Исследование функций

и построение графиков

Исследование функций

- Теорема Ферма.

Теорема Ролля.

Теорема Лагранжа.

Исследование функций

- **Теорема Ферма.**
- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:

Теорема Ролля.

Теорема Лагранжа.

Исследование функций

- **Теорема Ферма.**
- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а**) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

Теорема Ролля.

Теорема Лагранжа.

Исследование функций

- **Теорема Ферма.**
- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а**) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

Теорема Ролля.

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

Теорема Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

Исследование функций

- **Теорема Ферма.**
- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а**) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

Теорема Ролля.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

Теорема Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

Исследование функций

- **Теорема Ферма.**
- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а)** непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

Теорема Ролля.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

в) в концах отрезка принимает

одинаковые значения
$f(a) = f(b)$

Теорема Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

Исследование функций

- **Теорема Ферма.**
- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а)** непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

Теорема Ролля.

Пусть функция $y = f(x)$

удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***

б) имеет производную $f'(x)$

во всех внутренних точках ***(a,b);***

в) в концах отрезка принимает

одинаковые значения

$f(a) = f(b)$

Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

хотя бы в одной внутренней

точке ***c є (a,b).***

Теорема Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$

удовлетворяет условиям:

Исследование функций

Теорема Ферма.

- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а**) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

Теорема Ролля.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

в) в концах отрезка принимает
одинаковые значения
$f(a) = f(b)$

Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$
хотя бы в одной внутренней
точке ***c є (a,b).***

Теорема Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

Исследование функций

- **Теорема Ферма.**
- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а)** непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

Теорема Ролля.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

в) в концах отрезка принимает
одинаковые значения
$f(a) = f(b)$

Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$
хотя бы в одной внутренней
точке ***c є (a,b).***

Теорема Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

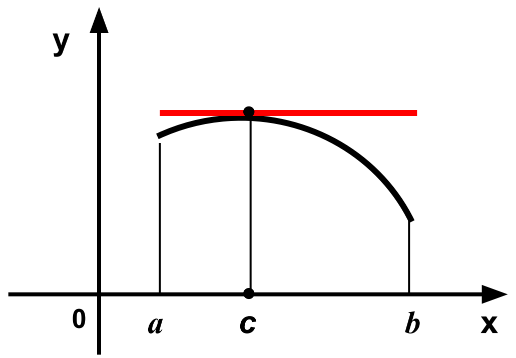
Тогда : $\boxed{f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$
хотя бы в одной внутренней
точке ***c є (a,b).***

Исследование функций

Теорема Ферма.

- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а)** непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $f'(c) = 0$

- **Геометрический смысл.**



Теорема Ролля.

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$ во всех внутренних точках ***(a,b);***

в) в концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$

Тогда : $f'(c) = 0$ хотя бы в одной внутренней точке ***c є (a,b).***

Теорема Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$ во всех внутренних точках ***(a,b);***

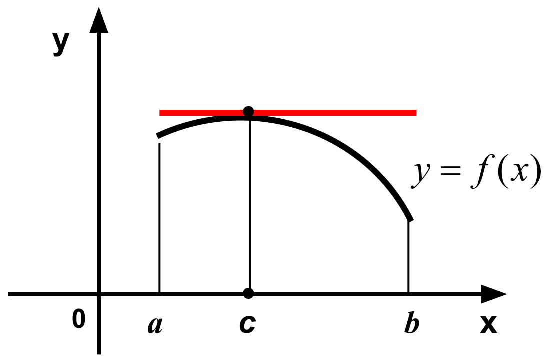
Тогда : $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ хотя бы в одной внутренней точке ***c є (a,b).***

Исследование функций

Теорема Ферма.

- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а)** непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c ϵ (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

- **Геометрический смысл.**



Теорема Ролля.

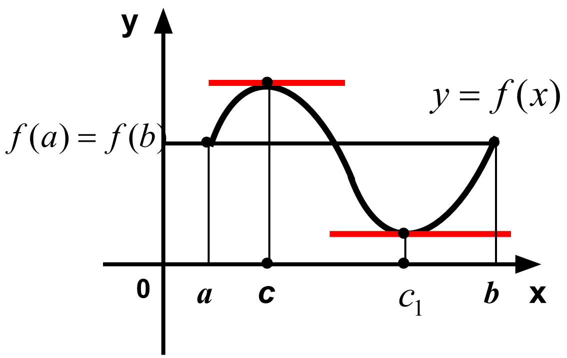
Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

в) в концах отрезка принимает
одинаковые значения
$f(a) = f(b)$

Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$
хотя бы в одной внутренней
точке ***c ϵ (a,b).***

Геометрический смысл.



Теорема Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$
удовлетворяет условиям:

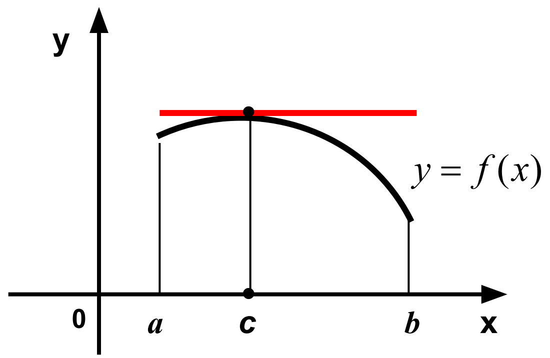
а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

Тогда : $\boxed{f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$
хотя бы в одной внутренней
точке ***c ϵ (a,b).***

Исследование функций

- **Теорема Ферма.**
- Пусть функция $y = f(x)$
- удовлетворяет условиям:
- **а)** непрерывна на отрезке ***[a,b];***
- **б)** имеет производную $f'(x)$
- во всех внутренних точках ***(a,b);***
- **в)** принимает наибольшее или
- наименьшее значение
- во внутренней точке ***c є (a,b)***.
- Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

- **Геометрический смысл.**



Теорема Ролля.

