ЕГЭ
Задание 5

Пазылов Бекжан

Чермных Матвей

УРАВНЕНИЯ.

Рациональное уравнение – это равенство двух рациональных (без знака корня) выражений.
Дробно-рациональное уравнение – рациональное (без знака корня) уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями.

Алгоритм решения рациональных уравнений

1

Понять, точно ли это рациональное уравнение (убедись, что в нем нет корней);

2

Определить ОДЗ;

3

Найти общий знаменатель дробей и умножить на него обе части уравнения;

4

Решить получившееся целое уравнение;

5

Исключить из его корней те, которые обращают в ноль знаменатель дробей.

Линейные, квадратные, кубические уравнения.

- Линейным называется такое уравнение, в котором неизвестное x находится в числителе уравнения и без показателей. Например: 2x–5=3

Квадратное уравнение — уравнение вида ax2+bx+c=0, где a,b,c — некоторые числа a≠0, x — неизвестное. Перед тем как решать уравнение, необходимо раскрыть скобки и собрать все слагаемые в левой части уравнения.

Для решения простых кубических уравнений необходимо обе части представить в виде основания в третьей степени. Далее извлечь кубический корень и получить простое линейное уравнение.

Иррациональное уравнение.

Иррациональное уравнение – это уравнение, в котором выражение с переменной находится под корнем или возводится в дробную степень.

Задание 5 № 510328

Решите уравнение: $\sqrt{\frac{1}{1-5x}}=\frac{1}{6}$.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{1}{1-5x}}=\frac{1}{6}. \Leftrightarrow \frac{1}{1-5x}=\frac{1}{36} \Leftrightarrow 1-5x=36 \Leftrightarrow x=-7$$

Ответ: −7.

Решите уравнение $x^2+9=(x+9)^2$.

Решение.

Воспользуемся формулой $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$:

$$x^2+9=(x+9)^2 \Leftrightarrow x^2+9=x^2+18x+81 \Leftrightarrow 18x=-72 \Leftrightarrow x=-4.$$

Ответ: −4.

Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют показательными уравнениями

$$a^{f(x)} = a^{h(x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = h(x)$$

Методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4}=64$$
$$2^{2x-4}=2^6$$
$$2x-4=6$$
$$x=5$$
$$Ответ:\ 5$$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$
$$2x-3,5=0,5$$
$$x=2$$
$$Ответ:\ 2$$

Пример 3

$$5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$$
$$x^2-3x=3x-8$$
$$x^2-6x+8=0$$
$$\left[\begin{array}{l}x_1=2,\\ x_2=4\end{array}\right.$$
$$Ответ:\ 2;\ 4$$

Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, где $a \neq 1,\ a > 0$ называют логарифмическими уравнениями

$$\log_a f(x) = \log_a h(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.

$$a^{\log_a b} = b$$

$a > 0$
$a \neq 1$
$b > 0$
$c > 0$
$d > 0$
$d \neq 1$

Свойства логарифмов:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
5. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
6. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$
7. $\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \cdot \log_a b$
8. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$

10. $\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{1}{\log_b a}$
11. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
12. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$log_3\left(x^2-3x-5\right)=log_3(7-2x)$$

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x \\ 7-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right. \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$x=-3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} (x+4)(2x+3)=(1-2x) \\ x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+13x+11=0 \\ x>-4 \\ x>-1{,}5 \\ x<0{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-5{,}5 \end{array}\right. \\ -1{,}5<x<0{,}5 \end{cases}$$

Ответ : -1.

Другие тригонометрические уравнения

1.Сводимые к квадратным

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \le 1$, тогда

$a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

2.Однородные

1)Первой степени:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получим: простое уравнение

$$a \cdot \mathrm{tg}\, x + b = 0 \text{ или } \mathrm{tg}\, x = m$$

2)Второй степени:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$.

Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \mathrm{tg}^2 x + b \cdot \mathrm{tg}\, x + c = 0.$$

Простейшие тригонометрические уравнения

Общий вид	Ограничение	Частные случаи		
$\cos x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$, $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$	$\lvert a\rvert > 1$, корней нет	$a = 1$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$	$a = 0$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$	$a = -1$, $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$
$\sin x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$	$\lvert a\rvert > 1$, корней нет	$a = 1$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$	$a = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$	$a = -1$, $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$
$tg\ x = a$, $a = arctg\ a + \pi n$,	нет	----	----	----

Типы тригонометрических уравнений

Простейшие тригонометрические уравнения	$1)\sqrt{2}\cos x+1=0$ $2)\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})+1=0$
Уравнения, приводимые к квадратным	$3)5\cos^2 x+6\sin x-6=0$
Однородные тригонометрические уравнения	$4)\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$ $5)\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$

Простейшие

Решим уравнения.

1. $\sin 3x = \frac{1}{2}$

$3x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi k$, k-целое.

$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k$ $\quad x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$

2. $\cos\frac{2}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{2}{3}x = \pm\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi k$ $\quad$ k-целое

$\frac{2}{3}x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$x = \pm\frac{9\pi}{8} + 3\pi k$

3. $tg(4x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k$ $\quad 4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k$

$4x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ $\quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}$ $\quad$ k-целое

4. $\sin\frac{\pi}{4}x = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\pi}{4}x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$

$\frac{\pi}{4}x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $\quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6}\frac{4}{\pi} + \pi n\frac{4}{\pi}$

$x = (-1)^n \frac{2}{3} + 4n$ $\quad$ n-целое

a^0	0	30	45	60	90
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

a^0	120	135	150	180
α, рад	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a;\quad |a| \leqslant 1; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = 0;\quad x = \pi k; k \in Z;$

$\sin x = 1;\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = a; |a| \leqslant 1;\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\cos x = 0;\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z;$

$\cos x = 1;\quad x = 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi k; k \in Z;$

$\operatorname{tg} x = a;\quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n; n \in Z;$

$\operatorname{ctg} x = a;\quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n; n \in Z.$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;\qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};\qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};\qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$
$$^*\ \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;\qquad ^*\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};\qquad ^*\ \operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Формулы приведения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,\qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x \pm y}{2} \cdot \cos\frac{x \mp y}{2};$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x + y}{2} \cdot \cos\frac{x - y}{2};$$
$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x + y}{2} \cdot \sin\frac{y - x}{2};$$
$$\sin x + \cos y = 2\sin\left(\frac{x - y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$
$$\sin x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - y}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$$
$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y};$$

Выражение тангенса через синус и косинус двойного угла:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y));$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y));$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)).$$

Тригонометрические функции одного угла:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2n + 1)\pi, n \in Z$$
$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2n + 1)\pi, n \in Z$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2n + 1)\pi, n \in Z$$

Задание 5 № 26669

Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\Leftrightarrow x-7=\pm1+6n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8+6n;\\x=6+6n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Значениям $n\geq0$ соответствуют положительные корни.

Если $n=-1$, то $x=2$ и $x=0$.

Если $n=-2$, то $x=8-12=-4$ и $x=6-12=-6$.

Значениям $n\leq-3$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: -4.