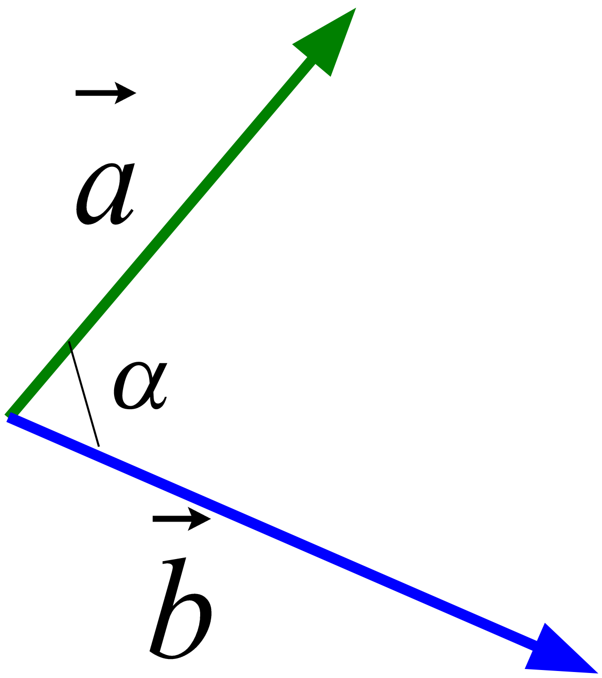
Скалярное произведение векторов.
Вычисление углов между прямыми.

Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ***, то*** $\vec{a} \perp \vec{b}$

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ***, то*** α ***- острый угол***

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ***, то*** α ***- тупой угол***

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

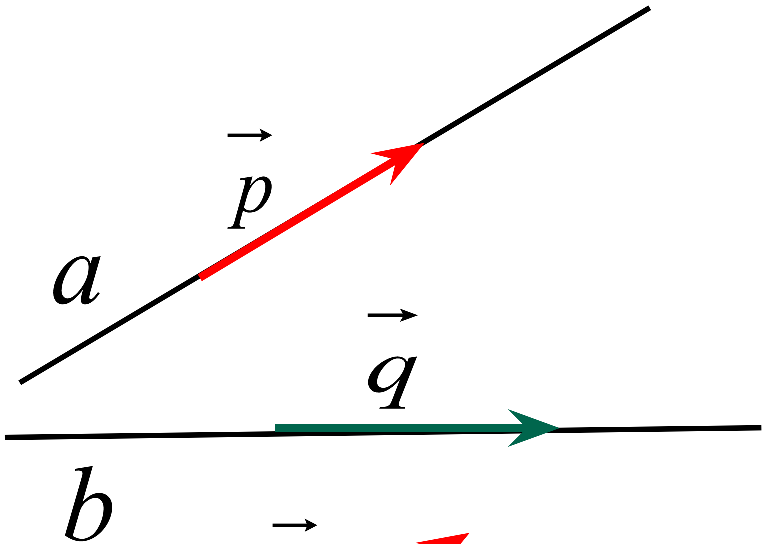
Косинус угла между ненулевыми векторами

$$cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

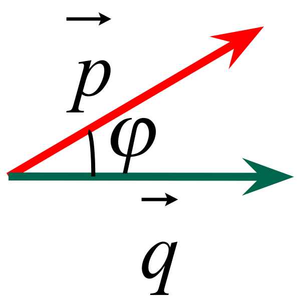
Угол между прямыми



$\vec{p}$ *- направляющий вектор прямой a*

$\vec{q}$ *- направляющий вектор прямой b*

φ *- угол между прямыми*



$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\quad\quad$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|\, x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \,|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Проверка домашнего задания

№ 464(б)

Вычислить угол между прямыми AB и CD, если A(5;-8;-1), B(6;-8;-2), C(7;-5;-11), D(7;-7;-9)

Решение

$$\overrightarrow{AB}\{1;0;-1\} \qquad \overrightarrow{CD}\{0;-2;2\}$$

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 0 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = 60^0$$

Проверка домашнего задания

№ 464(в)

Вычислить угол между прямыми AB и CD, если A(1;0;2), B(2;1;0), C(0;-2;-4), D(-2;-4;0)

Решение

$$\overrightarrow{AB}\{1;1;-2\} \qquad \overrightarrow{CD}\{-2;-2;4\}$$

Так как координаты векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны, а прямые параллельны.