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

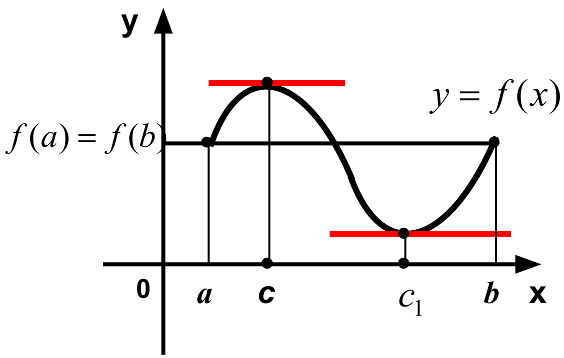
в) в концах отрезка принимает одинаковые значения

$f(a) = f(b)$

Тогда : $\boxed{f'(c) = 0}$

хотя бы в одной внутренней точке ***c є (a,b).***

Геометрический смысл.



Теорема Лагранжа.

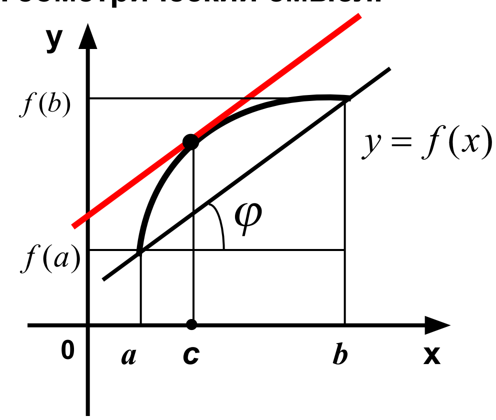
Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

а) непрерывна на отрезке ***[a,b];***
б) имеет производную $f'(x)$
во всех внутренних точках ***(a,b);***

Тогда : $\boxed{f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

хотя бы в одной внутренней точке ***c є (a,b).***

Геометрический смысл.



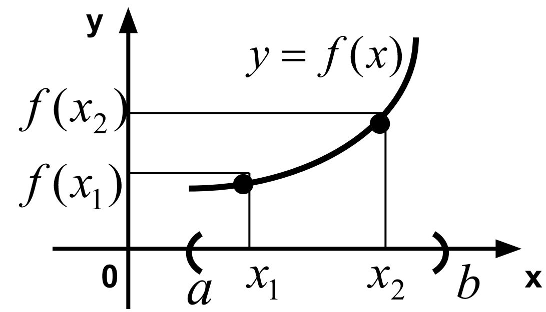
Исследование функций

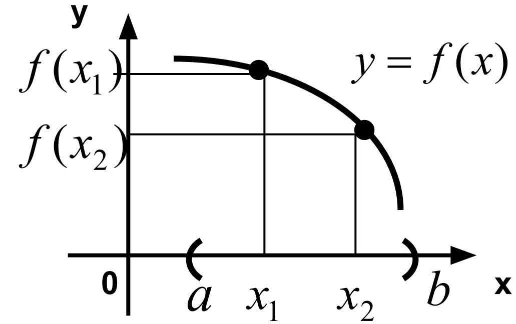
- **Монотонность функции.**
  - **Определение 1.**
  - Функция $y = f(x)$ называется
  - **возрастающей в** ***(a,b)* ,** если

$$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)\ :\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2).$$

  - **Определение 2.**
  - Функция $y = f(x)$ называется
  - **убывающей в** ***(a,b)*** , если

$$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)\ :\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2).$$





Исследование функций

- **Теорема.**
- Пусть $\exists\, f'(x) \quad \forall x \in (a,b)$.
- Тогда:

$$1)\ f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) - \textit{возрастает в } (a,b);$$

$$2)\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) - \textit{убывает в } (a,b).$$

- **Доказательство.**
- **1.** $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)\ :\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)\,;\, c \in (x_1, x_2) \subset (a,b).$$

- **2.** $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (a,b) \ \Rightarrow \ f'(c) < 0 \ \Rightarrow$

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \ \Rightarrow \ f(x_2) < f(x_1) \quad (\textit{убывает}).$$

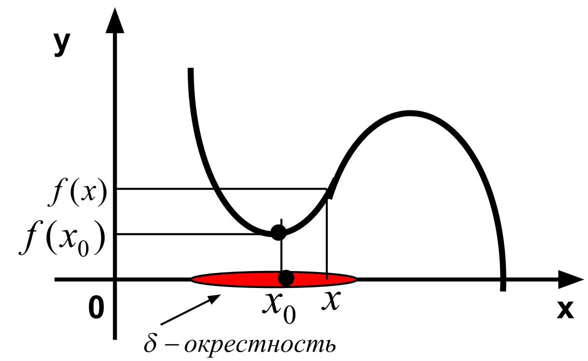
- **3.** $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (a,b) \ \Rightarrow \ f'(c) > 0 \ \Rightarrow$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \ \Rightarrow \ f(x_2) > f(x_1) \quad (\textit{возрастает}).$$

Исследование функций

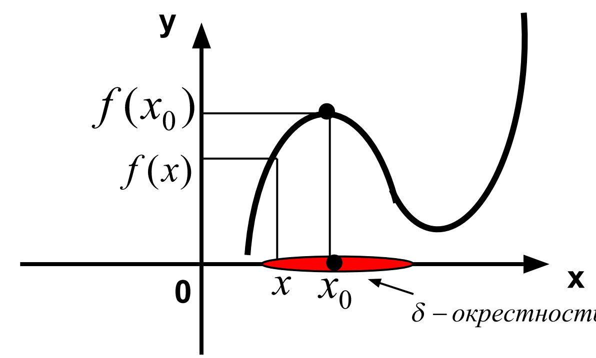
- **Экстремум функции.**
  - **Определение 1.**
  - Точка x_0 оси OX называется
  - **точкой minimum**`а **функции** $y = f(x)$,
  - если $\exists\, \delta$ - окрестность точки x_0 такая, что

$$f(x) \square f(x_0) \quad \forall x \in \delta - окрестности\ , \ \ x \neq x_0$$



