Лекция 32. Функции комплексного переменного, понятие предела функции, непрерывность. Производная функции комплексного переменного. Условие Коши-Римана, понятие аналитичности функции в точке.

§ 1. Теория комплексных чисел.

<u>Определение</u> (комплексных чисел):
Выражение вида $z=a+bi$, где a,b – действительные числа, i – символ называется комплексным числом, если для любого из выражений $z_1 = a_1 + b_1 \cdot \bar{i}$, $z_2 = a_2 + b_2 \cdot \bar{i}$ выполняются следующие свойства:

1) $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$a_1 = a_2, \ b_1 = b_2$$

$$a_1 + 0 \cdot \bar{i} = a_1; \ 0 + b_1 \cdot \bar{i} = b_1 \bar{i}; \ 1 \cdot i = i$$

2) $$z_1 \pm z_2 \overset{def}{=} (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

Сумма (разность) комплексных чисел есть комплексное число, вычисляемое по соответствующей формуле.

3) $$z_1 \cdot z_2 \overset{def}{=} (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

4) $$\frac{z_1}{z_2} \overset{def}{=} \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

При этом на множестве комплексных чисел выполняется закон коммуникативности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \; z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Ассоциативности:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

Закон дистрибутивности:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

<u>Смысл символа *i*</u>

Рассмотрим число $i = 0 + 1 \cdot i$

$$i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) \overset{def}{=} (0 - 1) + (0 + 0)i = -1$$

Символ *i* – символ, квадрат которого = -1.

С комплексными числами нужно работать как с обычными буквенными выражениями, помня что $\boxed{i^2 = -1}$.

Для того, чтобы удобно было работать с комплексными числами введем понятие комплексно-сопряженного числа.

Число $\overline{z} = a\text{-}bi$ называется комплексно-сопряженным числу $z=a+bi$, то есть они отличаются знаком, стоящим при символе *i*.

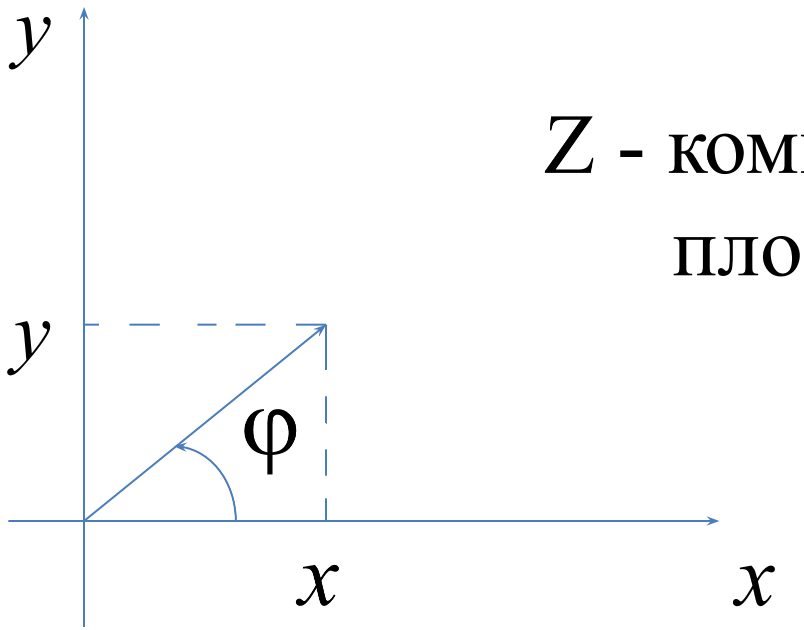
Рассмотрим комплексное число $z = x + yi$.

x - действительный часть комплексного числа

$x = \text{Re}\, Z$

y - мнимая часть комплексного числа

$y = \text{Im}\, Z$



Z - комплексная плоскость

§ 2. Формы записи комплексного числа. Геометрические интерпретации множеств комплексных чисел.

На комплексной плоскости комплексное число можно обозначить точкой или вектором.

По **определению** **модулем** комплексного числа называется:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad |z| > 0$$

и является действительным числом.

Геометрический смысл модуля комплексного числа – длина вектора, обозначающего комплексное число.

<u>Определение.</u> Аргументом комплексного числа называется угол ϕ, обозначаемый символом $\phi = \arg z$ и отсчитываемый от оси OX против часовой стрелки. Направление отсчета против часовой стрелки принимается за положительное, по часовой стрелке – за отрицательное.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ – комплексно-сопряженные. Пользуясь формулой для умножения двух комплексных чисел, имеем:

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

С учетом последнего выражения, формулу для деления двух комплексных чисел можно записать в виде:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Чтобы разделить два комплексных числа, достаточно числитель и знаменатель умножить на число, комплексно сопряженное знаменателю.

Пример.

$$\frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{5} = \frac{1+2i+i-2}{5} = \frac{3i-1}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Вспоминая связь между декартовой и полярной системой координат, положение комплексного числа можно задать углом ϕ, отсчитываемым от оси OX против часовой стрелки и ρ - длиной вектора.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

где: $\rho > 0$, ϕ - любое действительное число.

Учитывая эти формулы, комплексное число можно записать в виде:

$$z = x + iy = \rho\cos\phi + i\rho\sin\phi = \rho(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Это тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Выясним смысл ρ и ϕ.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \overset{def}{=} |z|$$

Угол ϕ определяется из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Если ϕ_0 – решение системы уравнений, то

$\phi = \phi_0 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Угол ϕ определяется неоднозначно

$$\phi = \arg z.$$

На практике, для определения угла ϕ используются следующие формулы.

Так как:

$$\mathrm{tg}\phi = y/x \;\rightarrow\; \phi = \mathrm{arctg}(y/x)$$

Но при этом оказались потерянными решения $\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 + \pi k$.

Поэтому, окончательное выражение для аргумента комплексного числа, запишем следующим образом, с учетом расположения комплексного числа относительно координатных осей:

$$\phi_0 = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0 \ \text{(I, IV четверти)} \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x), & x < 0,\ y > 0 \ \text{(II четверть)} \\ -\pi + \operatorname{arctg}(y/x), & x < 0,\ y < 0 \ \text{(III четверть)} \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

$$\phi = \arg z = \phi_0 + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Для того, чтобы однозначно определять значения аргумента комплексного числа вводят понятие главного значения аргумента, за которое принимается значение угла ϕ_0, находимого по формулам, записанным выше и которое меняется в пределах:

$$-\pi < \phi_0 \le \pi$$

Таким образом, с учетом определения модуля комплексного числа и аргумента, комплексное число может быть записано в **тригонометрической форме записи:**

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Чтобы упростить работу с комплексными числами, Эйлер предложил ввести обозначение:

$$\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}.$$

Тогда получается **показательная форма записи** комплексного числа:

