Дробно-линейная функция

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbb{C},\quad ad-bc\neq 0.$$

Частные случаи:

1. $w=z+h$ – **параллельный перенос** на вектор h.

2. $w=e^{i\theta}z$ – **поворот** на угол θ.

3. $w=rz,\ r\in\mathbb{R},\ r>0$ – **подобие** с коэффициентом подобия r.

4. $w=\dfrac{1}{z}$ – **обратное отображение**.

$$w_1=cz,$$

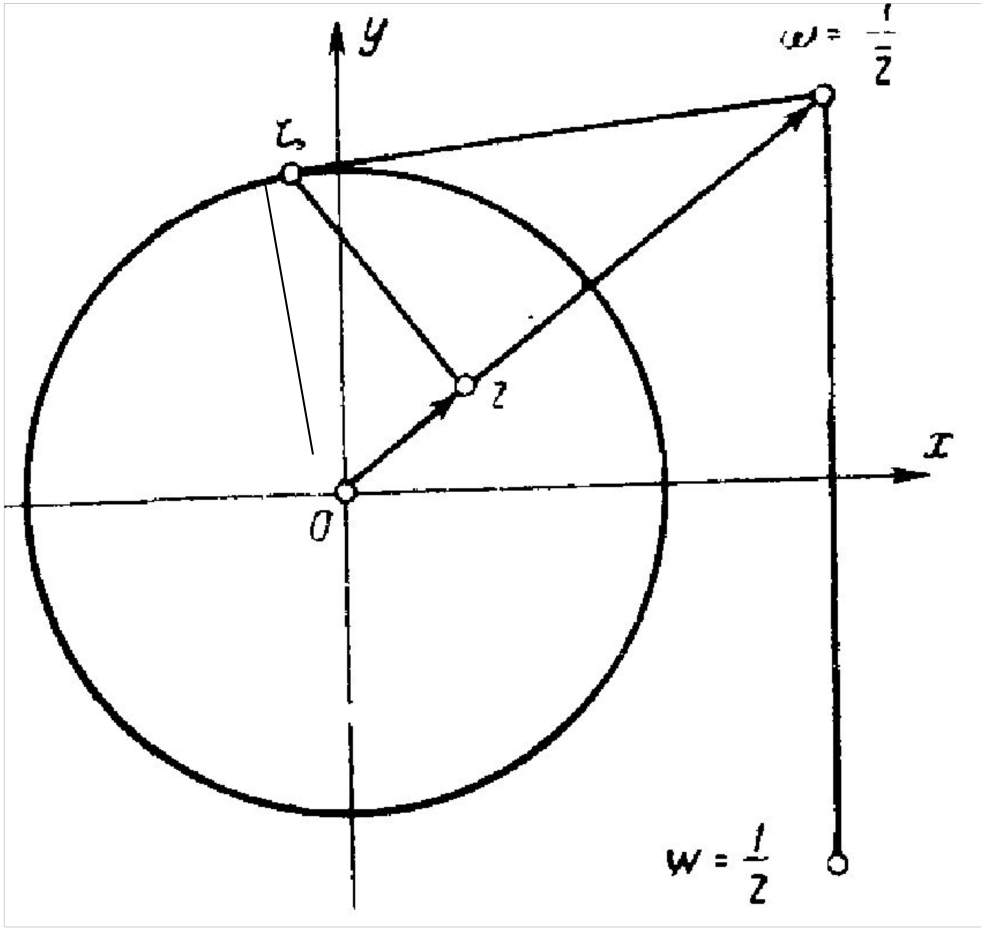
$$w_2=w_1+d,$$

$$w_3=\frac{1}{w_2},$$

$$w_4=\left(b-\frac{ad}{c}\right)w_3,$$

$$w=\frac{a}{c}+w_4$$

Дробно-линейная функция – **однолистное** отображение, дифференцируемое в $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{d}{a}\right\}$.



$\triangle Oz\zeta$ и $\triangle O\zeta\omega$ подобны:

$$\frac{|\omega|}{|\zeta|} = \frac{|\zeta|}{|z|} \quad \Rightarrow \quad |\omega| = \frac{1}{|z|}$$

$$\arg\frac{1}{z} = -\arg z\,, \quad |\omega| = \frac{1}{|z|}$$

Теорема (круговое свойство дробно-линейного отображения)

Любое дробно-линейное отображение преобразует каждую окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ в окружность на $\overline{\mathbb{C}}$.