  - **Определение 2.**
  - Точка x_0 оси OX называется
  - **точкой maximum**`а **функции** $y = f(x)$,
  - если $\exists\, \delta$ - окрестность точки x_0 такая, что

$$f(x) \square f(x_0) \quad \forall x \in \delta - окрестности\ , \ \ x \neq x_0$$



  - **Определение 3.**
  - Точками **экстремума** называются
  - точки **minimum**`а и точки **maximum**`а.
  - Значения функции в этих точках
  - Называют **экстремальными значениями.**

Исследование функций

- **Необходимый признак экстремума.**
  - **Теорема.**
  - **1.** $y = f(x)$ *определена*

    в δ *– окрестности точки* x_0

    (*включая точку* x_0)
  - **2.** *точка* x_0 *– точка экстремума.*

$\Longrightarrow$

$f'(x_0) = 0$ *либо*

$f'(x_0)$ *– не существует*

  - **Доказательство.**
  - Пусть $\exists\, f'(x_0) \Longrightarrow y = f(x)$ - удовлетворяет теореме Ферма $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$
  - **Определение 3.**
  - **Критическими точками** называются
  - точки оси ОХ , в которых $f'(x) = 0$
  - либо $f'(x\ ) = 0$ не существует.

Исследование функций

- **Достаточные признаки экстремума.**
  - **Определение.**
  - Пусть $y = f(x)$ определена и непрерывна
  - в δ - окрестности точки x_0 (включая точку x_0).
  - Пусть $\exists\, f'(x)$ в δ - окрестности точки x_0
  - (за исключением, быть может, точки x_0).
  - Говорят, что $f'(x)$ при переходе через точку x_0
  - **меняет знак с « + » на « - »,** если

$$\text{при } x \boxtimes x_0 : \; f'(x) \boxtimes 0 , \quad \text{при } x \boxtimes x_0 : \; f'(x) \boxtimes 0 .$$

  - Говорят, что $f'(x)$ при переходе через точку x_0
  - **меняет знак с « - » на « + »** , если

$$\text{при } x \boxtimes x_0 : \; f'(x) \boxtimes 0 , \quad \text{при } x \boxtimes x_0 : \; f'(x) \boxtimes 0 .$$

Исследование функций

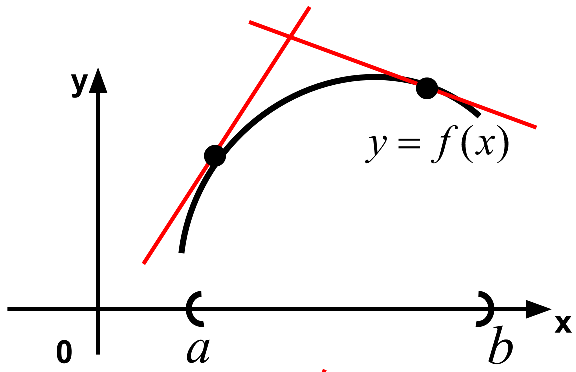
- **Первый достаточный признак экстремума.**
  - **Теорема.**
  - **1.** $y = f(x)$ *определена* *в* δ – *окрестности точки* x_0 (*включая точку* x_0);
  - **2.** *точка* x_0 – *критическая*;
  - **3.** $f'(x)$ при переходе через точку x_0
  - **меняет знак с « + » на « - »** $\Rightarrow$ Точка x_0 **- точка maximum`**а
  - **4.** $f'(x)$ при переходе через точку x_0
  - **меняет знак с « - » на « + »** $\Rightarrow$ Точка x_0 **- точка minimum`**а
  - **Доказательство.**
  - **1.** $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-» $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} при\ x < x_0 : f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) - возрастает \\ при\ x > x_0 : f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) - убывает \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x) < f(x_0) \Rightarrow \\ x_0 - точка\ \max \end{array}}$
  - **2.** $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+» $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} при\ x < x_0 : f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) - убывает \\ при\ x > x_0 : f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) - возрастает \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x) > f(x_0) \Rightarrow \\ x_0 - точка\ \min \end{array}}$

Исследование функций

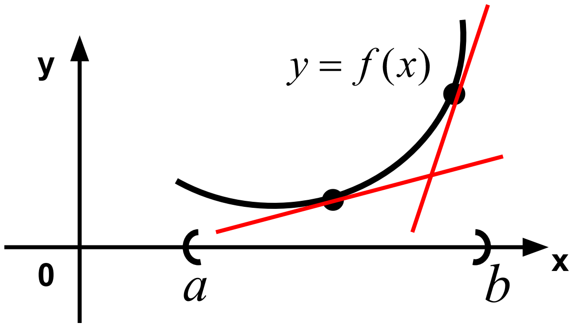
- **Второй достаточный признак экстремума.**
  - **Теорема.**
  - **1.** $y = f(x)$ *определена в* $\delta -$ *окрестности точки* x_0 *(включая точку* x_0*)*;
  - **2.** $f'(x_0) = 0$;
  - **3.** $\exists\, f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ $\boxed{\text{Точка } x_0 \textbf{ - точка minimum`а}}$
  - **4.** $\exists\, f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ $\boxed{\text{Точка } x_0 \textbf{ - точка maximum`а}}$