$$z = |z|e^{i\phi}.$$

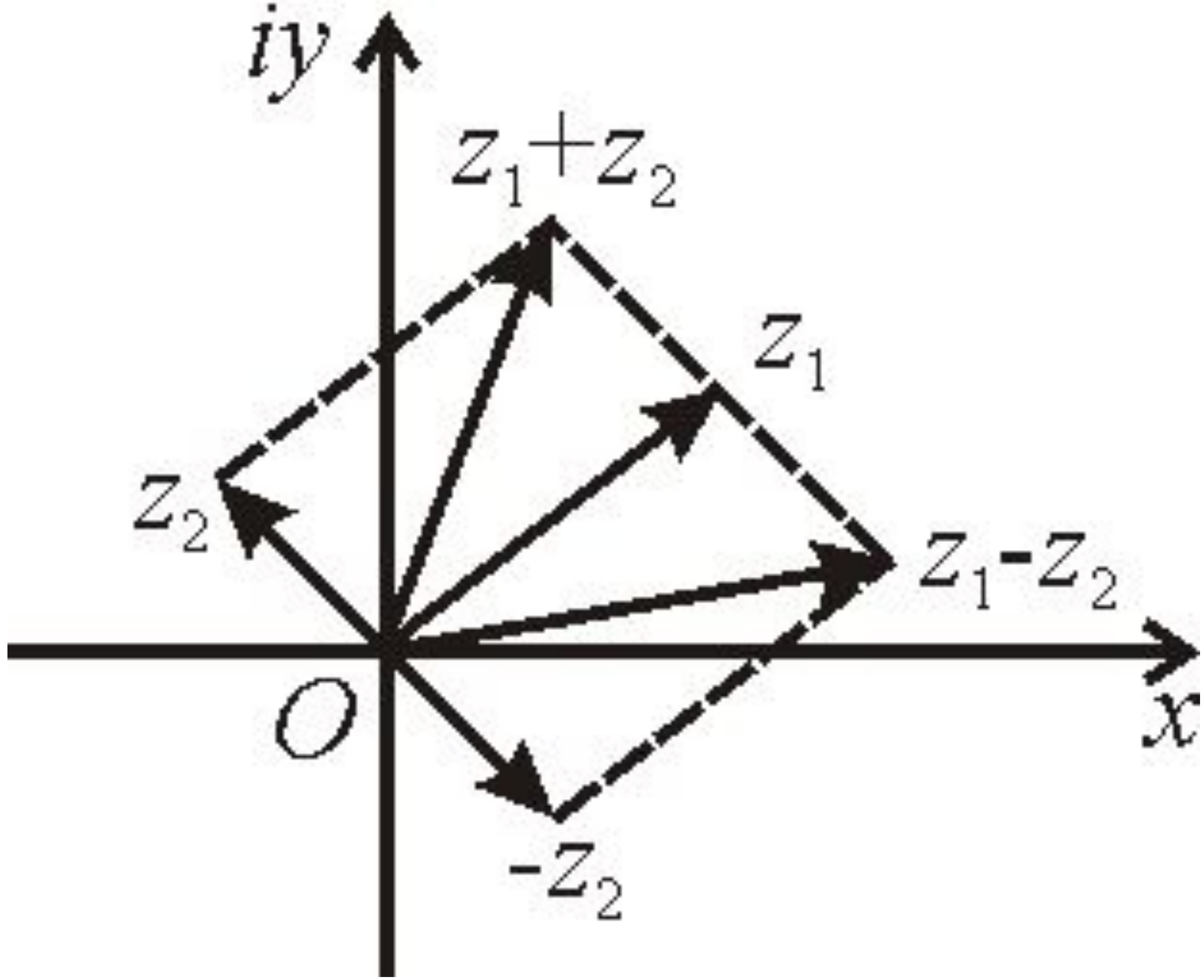
Если $\phi \to -\phi$, то $z \to \bar{z} = |z|e^{-i\phi}$.

Рассмотрим две формулы:

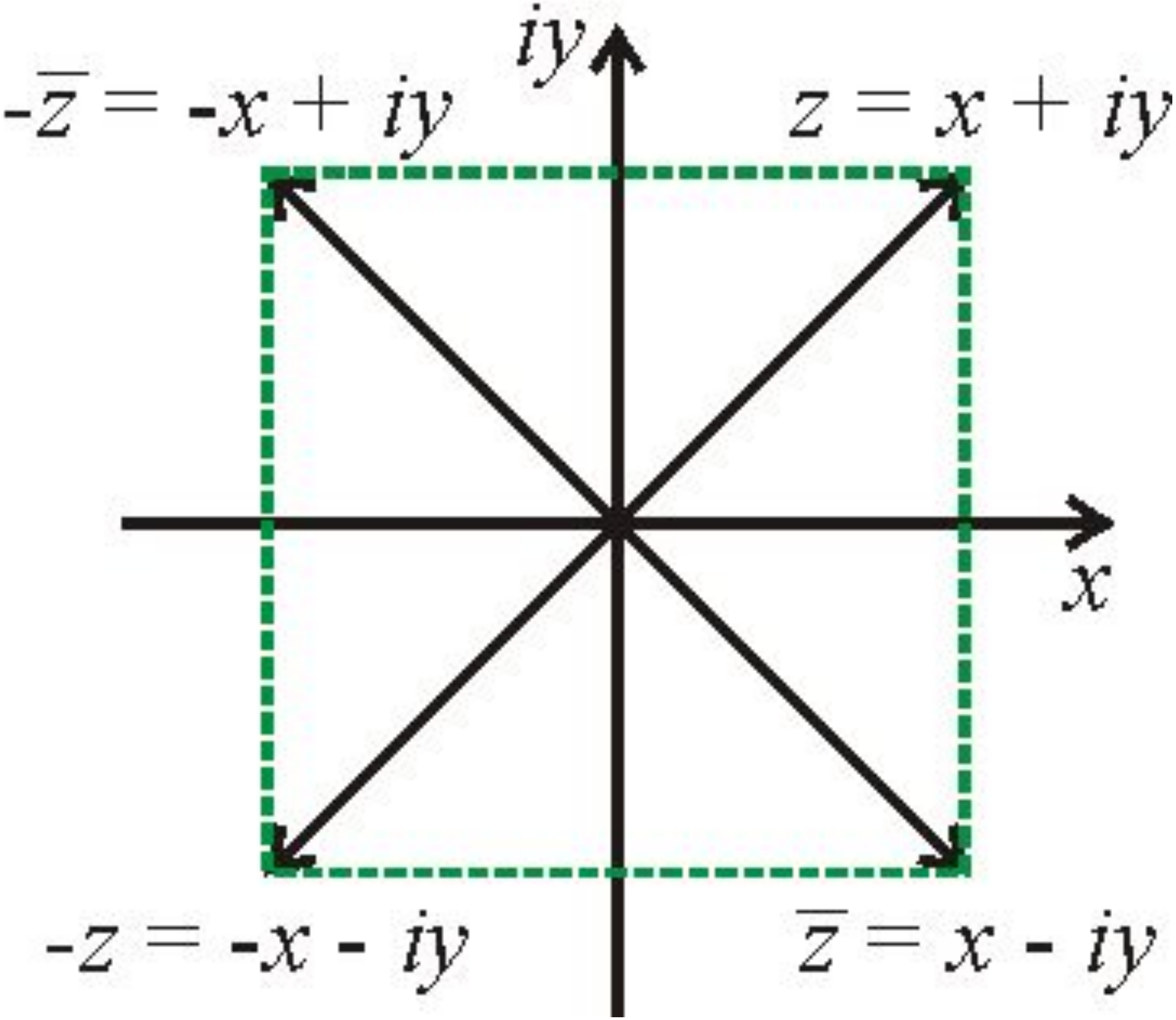
$$\left.\begin{aligned} e^{i\phi} &= \cos\phi + i\sin\phi \\ e^{-i\phi} &= \cos\phi + i\sin\phi \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+ \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = (e^{i\phi} + e^{-i\phi})/2. \\ &- \quad \Rightarrow \quad \sin\phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i. \end{aligned}$$

Дадим геометрическую интерпретацию операциям сложения, вычитания, умножения, деления комплексных чисел.

Рассмотрим два комплексных числа z_1 и z_2. Эти комплексные числа на комплексной плоскости могут быть изображены векторами. Сумма $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел может быть найдена путем сложения z_1 и z_2 как векторов по правилу параллелограмма. Разность $z_1 - z_2$ строится как сумма z_1 и $-z_2$.



Расстояние между точками z_1 и z_2 равно:
$|z_1 - z_2|$.



-z соответствует z относительно начала координат и т.д. Все симметрии понятны из рисунка.