▯ Для отображений подобия, поворота и переноса круговое свойство очевидно. Докажем его справедливость для обратного отображения.

Каждую окружность на плоскости можно задать уравнением

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0. \quad (1)$$

Пусть $z=x+iy$, тогда (1) можно записать в виде

$$Az\overline{z}+B_1 z+C_1\overline{z}+D=0, \quad (2)$$

где $B_1=\frac{1}{2}\left(B-iC\right)$, $C_1=\frac{1}{2}\left(B+iC\right)$.

Подставим в (2) $z=\frac{1}{\omega}$:

$$\frac{A}{\omega\overline{\omega}}+\frac{B_1}{\omega}+\frac{C_1}{\overline{\omega}}+D=0 \quad \text{или} \quad A+B_1\overline{\omega}+C_1\omega+D\omega\overline{\omega}=0.$$

Получили уравнение вида (2), а значит, уравнение окружности.▯

Свойства дробно-линейного отображения

1. Какими бы ни были 3 разные точки $z_1, z_2, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ и 3 разные точки $\omega_1, \omega_2, \omega_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ существует, и притом единственное, дробно линейное отображение $L(z)$ такое, что $\omega_k = L(z_k)$, $k = 1, 2, 3$.

Следствие. Любую окружность $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ можно с помощью дробно-линейного отображения преобразовать в любую другую окружность $\gamma^* \in \overline{\mathbb{C}}$.

2. Инвариантность симметричных точек.

Точки z и z^* называются ***симметричными*** на $\mathbb{C}$, если они лежат на одном и том же луче, выходящем из центра окружности z_0, а произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса данной окружности.

Произвольное дробно-линейное отображение переводит каждую пару точек z и z^*, симметричных относительно некоторой окружности $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$, в точки ω и ω^*, симметричные относительно окружности $\gamma^* \in \overline{\mathbb{C}}$, являющейся образом окружности $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ при данном отображении.

Степенная функция $\omega = z^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ (1) и многозначная функция $\omega = \sqrt[n]{z}$

1. Дифференцируема.

2. $\forall z \neq 0 \quad \dfrac{d\omega}{dz} = nz^{n-1} \neq 0. \ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Отображение (1) конформное в каждой точке $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Пусть $z = re^{i\varphi}, \omega = \rho e^{i\psi}$. Тогда $\rho = r^n, \psi = n\varphi \ \left(\varphi = \arg z\right)$.

$\Rightarrow$ отображение (1) увеличивает в n раз углы с вершиной в точке $z = 0 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ отображение (1) не является конформным в точке $z = 0$.

3. Отображение (1) однозначное, но не взаимно однозначное.

□ Любые две точки $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что

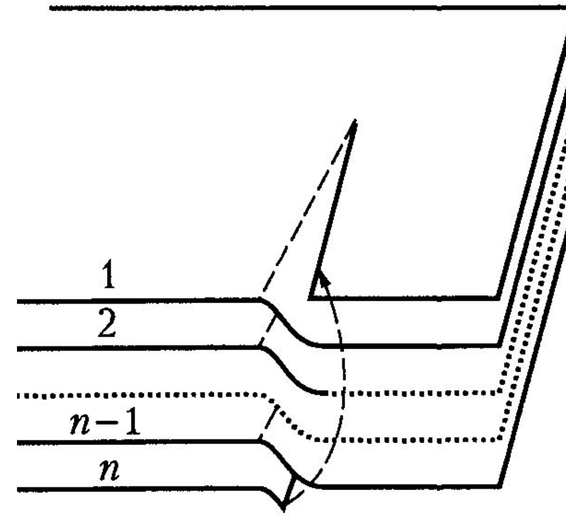
$$|z_1| = |z_2|,\ \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi}{n}k, k \in \mathbb{Z},$$

переходят в одну точку плоскости ω.□

Областью однолистности – любая область плоскости z целиком лежащая внутри угла величиной $\dfrac{2\pi}{n}$ с центром в начале координат.

