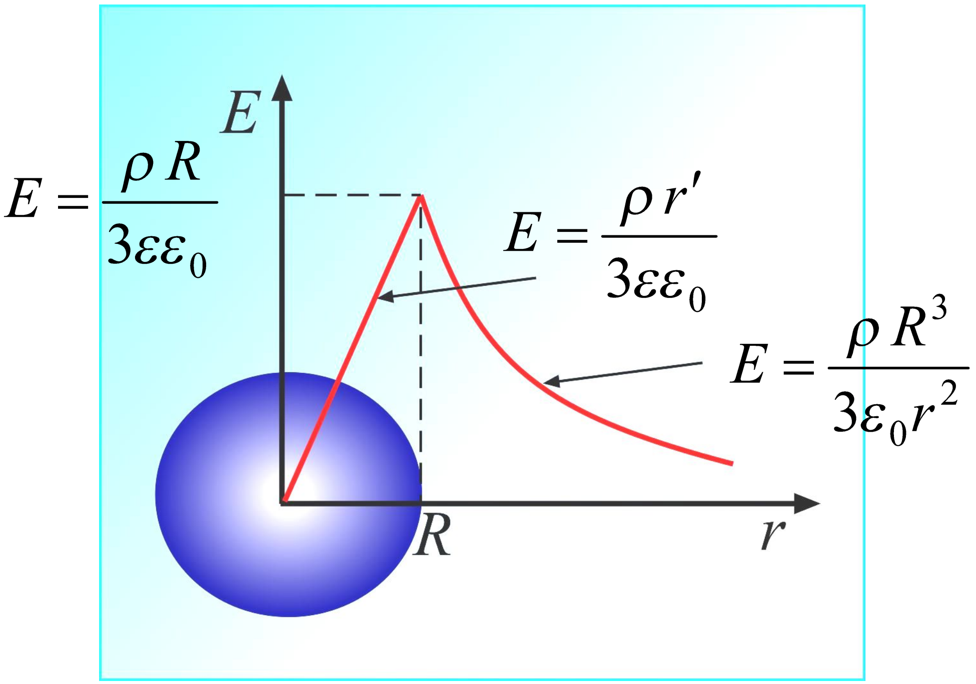

Всередині кулі

$$\Phi_E = ES = E\,4\pi\,r'^2 \;=\frac{q'}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho\,4\pi\,r'^3}{3\,\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E \;= \frac{4\pi\rho\,r'^3}{4\pi\,r'^2\,3\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho\,r'}{3\varepsilon\varepsilon_0}}$$

**Приклади розрахунку полів за Гауссом**

# *Напруженість поля* **непровідної кулі**



**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

***Поняття дивергенції***

***Дивергенцією*** деякого векторного поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ називається границя відношення

$$div\,\boldsymbol{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S A_n dS}{V}$$

У декартовій системі координат

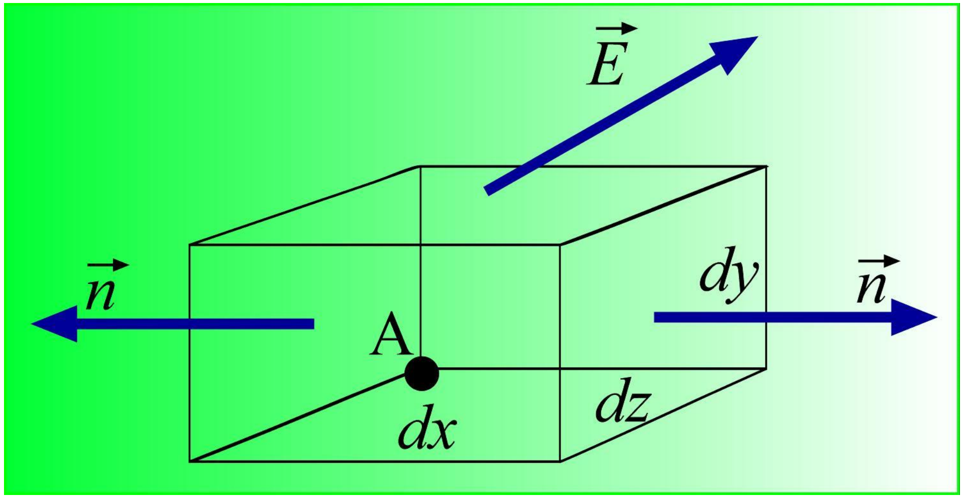
$$div\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$div\,\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\nabla A})$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

## Теорема Гаусса в диференціальній формі




$$\oint_S E_n dS = \int_V div\,\boldsymbol{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV$$

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

- Дивергенція фізично характеризує потужність джерел або стоків.
- Заряди є джерелами (додатний) і стоками (від'ємний) електричного поля.