Для умножения и деления комплексных чисел нужно воспользоваться показательной формой записи.

$$z_1 = |z_1|e^{i\phi_1},\ z_2 = |z_2|e^{i\phi_2}.$$

1. Произведение: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$.

Доказательство.

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

$e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2} = (\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = (\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2) = \cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2) =$
$= e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$.

Ч.т.д.

2. Частное: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

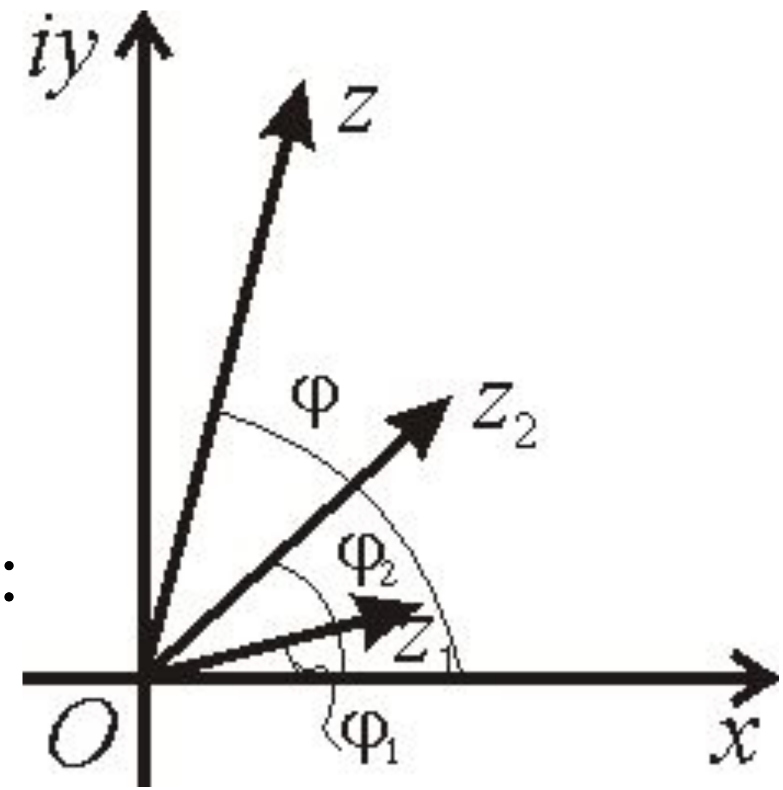
Доказательство. Самостоятельно.

3. Возведение в степень:

$z^n = |z|^n \cdot e^{in\phi}$.

n – натуральное.

Из свойства 1 следует, что при умножении комплексных чисел, модули перемножаются, а аргументы складываются:



$|z| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$\arg z = \phi_1 + \phi_2$.

При делении модули комплексных чисел делятся, а аргументы вычитаются:

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ , \quad \arg z = \phi_1 + \phi_2.$$

Свойство 3 нужно для того, чтобы получить формулу Муавра:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$

Она связывает n-тую $(\cos\phi + i\sin\phi)^n$ с $\cos n\phi$ и $\sin n\phi$.

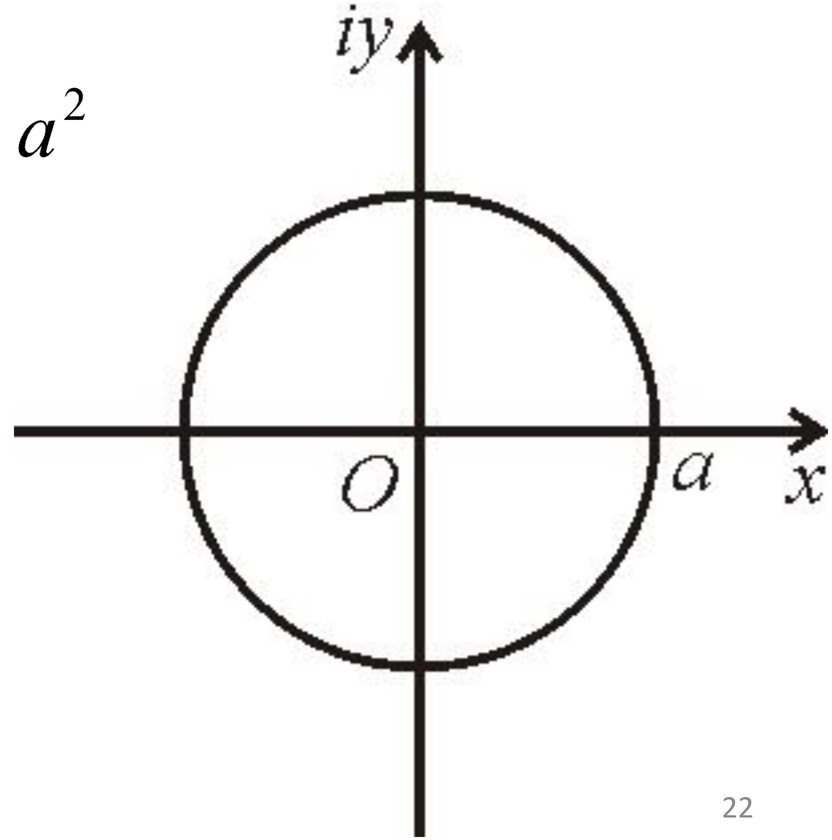
§ 3. Геометрическая интерпретация множеств комплексных чисел.

1. Пусть множество комплексных чисел Z удовлетворяет условию:

$|z| = a, \; a > 0, \;\; a$ - действительное число.

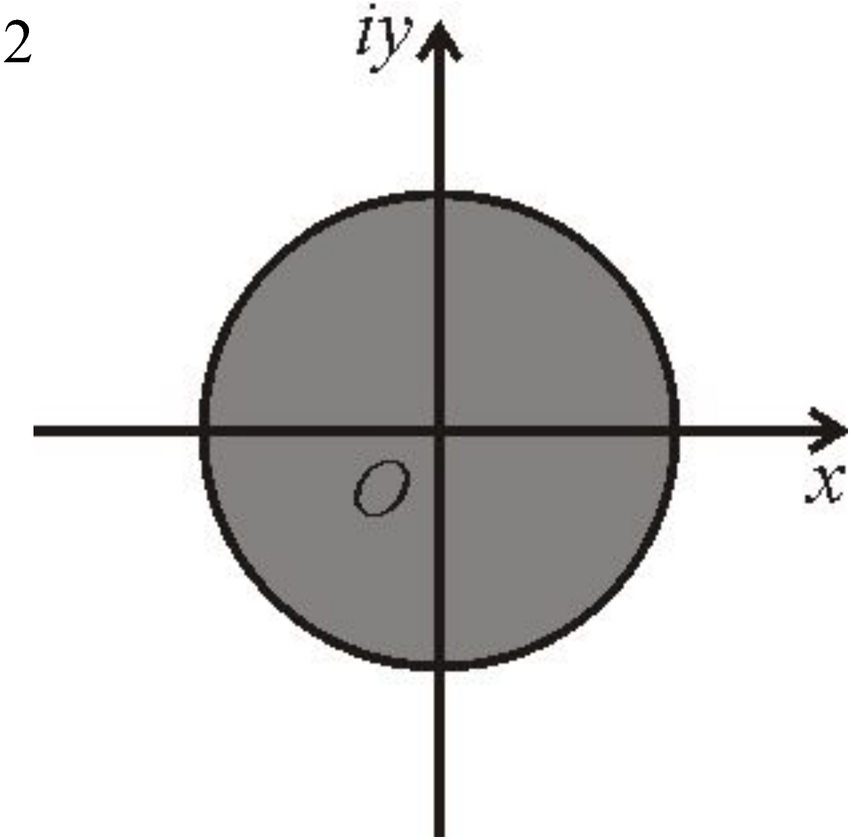
$$a = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2$$

Это окружность.