Пусть D^* – односвязная область плоскости ω, не содержащая точек 0 и ∞.

В D^* можно определить n разных однозначных функций, для каждой из которых функция $\omega = z^n$ является обратной. Эти функции – однозначные ветви многозначной функции $\omega = \sqrt[n]{z}$.



Пусть $z = re^{i\varphi}$, $\omega = \rho e^{i\psi}$. Тогда $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi = \dfrac{\psi}{n}$, где угол

$$\psi = \psi_0 + 2\pi k \left(k = \overline{0, n-1}\right)$$

определяется однозначно для каждой ветки ***многозначной функцией*** $\omega = \sqrt[n]{z}$ и каждой точки из области D^*.

Точки $z = 0$ $z = \infty$ – ***точки разветвления*** $(n-1)$-го порядка функции $\omega = \sqrt[n]{z}$. На поверхности Римана эти точки являются концевыми точками разрезов, общими для всех листов.

Каждая ветвь функции $\omega = \sqrt[n]{z}$ является дифференцируемой в области D^* с производной $\dfrac{d\sqrt[n]{\omega}}{d\omega} = \dfrac{\sqrt[n]{\omega}}{n\omega} \neq 0$, а значит, отображение, осуществляемое каждой ветвью, конформное в любой области D^*.

Точка разветвления многозначной функции – точка, при обходе которой в достаточно малой ее окрестности совершается переход от одной ветви функции к другой ее ветви. Если после n-кратного обхода в одном и том же направлении опять возвращаемся на начальную ветвь, то говорят, что это ***точка разветвления*** $(n-1)$***-го порядка***, в противном случае – ***бесконечного порядка.***

Показательная функция $\omega = e^z$ и многозначная функция $z = \mathrm{Ln}\,\omega$

$$\omega = u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right). \qquad (1)$$

1) Для действительных $z = x$ определение (1) совпадает с обычным.

2) Функция $\omega = e^z$ дифференцируема $\forall z \in \mathbb{C}$ и $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$.

3) Сохраняется теорема сложения $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

$$\triangleright \quad e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right)e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) =$$

$$= e^{x_1+x_2}\left(\cos\left(y_1+y_2\right) + i\sin\left(y_1+y_2\right)\right) = e^{z_1+z_2} \triangleleft$$

4) Функция $\omega = e^z$ периодическая с основным периодом $2\pi i$.

5) Функция $\omega = e^z$ определена в $\mathbb{C}$ и не имеет предела при $z \to \infty$

$$\triangleright \quad \lim_{\substack{z=x>0 \\ x\to+\infty}} e^z = \infty, \quad \lim_{\substack{z=x<0 \\ x\to-\infty}} e^z = 0 \qquad \triangleleft$$

6) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \omega(z) \neq 0$. Любая другая точка плоскости ω (т.е. $\omega \neq 0$) принадлежит образу плоскости

▯ $\quad e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \neq 0$, так как

$$\forall x \; e^x \neq 0 \;\; \text{и} \;\; \forall y \nexists \; \text{"}\cos y = 0 \;\wedge\; \sin y = 0\text{"} = \quad .$$

Пусть $\omega \in \mathbb{C}, \omega \neq 0, \omega \neq \infty$. Найдем по ω такое z, что $e^z = \omega$.

$$|\omega| = e^x \;\Rightarrow\; x = \ln|\omega|,\; y \in \mathrm{Arg} w.$$

Следовательно, существует бесконечное множество прообразов точки $\omega \in \mathbb{C}, \omega \neq 0, \omega \neq \infty: \quad z = x + iy = \mathrm{Ln}\,\omega = \ln|\omega| + i\,\mathrm{Arg}\,\omega$.