Исследование функций

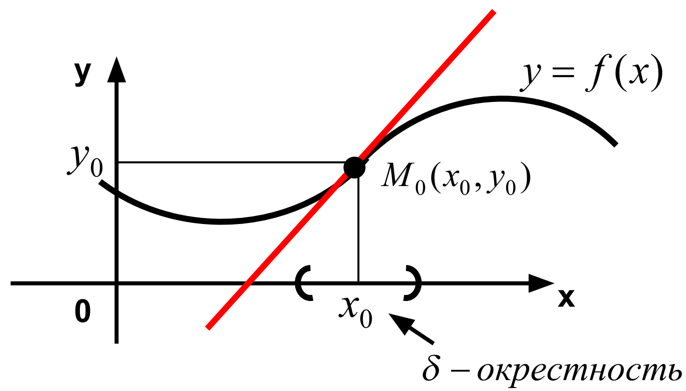
- **Выпуклость и точки перегиба графика функции.**
  - **Определение 1.**
  - График функции $y = f(x)$ называется
  - **выпуклым вверх в** (a,b) , если
  - график расположен **не выше**
  - любой своей касательной при $x \in (a,b)$



  - **Определение 2.**
  - График функции $y = f(x)$ называется
  - **выпуклым вниз в** (a,b), если
  - график расположен **не ниже**
  - любой своей касательной при $x \in (a,b)$



  - **Определение 3.**
  - Точка $M_0(x_0, y_0)$ графика функция
  - называется **точкой перегиба**, если
  - $\exists\, \delta -$окрестность точки x_0 ,в которой
  - слева от точки x_0 график расположен
  - **по одну сторону**, а справа **по другую сторону**
  - **от касательной**, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$



Исследование функций

- **Достаточный признак выпуклости.**
  - **Теорема.**
  - **1.** $\exists\, f''(x) \quad \forall\, x \in (a,b)\,;$
  - **2.** $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ График функции $y = f(x)$ **выпуклый вниз** в (a,b)
  - **3.** $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ График функции $y = f(x)$ **выпуклый вверх** в (a,b)

Исследование функций

- **Необходимый признак перегиба.**
  - **Теорема.**
  - **1.** График функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ **имеет перегиб**;
  - **2.** $\exists\, f''(x_0)$

$\Rightarrow$ $\boxed{f''(x_0) = 0}$

Достаточный признак перегиба.

Теорема.

1. $\exists\, f''(x_0) \quad \forall x \in (a,b)$;

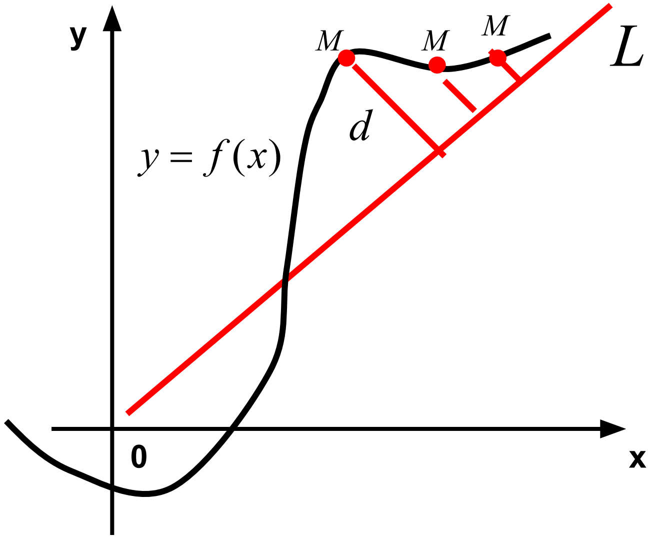
2. $f''(x_0) = 0$ *при* $x_0 \in (a,b)$;

3. $f''(x_0)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0

$\Rightarrow$ $\boxed{M_0(x_0, y_0) - \text{точка перегиба}.}$

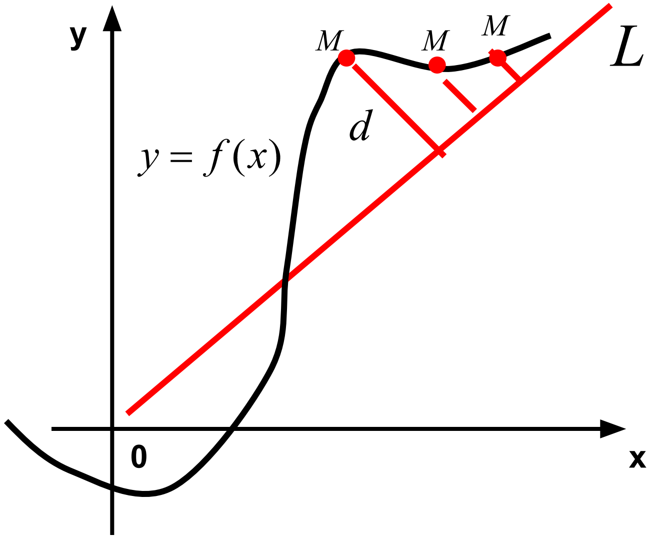
Исследование функций

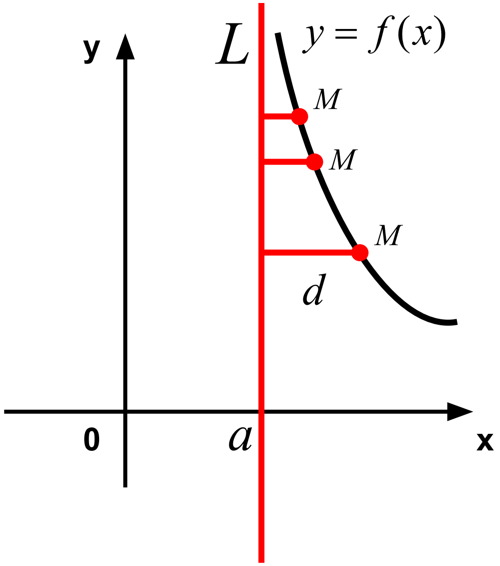
- **Асимптоты графика функции.**
  - **Определение.**
  - Прямая L называется **асимптотой графика**
  - функции $y = f(x)$, если **расстояние** от точки M
  - на графике до прямой L стремится к **нулю** при
  - неограниченном удалении точки от начала координат.