2. $|z| \le a \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \le a^2$

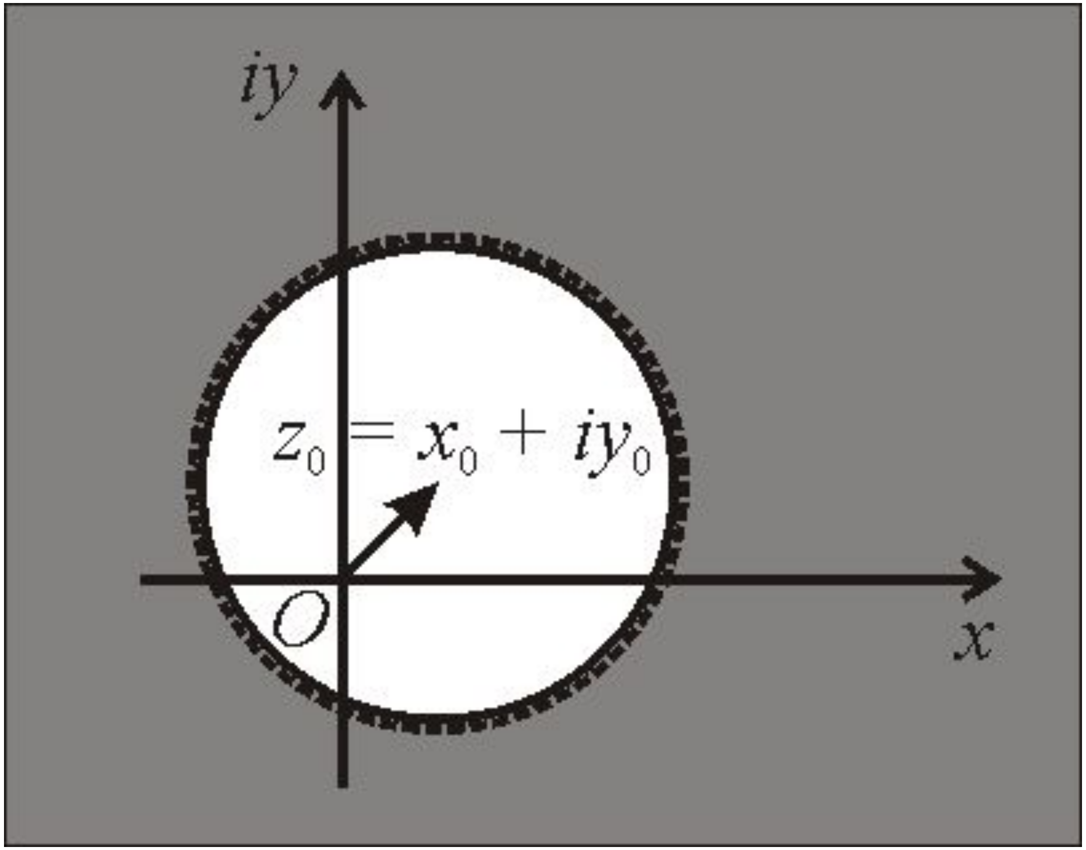
Это круг,
включая окружность.



3. $|z - z_0| > r$, $z_0 = x_0 + iy_0$- фиксированная точка.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$$

Это вся комплексная плоскость, за исключением круга и окружности.



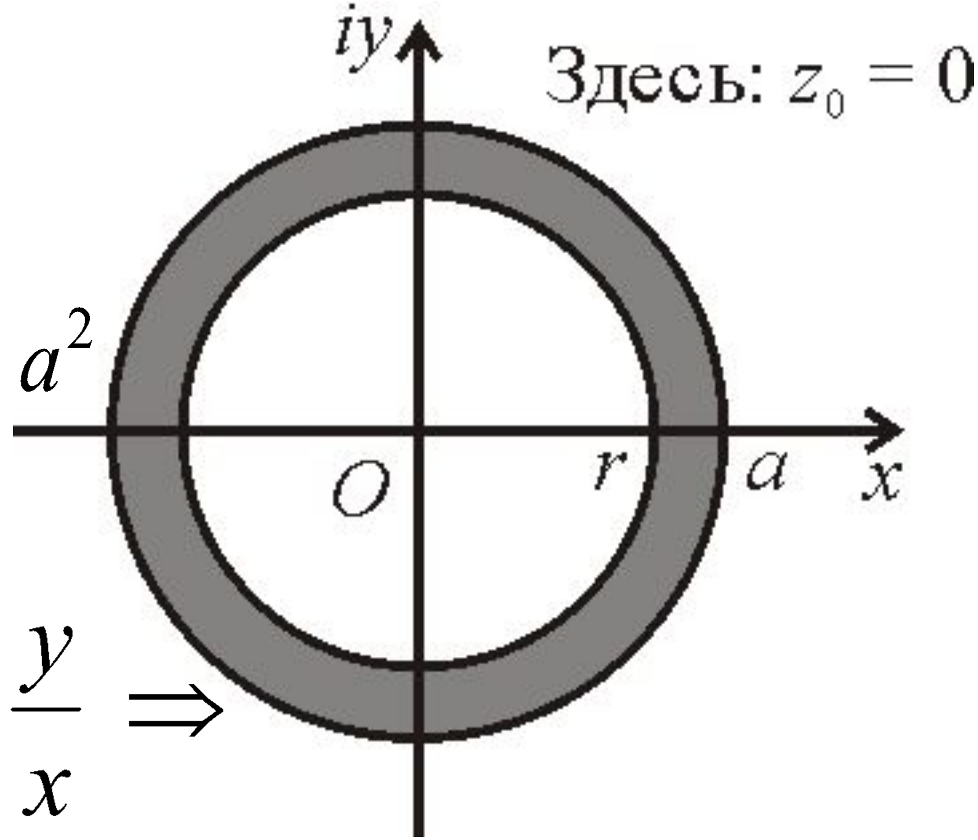
iy
$z_0 = x_0 + iy_0$
O
x

4.

$$r \le |z - z_0| \le a$$

$$r^2 \le (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le a^2$$

Это кольцо.

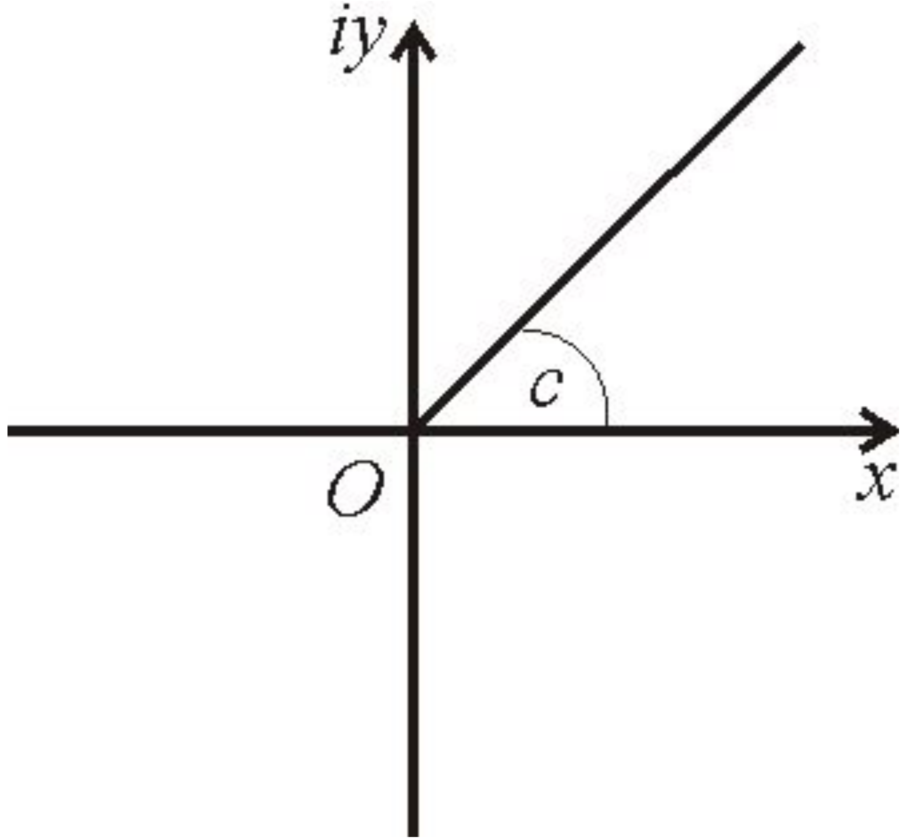


5.

$$\arg z = c \Rightarrow \ \varphi = arctg\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$tg\, c = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \ y = tg\, c \cdot x$$

Это множество точек представляет собой луч, выходящий из начала координат, расположенный под углом *c* к оси *x*.


iy
c
O
x

§ 4. Извлечение корня из комплексного числа.