Все они лежат на прямой, параллельной оси Oy, на расстоянии 2π один от другого. Поэтому отображение $\omega = e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ является однозначным, но не взаимно однозначным. ▯

$$\boxed{\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k,\; k \in \mathbb{Z},\; \arg z \in (-\pi, \pi]}$$

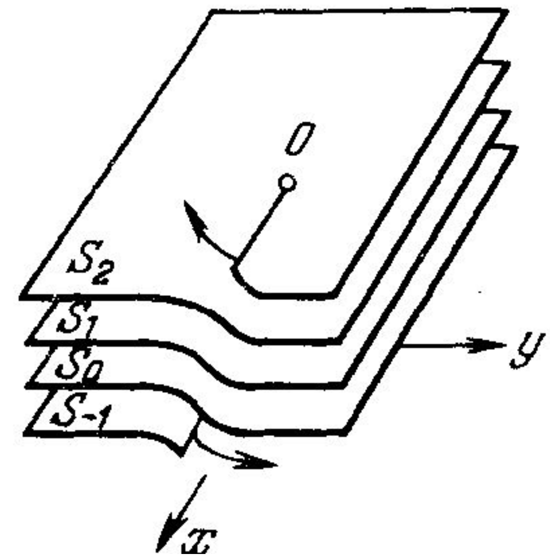
7) Любая область, не содержащая двух разных точек, в которых действительные части совпадают, а мнимые отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, будет областью однолистности показательной функции $z \mapsto e^z$.

Разобьем плоскость z на горизонтальные полосы шириной 2π: $M_k = \{z \mid 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Каждая такая полоса отображается показательной функцией на множество

$$G_R = \{(\rho, \varphi) \mid 0 < \rho < +\infty, 2k\pi < \varphi < 2(k+1)\pi\},$$

т.е. на плоскость ω с разрезом по положительной действительно полуоси.



Поверхность Римана многозначной функции $z = \operatorname{Ln}\omega$, являющейся обратной к показательной $\omega = e^z$. Каждая плоскость соответствует полосе однолистности.

$$\omega = u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ln}\omega = \ln|\omega| + i(\arg\omega + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Точки 0 и ∞ – точки разветвления бесконечного порядка.

В любой односвязной области D^*, не содержащей точек 0 и ∞, можно построить счетное множество однозначных функций, по отношению к которым функция $z \mapsto e^z$ будет обратной.

Общая показательная функция $\omega = p^z \overset{df}{=} e^{z \operatorname{Ln} p}, \ p \in \mathbb{C}$

Для получения отдельной ветви функции фиксируем одно из значений $\operatorname{Ln} p$. Пусть $\operatorname{Ln} p = c$, тогда e^{cz} – однозначная аналитическая функция. Главному значению $\operatorname{Ln} p$ $(k = 0)$ соответствует главное значение показательной функции.

По какой бы замкнутой спрямляемой кривой не двигаться, после полного обхода значение ω_k останется прежним для фиксированного k. Многозначная функция p^z не имеет точек разветвления и представляет собой совокупность отдельных, не связанных между собой аналитических функций.

Общая степенная функция $\omega = z^p$

$$\omega = z^p = |z|^p \left(\cos(p\varphi) + i\sin(p\varphi)\right) = |z|^p e^{ip\varphi},\ \ \varphi \in \operatorname{Arg} z\,.$$

Если $p = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, где m и n – взаимно простые, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то функция ω в каждой точке $z \neq 0$ имеет n разных значений и в любой односвязной области, не содержащей 0 и ∞, можно выделить n однозначных ветвей. Следовательно, $z = 0$ и $z = \infty$ – точки разветвления $(n-1)$-ого порядка многозначной функции $\omega = z^p$.

Если $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то в каждой точке $z \neq 0$, $z \neq \infty$ существует сколь угодно много значений z^p. В любой односвязной области, не содержащей точек 0 и ∞, существует бесконечное множество однозначных ветвей многозначной функции $\omega = z^p$.

Если $p \in \mathbb{C}$, то $z^p \overset{df}{=} e^{p\operatorname{Ln} z} = e^{p\ln z} e^{ip2k\pi}$.

Пример.

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}=\left[\operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)=i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}\right]=$$

$$=e^{(1+i)\operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}=e^{(1+i)i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}=e^{\left(\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}=$$

$$=e^{\left(\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)=$$

$$=e^{\left(\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{\left(\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

При $k=0$ получаем главное значение $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{\pi/4}$ числа $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$

$$z^p \overset{df}{=} e^{p\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{p\ln z} e^{ip2k\pi},\ z \neq 0,\ z \neq \infty,\ p \in \mathbb{C}\ .$$

Замечание 1. Так как $\mathrm{Ln}\,z$ – многозначная функция, то и общая степенная функция также многозначная. Точкой разветвления является точка $z = 0$.