Исследование функций

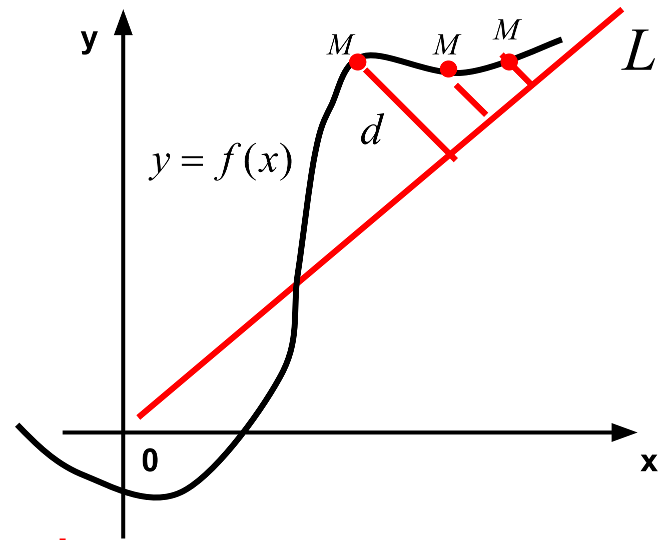
- **Асимптоты графика функции.**
  - **Определение.**
  - Прямая L называется **асимптотой графика**
  - функции $y = f(x)$, если **расстояние** от точки M
  - на графике до прямой L стремится к **нулю** при
  - неограниченном удалении точки от начала координат.

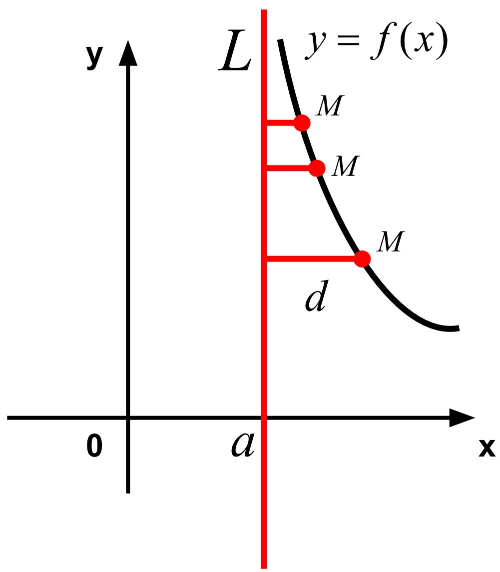


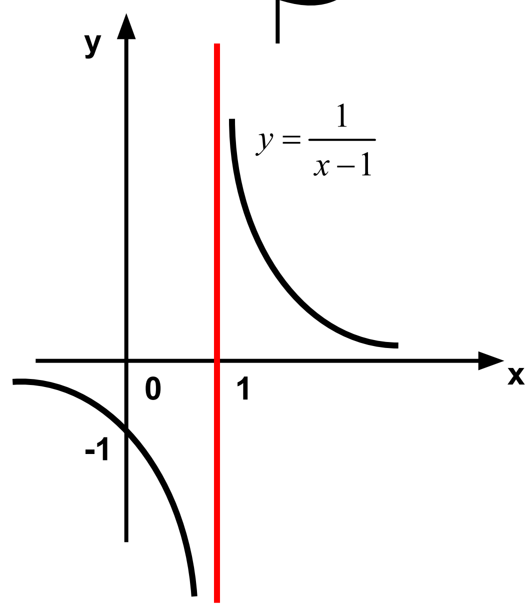


Исследование функций

- **Асимптоты графика функции.**
  - **Определение.**
  - Прямая L называется **асимптотой графика**
  - функции $y = f(x)$, если **расстояние** от точки M
  - на графике до прямой L стремится к **нулю** при
  - неограниченном удалении точки от начала координат.







Исследование функций

- **Теорема 1.**
  - Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой,**
  - если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \ \text{или} \ \lim_{x \to a+0} f(x)$$

  - равен $+\infty$ *или* $-\infty$

Теорема 2.

Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой**, если

$$\exists \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

и

$$\exists \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = b$$

Замечание. Горизонтальная асимптота - частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$

Исследование функций

- **Общая схема исследования функции.**
  - **Первый этап.**
  - 1. Область определения, точки разрыва.
  - 2. Четность, нечетность.
  - 3. Периодичность.
  - 4. Точки пересечения с осями координат.
  - 5. Асимптоты графика.
  - 6. Поведение при $x \to \pm\infty$

Уточненное исследование с помощью первой производной.

1. Точки экстремума (вычислить экстремальные значения).
2. Интервалы монотонности.

Исследование с помощью второй производной.

1. Точки перегиба (вычислить значение функции и угловой коэффициент).
2. Интервалы выпуклости.