Пусть дано комплексное число $w = u + iv$

Корнем n-той степени из комплексного числа w, обозначаемый $\sqrt[n]{w}$ называется комплексное число z такое, что $z^n = w$.

Рассмотрим уравнение $z^n = w$. Пусть w – комплексное число $w = \rho e^{i\theta}$,а $z = re^{i\varphi}$

Тогда $z^n = r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда:

$$r^n = \rho; \left(n\varphi + 2\pi k = \theta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$$

$$n\varphi = \theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Добавляем к θ $2\pi k$, так как аргумент однозначно не определяется.

$$\begin{cases} z = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Покажем, что среди полученного бесконечного множества существует только n различных чисел, которые принимаются за значение корня n-той степени из комплексного числа.

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}, \qquad k = 0.$$

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}, \quad k = 1.$$

Модули всех комплексных чисел одинаковы и равны $\sqrt[n]{\rho}$. Отличаться они будут только своими аргументами.

$$\varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot 2 \quad k = 2$$

z_{n-1} имеет аргумент $\varphi_{n-1} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}(n-1)$

$$z_n = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot n\right)} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right)} =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right)\right) =$$

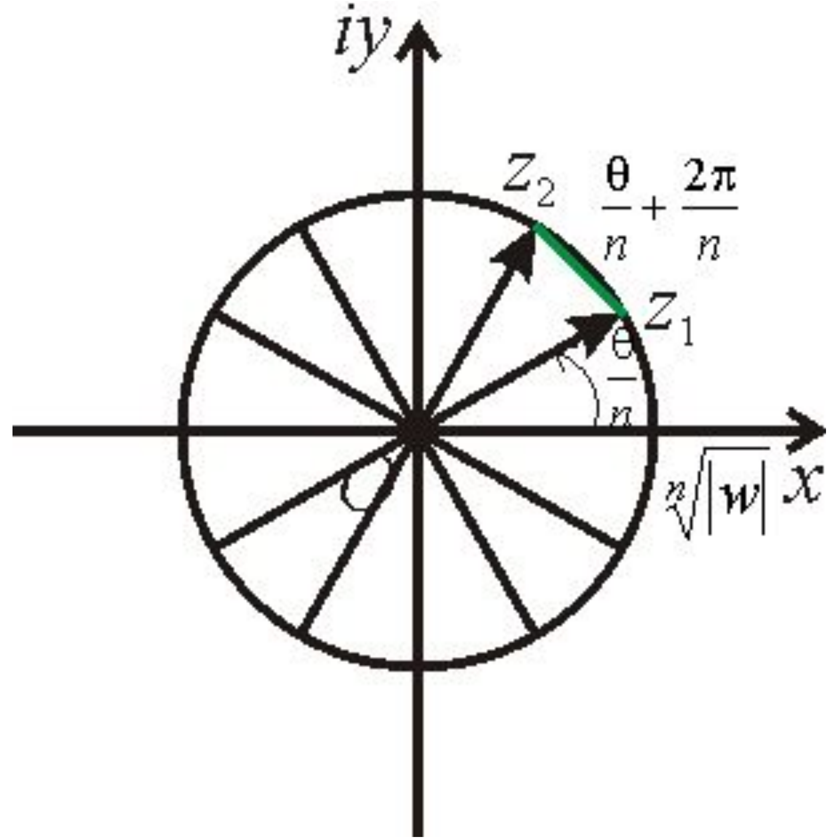
$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \sin\frac{\theta}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} = z_0$$

$$z_{n+1} = z_1$$

Таким образом, если дано комплексное число *w*, то корней *n*-той степени из комплексного числа *w, n* и вычисляться они будут по следующей формуле

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Все значения находятся в вершинах вписанного в окружность *n* – угольника и могут быть интерпретированы следующим образом:

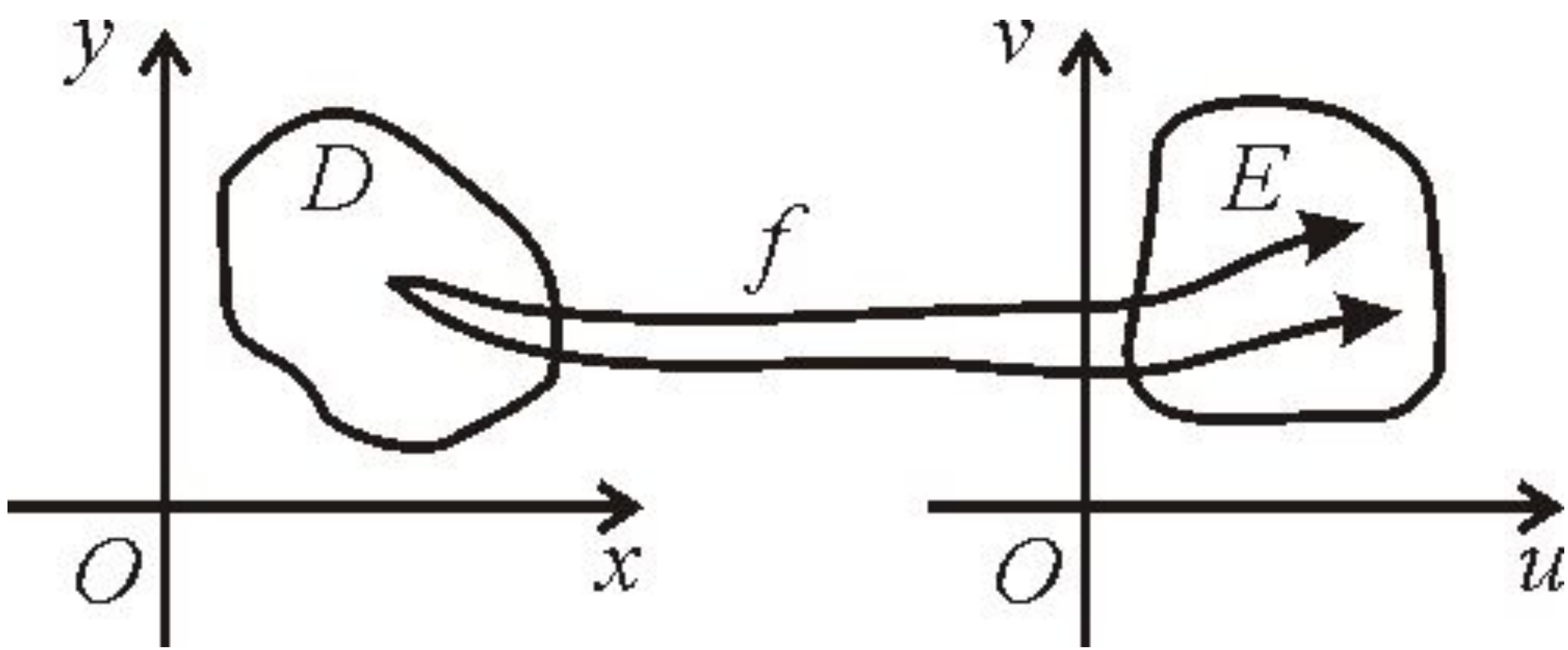


iy
Z_2
$\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}$
Z_1
$\frac{\theta}{n}$
$\sqrt[n]{|w|}$
x

§ 5. Функции комплексного переменного.