Замечание 2. Для степенной функции с произвольным показателем правила сложения показателей при умножении степеней, а также правило умножения показателей при возведении степени в степень не работает:

$$z^{p_1} z^{p_2} = e^{p_1 \mathrm{Ln}\,z} e^{p_2 \mathrm{Ln}\,z} = e^{p_1 \mathrm{Ln}\,z + p_2 \mathrm{Ln}\,z} \neq e^{(p_1 + p_2)\mathrm{Ln}\,z} = z^{p_1 + p_2}$$

$$\left(z^p\right)^q = \left(e^{p\mathrm{Ln}\,z}\right)^q = e^{q\left(p\mathrm{Ln}\,z + 2k\pi i\right)} \neq e^{qp\mathrm{Ln}\,z}$$

Функция Жуковского $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Отображение есть композиция отображений

$$\omega_1 = \frac{z-1}{z+1}, \quad \omega_2 = \omega_1^2, \quad \omega = \frac{\omega_2 + 1}{1-\omega_2}.$$

Функция Жуковского дифференцируема в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$.

1) Первое и последнее отображения – дробно-линейные $\Rightarrow$ конформные.

Отображение ω_2 удваивает углы в точках $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = \infty$, которым отвечают точки $z = \pm 1$.

$\Rightarrow$ Функция Жуковского удваивает углы в точках $z = \pm 1$ $\Rightarrow$ не является конформным отображением в этих точках.

2) В точке $z = 0$ отображение конформно, так как

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \left.\frac{2\left(1-z^2\right)}{\left(z^2+1\right)^2}\right|_{z=0} \neq 0.$$

Конформность в точке $z = \infty$ вытекает из равенства $\omega(z) = \omega\left(\frac{1}{z}\right)$.

$\forall z \neq \pm 1 \ \omega' \neq 0 \ \Rightarrow$ отображение $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно в $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$.

Условия однолистности

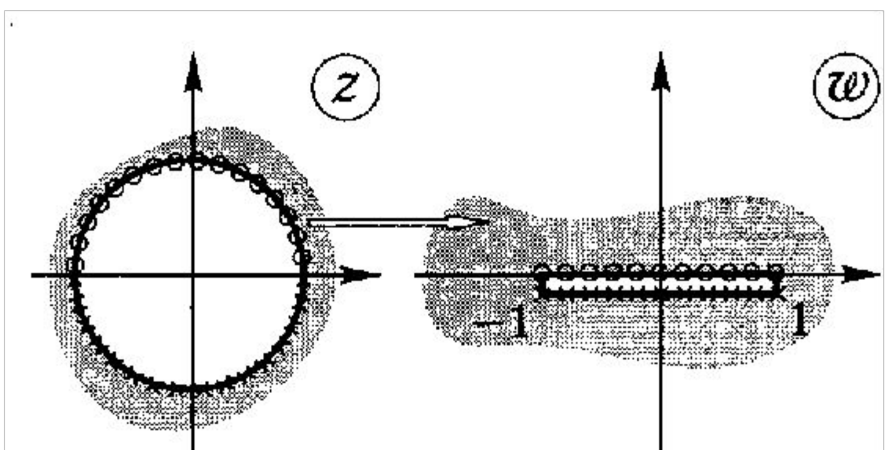
Для однолистности функции Жуковского в области D необходимо и достаточно, чтобы D не содержала такой пары точек $z_1 \neq z_2$, что $z_1 z_2 = 1$.