Исследование функций

- **Пример 1.**
  - **Исследовать функцию и построить график** $y = x^3 - 8x^2 + 16x$
  - **1. О.О.Ф.** $x \in R$
  - **2. Четность, нечетность:**

$$y(-x) = (-x)^3 - 8(-x)^2 + 16(-x) = -x^3 - 8x^2 - 16x = -(x^3 + 8x^2 + 16x)$$

$$y(-x) \neq y(x)\,;\; y(-x) \neq -y(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\text{Функция общего вида}}$$

  - **3. Непериодическая.**
  - **4. Точки пересечения с осями координат:**
    - **с Оу:** $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow M_0(0,0)$
    - **С Ох:** $y = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - 8x^2 + 16x = 0$

$$x(x^2 - 8x + 16) = 0$$

$$x(x-4)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0,\; x_1 = 4$$

$$\Rightarrow M_0(0,0),\; M_1(4,0)$$

Исследование функций

- **5. Асимптоты.**
  - **а) вертикальных асимптот нет;**
  - **б) наклонные:** $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - 8x^2 + 16x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(x^2 - 8x + 16) = \infty$$

$\Longrightarrow$ **Наклонных асимптот нет**

- **6. Поведение при** $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 8x^2 + 16x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 8x^2 + 16x) = -\infty$$

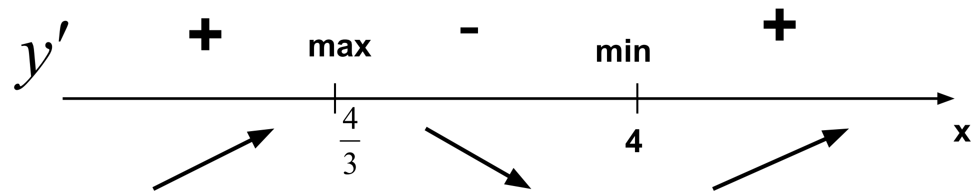
Исследование функций

- **Исследование с помощью первой производной.**

$$y' = 3x^2 - 16x + 16$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{6} = \frac{16 \pm 8}{6}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = 4, \;\; x_2 = \frac{4}{3}$$

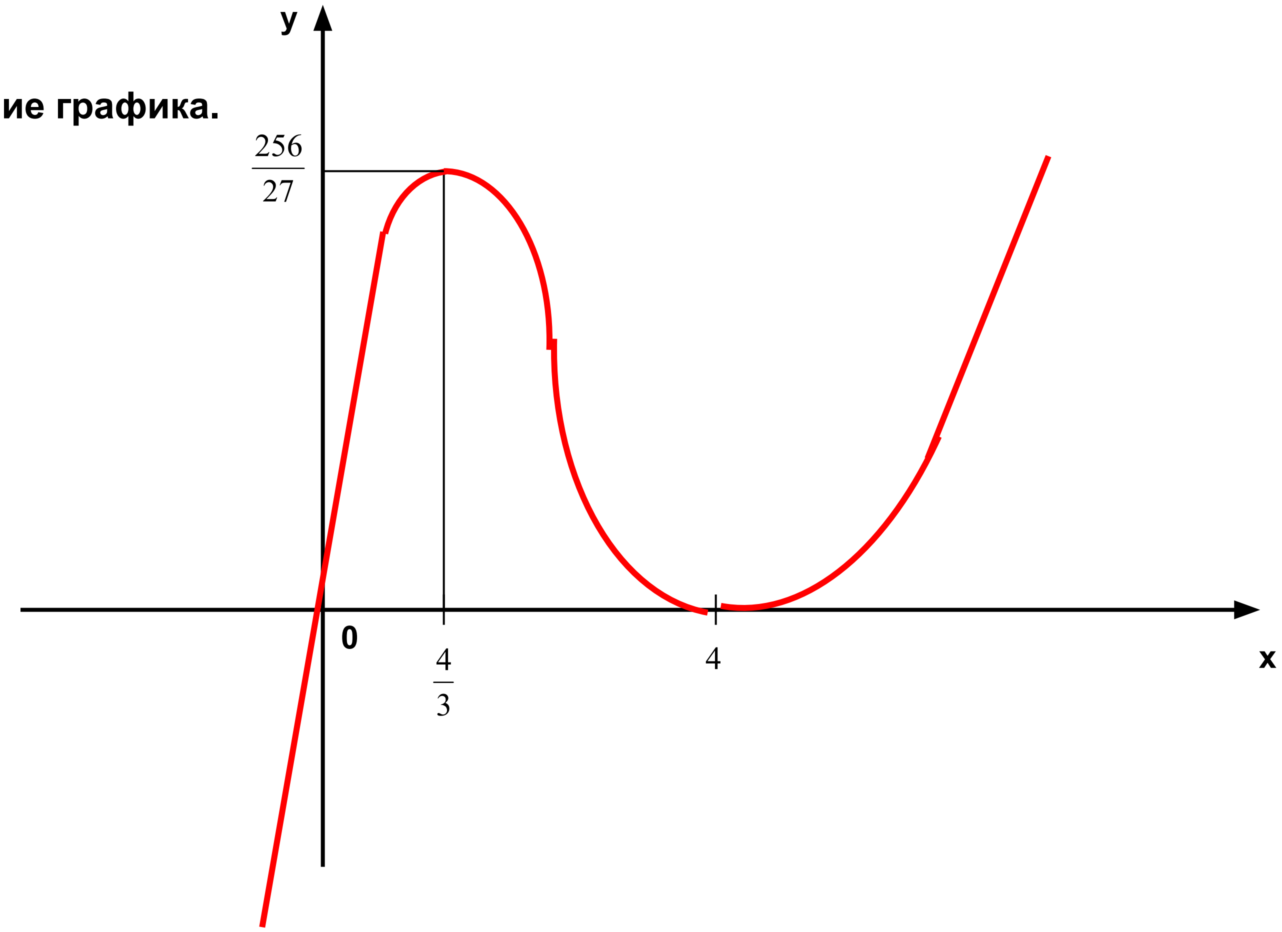


$$y\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 16 \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{27} \cong 9{,}5$$

$$y(4) = 0$$

Исследование функций

Построение графика.