Пусть есть 2 множества: D комплексных чисел $z = x + iy$ и E комплексных чисел $w = u + iv$

Изобразим множества на комплексных плоскостях:



Если каждому комплексному числу множества z по некоторому закону f поставлено в соответствии хотя бы одно комплексное число,

$$W \in E$$

то говорят, что на множестве D задана комплексная функция $W = f(z)$.

D – область определения. E – область изменения.

Так как $W = u + iv$, то задание комплексной функции $W = f(z)$ равносильно заданию комплексной функции $W = u(x,y) + iv(x,y)$ то есть задание комплексной функции равносильно заданию функции комплексного переменного. Рассмотрим функцию $W = z^2$,

где $z = x + iy$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{i2xy}_{v}$$

<u>Определение.</u> (однозначной функции)

Если каждому числу $z \in D$ по некоторому закону f поставлено в соответствие одно и только одно число $W \in E$, то говорят что задана однозначная функция комплексного переменного $W = f(z)$

<u>Пример.</u>

$W = z^2$ однозначная функция для области определения, представляющей верхнюю половину полуплоскости.

$W = \sqrt[2]{z}$ - неоднозначная функция, так как ему поставлено в соответствие два значения.

§ 6. Предел функций комплексного переменного.

Пусть задана функция комплексного переменного $f(z)$ определенная в окрестности точки z_0, кроме может быть самой точки.

<u>**Определение.**</u> **(предела функции комплексного переменного)**

Число A (комплексное) называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если $\forall \varepsilon > 0$

(действительного, сколь угодно малого)

$\exists\delta_{\varepsilon} > 0$ (действительное), такое, что: для любого z удовлетворяющего неравенству

$$0 < |z - z_0| < \delta_{\varepsilon}$$

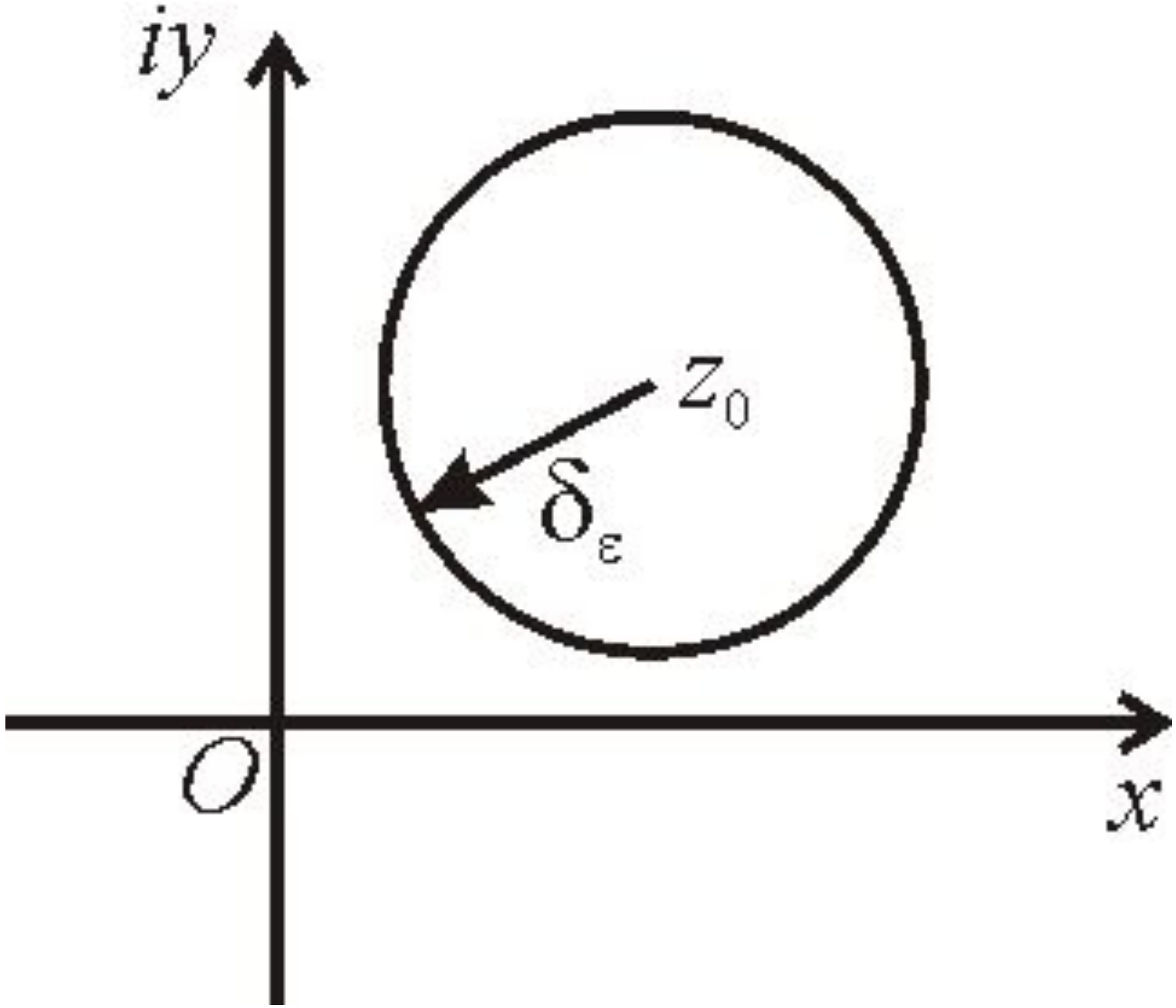
выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$

При этом пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$

Разберем, что в определении означает запись:

$\forall\ z$, удовлетворяющих $0 < |z - z_0| < \delta_{\varepsilon}$

Исходя из геометрического смысла, множество чисел, удовлетворяющих неравенству есть круг, радиуса δ_ε с выколотой точкой z_0. Когда $z \to z_0$ это означает, что круг стягивается в точку, при этом не важно, каким образом $z \to z_0$. Исходя из этого предел функции комплексного переменного не зависит от способа стремления $z \to z_0$.



iy
z_0
δ_ε
O
x

Чтобы показать, что предел функции не существует, пытаются найти предел при различных способах стремления $z \to z_0$. Если получившиеся числа различны, то говорят, что предел в данном случае не существует.

Так как задание функции $f(z)$ <=> заданию выражения $u(x,y) + iv(x,y)$ то есть заданию двух функций действительного переменного, тогда:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

<u>Теорема.</u> (необходимое и достаточное условие существования предела функции комплексного переменного).

Для того, чтобы существовал предел ФКП *f(z),* при $z \to z_0$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно существовали пределы функций , $u(x,y), v(x,y)$ при парах $(x,y) \to (x_0, y_0)$ где *u,v* – функции действительного переменного:

Для функций комплексного переменного выполняются все теоремы о пределах, доказанные для функций действительной переменной.

Если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ и $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z)$,

1. $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \pm \varphi(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z)$

2. $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f \cdot \varphi = \lim\limits_{z \to z_0} f \cdot \lim\limits_{z \to z_0} \varphi$

3. $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f}{\varphi} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f}{\lim\limits_{z \to z_0} \varphi}, \varphi(z_0) \neq 0$

4. **<u>Теорема.</u> (об асимптотическом разложении функции, имеющей предел)**

Для того, чтобы существовал предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ была представлена в виде:

$$f(z) = A + \alpha(|z - z_0|)$$

<u>Замечание.</u>

α – бесконечно малая функция ФКП, то есть

$$\lim\limits_{z \to z_0} \alpha = 0$$

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

расстояние между двумя точками комплексной плоскости.