**Лекція 15**
**Теорема Гаусса**

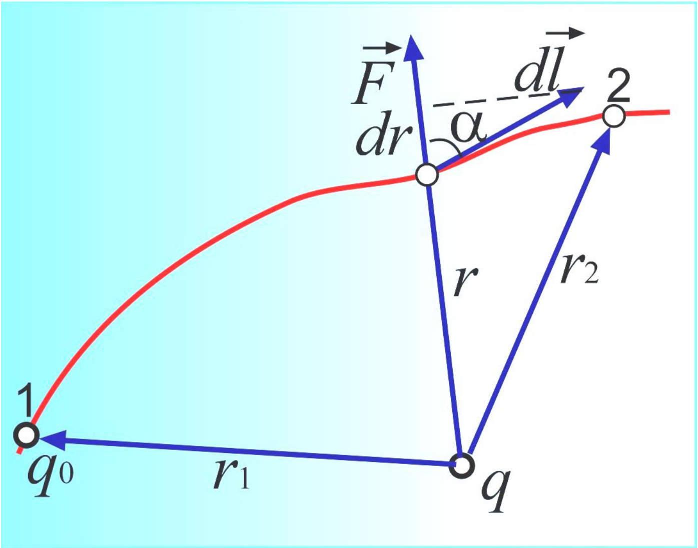
***Робота сил електростатичного поля***

•Елементарна робота сил електростатичного поля

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{l}\right) = F dl \cos\alpha = q_0 E\, dl \cos\alpha$$

•Для поля точкового заряду

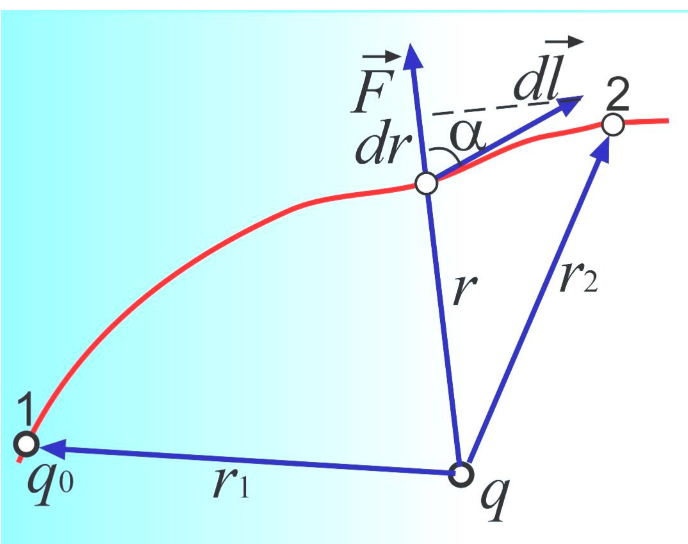
$$dA = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$



# *Робота сил електростатичного поля*

Робота сил електростатичного поля точкового заряду при переміщенні в цьому полі пробного заряду з точки 1 в точку 2**:**

$$A_{1-2} = \int\limits_{(1)}^{(2)} dA = q_0 \int\limits_{(1)}^{(2)} (\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$




Робота додатна, якщо:

- однойменні заряди віддаляються;
- різнойменні заряди наближаються.

Робота від'ємна, якщо:

- різнойменні заряди віддаляються;
- однойменні заряди наближаються.

**Лекція 3**
**Потенціал електростатичного поля**

***Робота сил електростатичного поля***

Робота електростатичного поля не залежить від форми шляху переміщення заряду від точки 1 до точки 2, а визначається лише положенням початкової і кінцевої точки.

Силові поля, що задовольняють таку умову, називаються ***потенціальними***, *або* ***консервативними***

# Дякую за