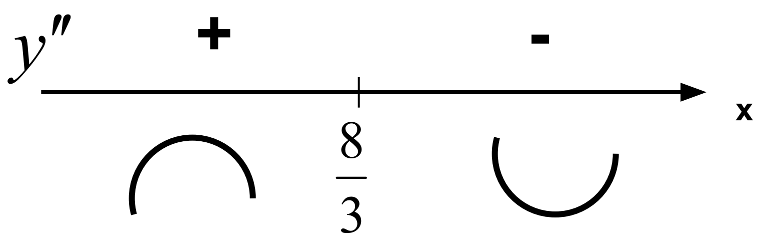


Исследование функций

- **Исследование с помощью второй производной.**

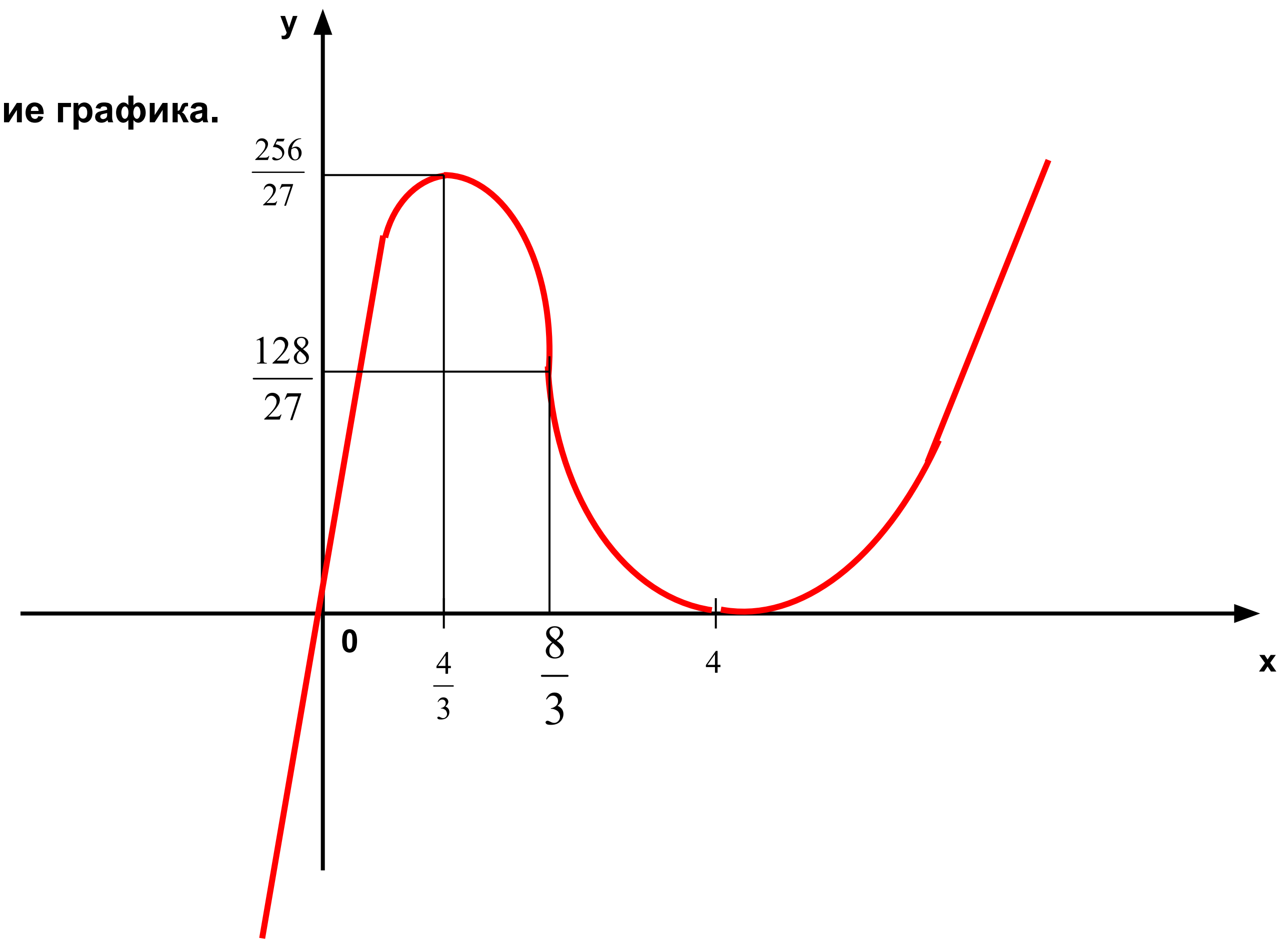
$$y'' = (3x^2 - 16x + 16)' = 6x - 16$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; 6x - 16 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$



Исследование функций

Построение графика.



Исследование функций

- **Пример 2.**
  - Исследовать функцию и построить график $y = \dfrac{x^2}{1-x}$.
  - 1. О.О.Ф.: $x \neq 1$; $\lim\limits_{x \to 1-o} \dfrac{x^2}{1-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+o} \dfrac{x^2}{1-x} = -\infty$ $\Longrightarrow$ $x = 1 - \textit{точка разрыва второго рода}$.
  - 2. Четность, нечетность:

    $$y(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)} = \frac{x^2}{1+x} \Longrightarrow y(-x) \neq y(x);\; y(-x) \neq -y(x) \Longrightarrow$$

    Функция общего вида.
  - 3. Непериодическая.
  - 4. Точки пересечения с осями координат: $x = 0$; $y = 0$.
  - 5. Асимптоты:
    - а) вертикальные: $x = 1$.
    - б) наклонные: $y = kx + b$;