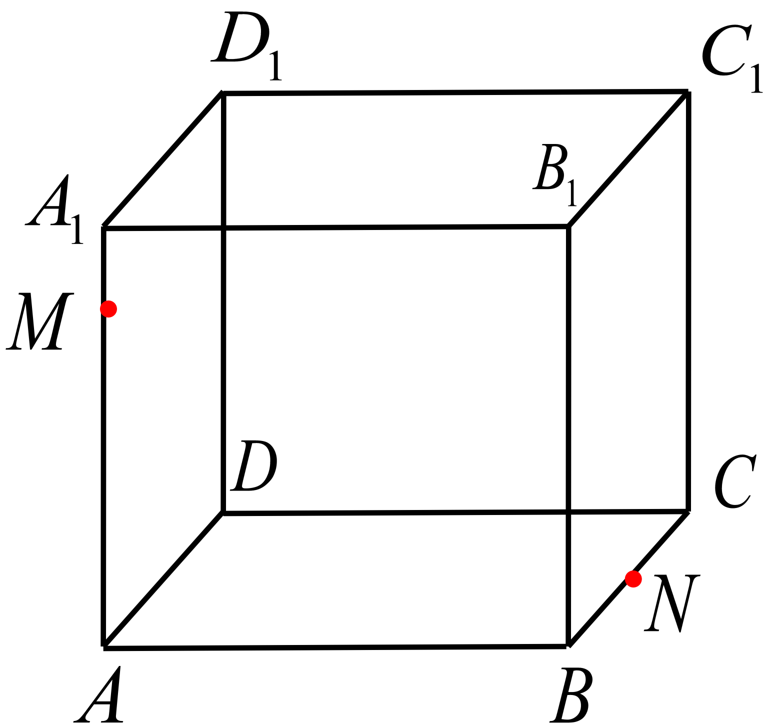
$$\varphi = 0^0$$

№466(а)

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$M \in AA_1 \quad AM : MA_1 = 3:1$

$BN = NC$



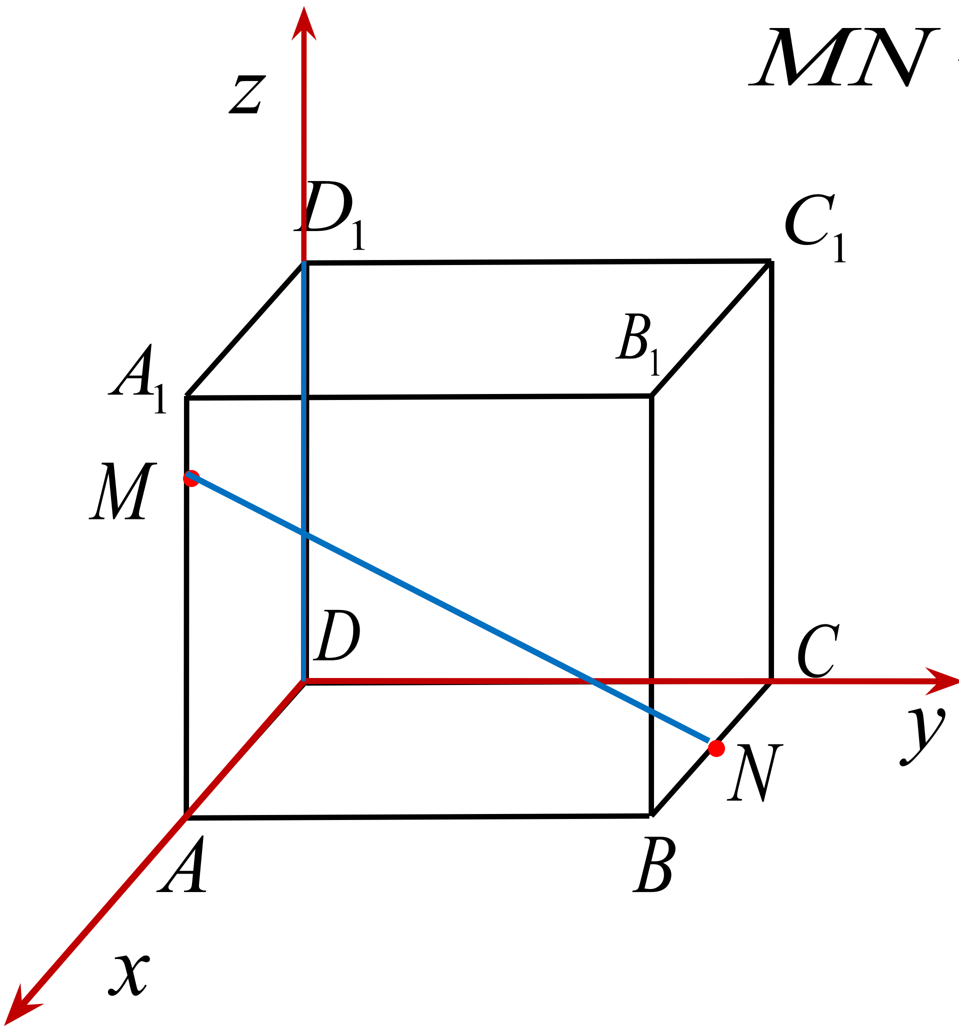
Вычислить косинус угла между прямыми MN *и* DD_1