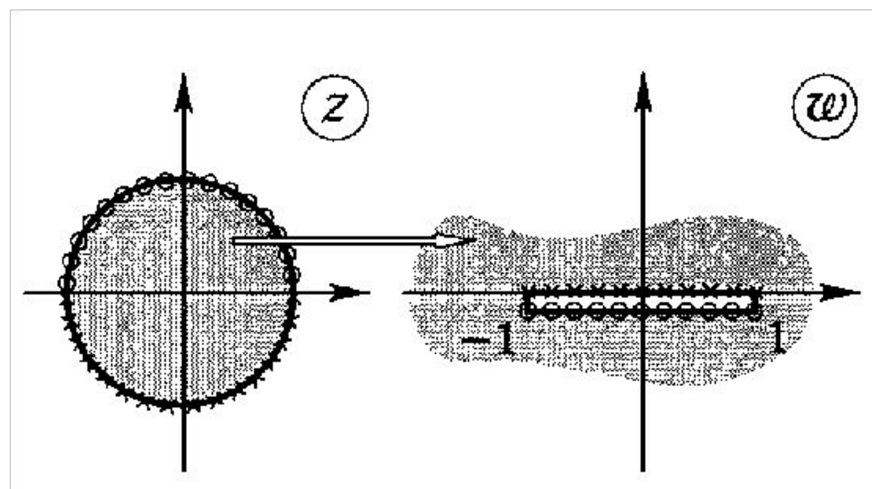
▯ $z_1, z_2 \in$ ▯ , $z_1 \neq z_2$, $\omega(z_1) = \omega(z_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = 1.$$ ▯

Примеры однолистных областей: $|z| < 1$, $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Окружность $|z| = 1$ делит плоскость z на две области однолистности: G_1 и G_2:



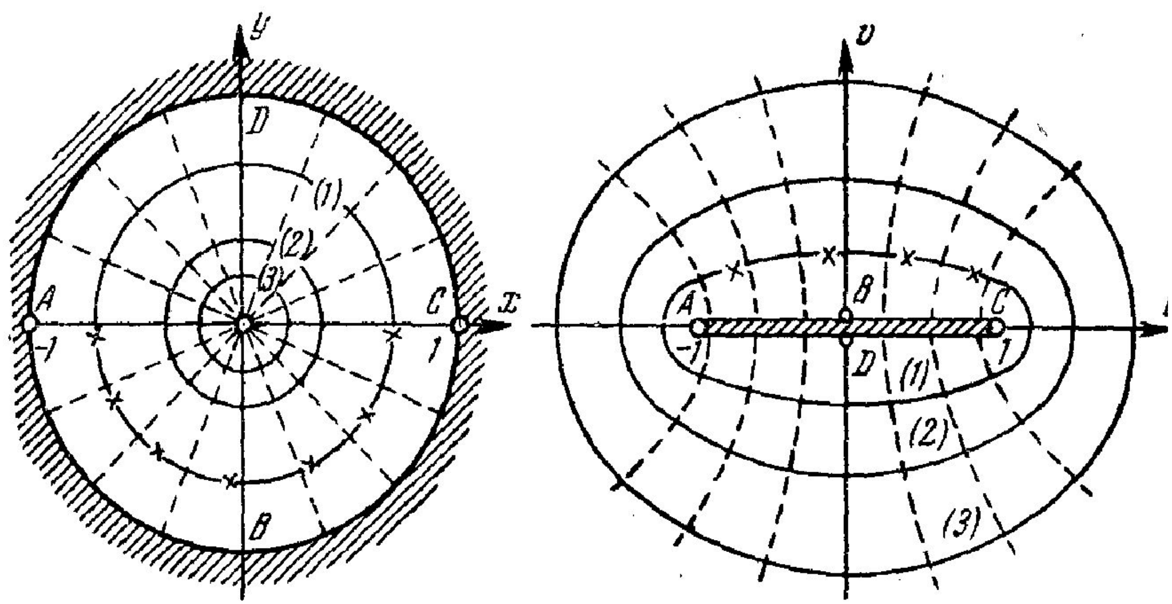


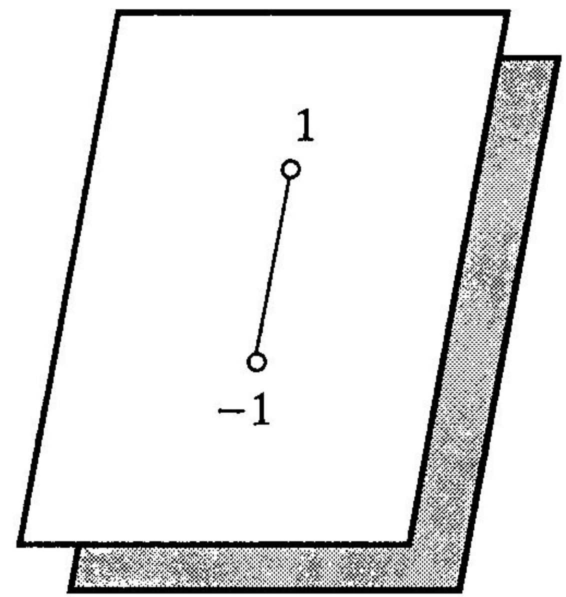
Пусть $z = re^{i\varphi}$, $\omega = u + iv$, тогда $u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi$, $v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Окружность $|z| = r_0 \neq 1$ отображается в