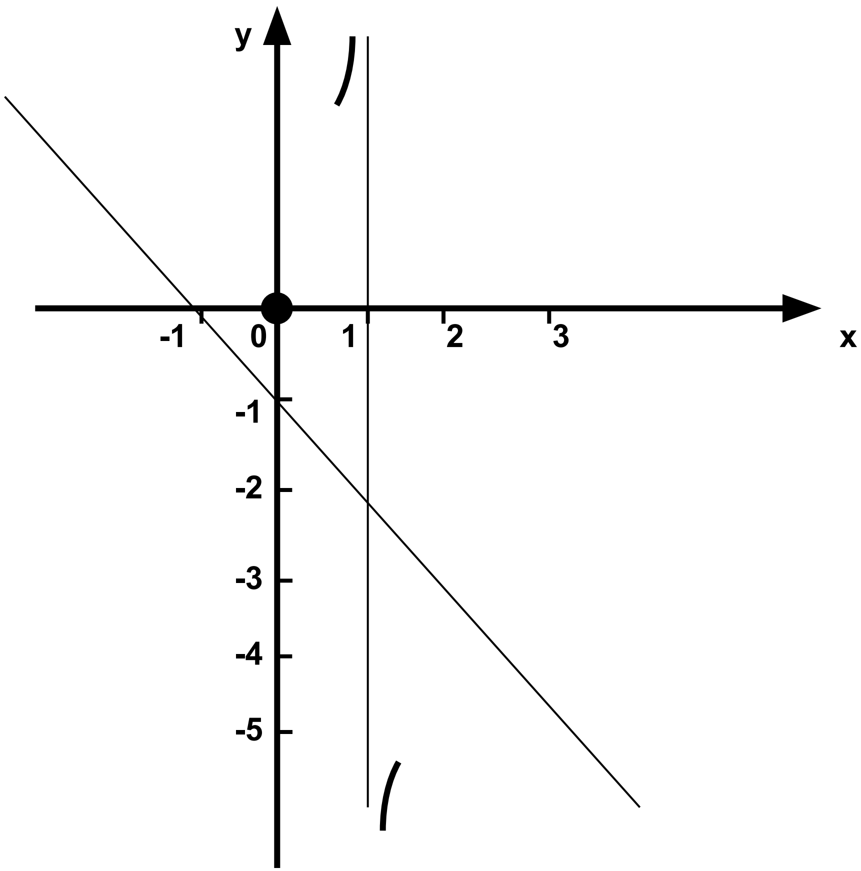
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x \right) = -1.$$

$$\Longrightarrow y = -x - 1$$

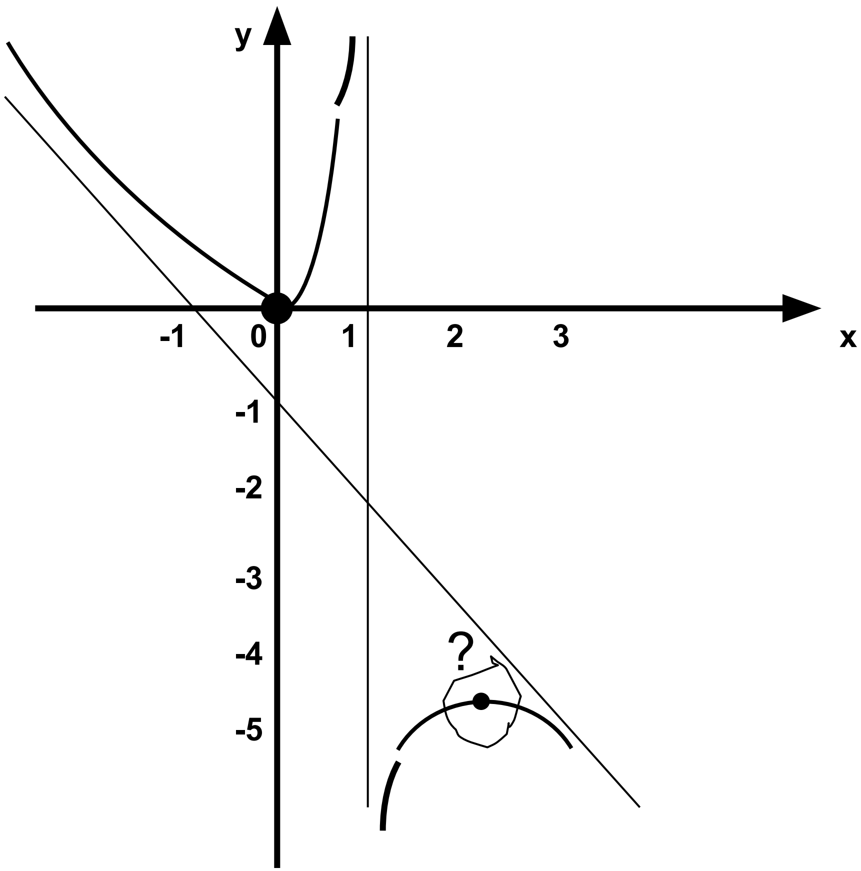
Исследование функций

- **График функции.**



Исследование функций

- **График функции.**



Исследование функций

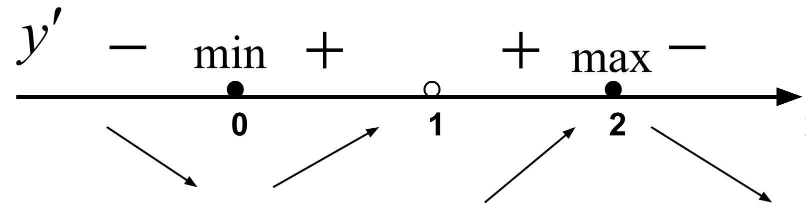
- **Исследование с помощью первой производной.**

$$y' = \frac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}\,;$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0\,;\;\; x_2 = 2\,;$$

$$y_1 = 0\,;\;\; y_2 = -4\,;$$

$$y' - не\ существует:\;\; x = 1$$



Исследование функций

- **Уточненный график.**