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$$M \in AA_1 \quad AM : MA_1 = 3:1 \quad BN = NC$$

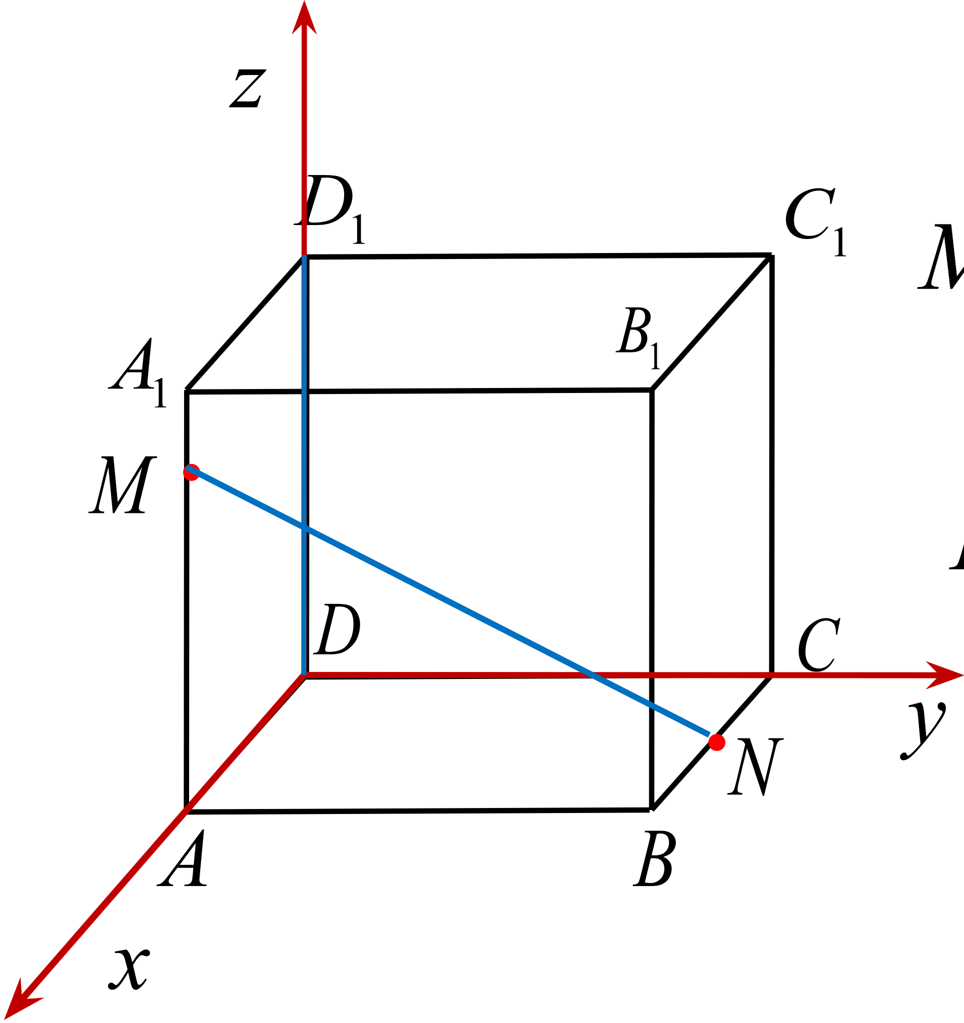
Вычислить косинус угла между прямыми

$$MN \text{ и } DD_1$$



Решение:

Пусть ребро куба равно 1. Введем прямоугольную систему координат.



$$M\left(1;0;\frac{3}{4}\right) \qquad N\left(\frac{1}{2};1;0\right)$$

$$D(0;0;0) \qquad D_1(0;0;1)$$

$$\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{1}{2};1;-\frac{3}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{DD_1}\{0;0;1\}$$

$$\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{1}{2};1;-\frac{3}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{DD_1}\{0;0;1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{|-\frac{1}{2}\cdot 0+1\cdot 0+(-\frac{3}{4})\cdot 1|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$