эллипс с фокусами в точках ± 1 и полуосями $a = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$, $b = \dfrac{1}{2}\left|r - \dfrac{1}{r}\right|$.

Между точками окружности и эллипса существует взаимно однозначное соответствие. При $r_0 > 1$ направления их обходов совпадают, а при $r_0 < 1$ они противоположны. При $r_0 \to 0$ ($r_0 \to \infty$) $a \to \infty$, $b \to \infty$, а при $r_0 \to 1$ $a \to 1$, $b \to 0$.





Функция, обратная к функции Жуковского, имеет вид $z = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$ и является многозначной с точками разветвления первого порядка $\omega = \pm 1$.

Тригонометрические функции $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Сиойства:

1. При $z = x$ $\sin z$ и $\cos z$ совпадают с функциями действительного аргумента $\sin x$ и $\cos x$.

2. $\sin z$ и $\cos z$ – дифференцируемы в $\mathbb{C}$ и

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$, ...

4. $\sin z$ и $\cos z$ – периодические с основным периодом 2π.

5. $\sin z$ – нечетная функция, $\cos z$ – четная функция.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \ \operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz$$
$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz$$

$$\omega = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\omega_1 = iz$ – поворот

$\omega_2 = e^{\omega_1}$ – показательная функция

$\omega = \frac{1}{2}\left(\omega_2 + \frac{1}{\omega_2}\right)$ – функция Жуковского

$$\omega = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$\omega_1 = z - \frac{\pi}{2}$ – параллельный перенос

$\omega_2 = i\omega_1$ – поворот

$\omega_3 = e^{\omega_2}$ – показательная функция

$\omega = \frac{1}{2}\left(\omega_3 + \frac{1}{\omega_3}\right)$ – функция Жуковского

Области однолистности – вертикальные полосы, шириной π.

Обратные многозначные функции:

$$z = \mathrm{Arccos}\,\omega$$

$$\omega_2 = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

$$\omega_1 = \mathrm{Ln}\,\omega_2$$

$$z = \frac{\omega_1}{i} = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}\right)$$

$$z = \mathrm{Arcsin}\,\omega$$

$$\omega_3 = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

$$\omega_2 = \mathrm{Ln}\,\omega_3$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{i} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}\right)$$

$$z = \frac{\pi}{2} + \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Дифференцируемы всюду за исключением тех точек, в которых знаменатели обращаются в 0.

Периодические, с действительным основным периодом π.

$$\omega_1 = 2iz, \ \ \omega_2 = e^{\omega_1}, \qquad \omega_1 = 2iz, \ \ \omega_2 = e^{\omega_1},$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 - 1}{\omega_2 + 1}, \ \ \omega = -i\omega_3 \qquad \omega_3 = \frac{\omega_2 + 1}{\omega_2 - 1}, \ \ \omega = i\omega_3$$

Области однолистности – вертикальные полосы, шириной π.

Обратные многозначные функции:

$$z = \operatorname{Arctg}\omega \qquad z = \operatorname{Arcctg}\omega$$

$$\omega_3 = i\omega, \ \omega_2 = \frac{1+\omega_3}{1-\omega_3}, \ \omega_1 = \operatorname{Ln}\omega_2, \qquad \omega_3 = -i\omega, \ \ \omega_2 = \frac{1+\omega_3}{\omega_3 - 1}, \ \ \omega_1 = \operatorname{Ln}\omega_2,$$

$$z = \frac{1}{2i}\omega_1 = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+i\omega}{1-\omega} \qquad z = \frac{1}{2i}\omega_1 = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{i\omega - 1}{i\omega + 1}$$