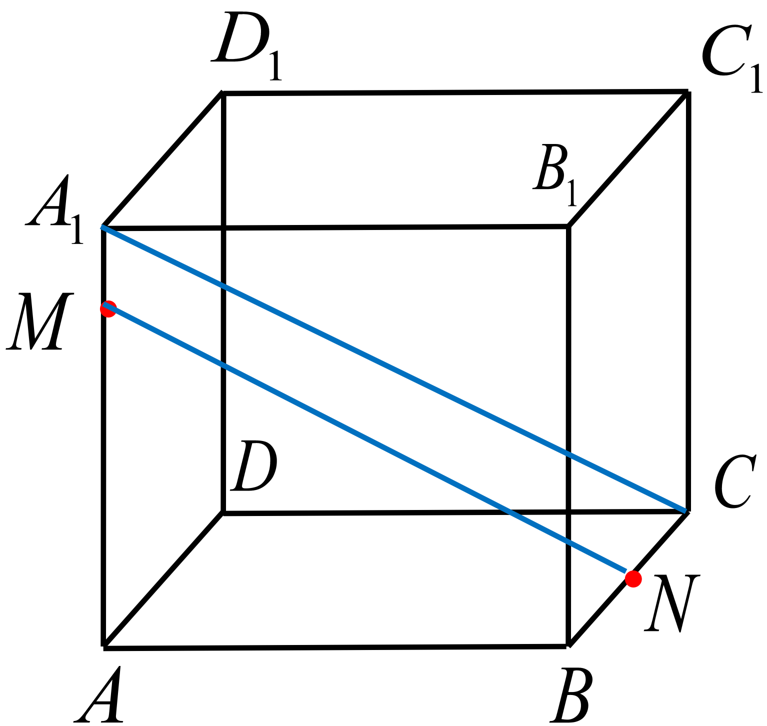
$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

№466(г)

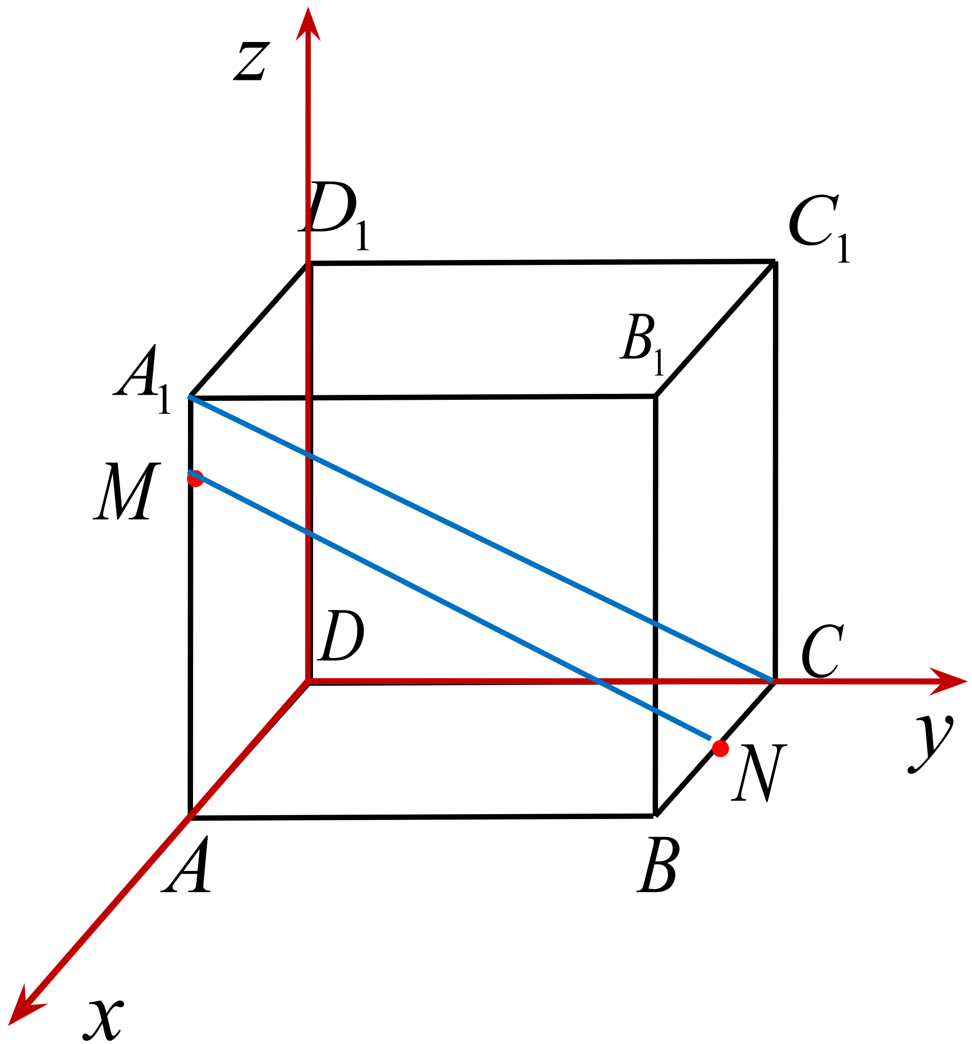
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$M \in AA_1 \quad AM : MA_1 = 3:1$

$BN = NC$



Вычислить косинус угла между прямыми MN *и* A_1C


z
D_1
C_1
B_1
A_1
M
D
C
y
N
A
B
x

Домашнее задание

П.46-48

№ 466 (б,в), № 468 (б)