Для ФКП вводится понятие бесконечно малой (**б. м.**) и бесконечно большой (**б.б.**) ФКП. При нахождении пределов ФКП можно пользоваться понятием эквивалентных бесконечно малых.

§ 7. Понятие непрерывности ФКП.

Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности точки z_0, и в самой точке.

<u>Определение.</u> (непрерывности ФКП в точке)

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0,

Если $\forall\varepsilon > 0$ (действительных) $\exists\delta_\varepsilon > 0$ (действительное)

такое, что для любых Z удовлетворяет неравенству

$$|z - z_0| < \delta_\varepsilon$$

выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при

этом пишут: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Так как задались ФКП соответствует заданию двух

функций действительного переменного, то понятие непрерывности ФКП в точке соответствует непрерывности двух функций действительного переменного в этой точке.

<u>Теорема.</u> (Необходимое и достаточное условие непрерывности ФКП в точке)

Для того, чтобы ФКП $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ была непрерывна в точке $z_0=x_0+iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y),v(x,y)$ были непрерывны в точке x_0,y_0.

Для ФКП выполняются все теоремы, доказанные ранее для функций действительного переменного.

Если $f(z), \varphi(z)$ непрерывны в точке z_0, то:

Сложная функция $f(\varphi(z))$ непрерывна в точке z_0.

§ 8. Дифференцируемость ФКП в точке.

Пусть ФКП $f(z)$ определена в окрестности точки z_0 и самой точке. Рассмотрим значение ФКП в точке z_0 и точке $(z_0 + \Delta z), \Delta z$ - произвольное комплексное число.

Предполагается, что все значения существуют.

Рассмотрим $$\frac{\Delta W}{\Delta z} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, z \neq 0$$

Это отношение представляет собой некоторое комплексное число.

Определение. **(производной ФКП в точке)**

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

то он называется производной функции в точке и

обозначается $$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0.

Замечание.

Производная в точке z_0 не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$. Это следует из того, что производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

Пример:

$$f(z) = z^2;$$

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^2 = z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2$$

$$\Delta W = z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2 = 2z\Delta z + \Delta z^2$$

$$(z^2)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta z \neq 0}} \frac{\Delta z(2z + \Delta z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z + 0 = 2z$$

Рассмотрим функцию: $f(z) = x - iy$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$$\Delta W = f(z+\Delta z) - f(z) = x + \Delta x - i(y+\Delta y) - x + iy =$$

$$= \Delta x - i\Delta y$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \begin{cases} \Delta y = 0, \\ \Delta x \neq 0 \end{cases} \text{Íî} \quad \Delta x \to 0 \Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = 1 \, \text{èëè}$$

$$\begin{cases} \Delta x = 0, \\ \Delta y \neq 0 \end{cases} \text{Íî} \quad \Delta y \to 0 \Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = -1$$

Предел зависит от способа стремления, это значит

не существует $(x-iy)' \Leftrightarrow$ не существует $(\bar{z})'$

§ 9. Геометрический смысл ФКП.

Пусть дана функция

$$W=f(z) \text{ è } \exists f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z}$$

По теореме об асимптотическом разложении

функции, имеющей предел:

$$\frac{\Delta W}{\Delta z}=f'(z_0)+\alpha(|\Delta z|), \Delta z\to 0$$

$$\Delta W = f'(z_0)\Delta z + \alpha(|\Delta z|)\cdot\Delta z, \Delta z \to 0$$

С точностью до бесконечно малой второго

порядка относительно Δz можем записать

$$\Delta W = f'(z_0)\cdot\Delta z$$

Каждое из комплексных чисел входящих в

формулу запишем в показательной форме записи.

$$\Delta W = |\Delta W| e^{i\varphi} \quad ,\varphi = \arg\Delta W$$

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{i\varphi_1}; \varphi_1 = \arg f'(z_0)$$

$$\Delta z = |\Delta z| e^{i\varphi_2}; \varphi_2 = \arg\Delta z$$

$$|\Delta W|e^{i\varphi} = |f'(z_0)||\Delta z|e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}$$

$$\Downarrow$$

$$|\Delta W| = |f'(z_0)||\Delta z|$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Производная показывает во сколько раз надо увеличить Δz, чтобы получить ΔW.

Аргумент производной показывает насколько надо увеличить угол Δz, чтобы получить ΔW.

Таким образом геометрический смысл ФКП состоит в следующем:

1. Модуль производной ФКП показывает, во сколько раз нужно уменьшить или увеличить модуль приращения аргумента, чтобы получить модуль приращения функции.

2. Аргумент производной показывает, на какой угол относительно аргумента Δz нужно повернуть луч , дающий направление комплексного числа,

соответствующего приращению функции ΔW.

<u>Теорема.</u> (необходимое и достаточное условие дифференцируемости ФКП в точке)

Для того, чтобы ФКП $f(z) = u + iv$ была дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы:

1.Функции $u(x, y), v(x, y)$ были дифференцируемы в точках x_0, y_0

2. В точке x_0 выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

При этом $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)}$

Доказательство.

Необходимость:

Пусть $f(z)$ - дифференцируема в точке z_0,

$$\lim_{\Delta z \to 0} = \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

Обозначим $f'(z_0) = A + iB;\ \Delta z = \Delta x + i\Delta y$

Используя теорему об асимптотическом

разложении $\Delta f(z) - f'(z_0)\Delta z + \alpha(|\Delta z|)\cdot\Delta z$

или с учетом принятых выше обозначений:

$$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) +$$
$$+ (\alpha_1(|\Delta z|) + i\alpha_2(|\Delta z|))\cdot(\Delta x + i\Delta y)$$

Перемножая выражения, стоящие в скобках,

имеем:

$$\Delta u + i\Delta v = A\Delta x + iB\Delta x + iA\Delta y - B\Delta y +$$

$$+\alpha_1(|\Delta z|)\Delta x + i\alpha_2(|\Delta z|)\Delta x + i\alpha_1(|\Delta z|)\Delta y -$$

$$-\alpha_2(|\Delta z|)\Delta y$$

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho,\ \rho \to 0$$

когда $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$

Комплексные выражения равны тогда, когда равны действительные и мнимые части.

$$\begin{cases} \Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1(\rho)\Delta x - \alpha_2(\rho)\Delta y \\ \Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2(\rho)\Delta x + \alpha_1(\rho)\Delta y \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Эти записи означают, что функции u, v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) по определению

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = A; \dfrac{\partial u}{\partial y} = -B \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = A; \dfrac{\partial v}{\partial x} = B \end{cases}$$

Сравнивая выражения, получаем условие Коши-Римана.

<u>Достаточность:</u>

Пусть функции $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x, y) и пусть выполняются условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Тогда справедливы равенства (I), и, умножая второе уравнения равенства (I) на i, и складывая с (I) получаем:

$$\Delta u + i\Delta v = A\Delta x - B\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y) + \alpha_1(\rho)\Delta x -$$

$$- \alpha_2(\rho)\Delta y + i\alpha_2(\rho)\Delta x + i\alpha_1(\rho)\Delta y$$

$$\Delta f(z) = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1(\rho)\Delta x - \alpha_2(\rho)\Delta y +$$

$$+ i\alpha_2(\rho)\Delta x + i\alpha_1(\rho)\Delta y$$

$$\Delta f(z) = (A + iB)\Delta z + \alpha_1(\rho)\Delta x - \alpha_2(\rho)\Delta y + i\alpha_2(\rho)\Delta x +$$

$$+ i\alpha_1(\rho)\Delta y$$

§ 10. Основные свойства производной.

Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ дифференцируемы в точке z_0, то:

1. Сумма и разность функций дифференцируема в точке z_0 $f_1 \pm f_2$, причем $(f_1 \pm f_2)' = f_1' \pm f_2'$

2. $f_1 \cdot f_2$ дифференцируема в точке z_0, причем

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$$

3. $\dfrac{f_1}{f_2}$ при $f_2 \neq 0$, дифференцируема в точке z_0 и

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'\cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^{\,2}}$$

4. Если функция $f(W)$ дифференцируема в точке $W_0 = \varphi(z_0)$ а функция $\varphi(z)$ дифференцируема в точке z_0, то сложная функция $f(\varphi(z))$ будет дифференцируема в точке z_0, причем

$$[f(\varphi(z))]' = f'(W)\cdot\varphi'(z)$$

§ 11. Понятие аналитичности ФКП.

Пусть дана функция $w = f(z)$ определенная на некоторой открытой области D. Функция $w = f(z)$ аналитична на открытой области D, если она дифференцируема в любой точке $z \in D$.

Если функция аналитична на области, то у функции существуют все производные любого порядка на этой области.

Замечание.

Если говорят, что функция $f(z)$ аналитична в точке z_0, то это равносильно утверждению, что она дифференцируема в точке z_0 и некоторой ее окрестности.

Из аналитичности следует дифференцируемость в точке. Из дифференцируемости не обязательно следует аналитичность функции в точке.

Свойства аналитичных функций:

если f_1 и f_2 аналитичны в области *D*, то:

1. $f_1 \pm f_2$ - аналитична в области D .

2. $f_1 \cdot f_2$ - аналитична в области D .

3. $\frac{f_1}{f_2}$ при условии, что $f_2 \neq 0$ аналитична в области *D*.

Аналитичные функции называют **регулярными функциями**.

§ 12. Элементарные функции комплексного переменного.

Функция $w = z^n, n \in N$ - степенная функция. Эта функция определена на всей комплексной плоскости z. Эта функция однозначна на всей комплексной плоскости z, она аналитична на всей комплексной области z, так как в любой точке

$$z \in D \ \exists (z^n)' = n \cdot z^{n-1}$$

Доказательство:

$$(z^n)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} \cdot \Delta z^2 + \ldots + \Delta z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}$$

$$w = \sqrt[m]{z} \text{ или } z^{\frac{1}{m}}, m \in N$$

Считаем, что функция:

1. Определена на части комплексной плоскости с

вырезом по отрицательной части вещественной

оси, то есть : $D\{-\pi < \arg z \leq \pi\}$

Вырез делается для того, чтобы существовал

арифметический корень.

2. Эта функция многозначная.

У функции можно выделить m-однозначных

ветвей, путей фиксирования k, в формуле

$$w = \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{|z|}e^{i}(\frac{\arg z}{m} + \frac{2\pi}{m} \cdot k), k = 0, 1 \ldots m-1$$

Можно определить комплексную функцию

$w = \sqrt[m]{z^n} = (z^{\frac{1}{m}})^n$ как суперпозицию степенных функций.

Эта функция будет определена на комплексной плоскости с вырезом, многозначной на этой плоскости с вырезом, у нее можно выделить однозначную ветвь при фиксированном k. На области с вырезом, все степенные функции аналитичны, причем их производные находятся по формуле: $(z^{\frac{n}{m}})' = \frac{n}{m} \ z^{\frac{n}{m}-1}$

Показательная функция

Показательная функция комплексного переменного, для $\forall z = x + iy$ определяется следующим образом: $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

1. При $z = x + i0 \equiv x$ имеем, что $e^z \to e^x$
2. $e^{z_2} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

Доказательство:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad => \quad e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \qquad\quad e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

Перемножим $e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cdot \cos y_2 - \sin y_1 \cdot \sin y_2) +$$

$$+ i(\sin y_1 \cdot \cos y_2 + \cos y_1 \cdot \sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) \overset{def}{=} e^{z_1+z_2}$$

3. Функция аналитична во всей комплексной

плоскости, причем $(e^z)' = e^z$

<u>Доказательство</u>:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v} \text{ для}$$

$\forall z = x + iy$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

$e^x \cos y$ - непрерывна для $\forall x,y$.
Частные производные непрерывны для $\forall x,y$, как произведение непрерывных функций. Значит функции u и v – дифференцируемы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

То есть выполняются условия Коши-Римана. Тогда функция $f(z)$ дифференцируема в любой точке z в силу теоремы «необходимое и достаточное условие дифференцируемости».

Следовательно, функция аналитична на всей комплексной плоскости.

Покажем, что $(e^z)' = e^z$

Так как $$e^z = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y =$$

$$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

4. В отличие от функции действительного переменного, показательная функция комплексного переменного – периодическая

функция e

наименьшим периодом $2\pi i$.

$$e^{z+2\pi ik} = (\text{по свойству } 2\,) = e^{z} \cdot e^{2\pi ik} =$$

$$= e^{z} \cdot e^{i2\pi k} = e^{z}(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = e^{z}$$

$$k = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots$$

Показательная функция является однозначной.

<u>Логарифмическая функция</u>

Пусть дано к.ч. $z = x + iy$. Логарифмом к.ч.

называется к.ч. $w = u + iv : e^{w} = z$.

Если каждому к.ч $z = x + iy$ поставлено в соответствие к.ч. $w = u + iv$ таким образом, что $e^w = z$, то говорят, что задана логарифмическая функция $w = \mathrm{Ln} z$.

Логарифмическая функция $w = \ln z$ определена в комплексной области с вырезом по вещественной оси.

1. D – область определенная $(-\pi < \arg z < \pi)$

2. Найдем выражение для логарифмической функции

Так как $w = u + iv \Rightarrow e^{w} = e^{u}(\cos v + i\sin v)$,

тогда $e^{w} = z \Rightarrow e^{u}(\cos v + i\sin v) =$

$$= |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$$

Два к.ч. равны, когда $e^{u} = |z|$ (1), а аргументы

отличаются на $2\pi k$: $v = \arg + 2\pi k;\ k = 0 \pm 1 \ldots$

Логарифмируя (1) имеем:

$$u = \ln|z|$$

$$v = \arg z + 2\pi k,\ k = 0 \pm 1 \ldots$$

С учетом этого:

$$w = \mathrm{Ln} z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi i k,\ k = 0 \pm 1 \ldots$$

Из формулы видно, что логарифмическая функция неоднозначна, из нее можно выделить однозначную ветвь фиксируя k.

Ветвь, полученная при $k = 0$ называется главным значением логарифма.

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z;\ -\pi < \arg z < \pi$$

Ветвей у логарифмической функции бесчисленное множество.

Любая однозначная ветвь логарифмической функции аналитична на области с вырезом.

Тригонометрические ФКП

По определению:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

1. Тригонометрические функции определены при любом комплексном z.

2. При $z = x$, $y = 0$ они совпадают с обычными

функциями действительного переменного.

$$\cos z \Rightarrow \cos x; \sin z \Rightarrow \sin x$$

3. Эти функции аналитичны во всей комплексной

плоскости, причем $(\cos z)' = -\sin z$; $(\sin z)' = \cos z$

Доказательство

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{(e^{iz})' - (e^{-iz})'}{2i} =$$

$$= \frac{e^{iz} i - e^{-iz}(-i)}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$\sin z$ и $\cos z$ - 2π периодичны.

$$(\cos z + 2\pi k) = \frac{e^{i(z+2\pi k)} + e^{-i(z+2\pi k)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{iz+2\pi ik} + e^{-iz-2\pi ik}}{2} =$$

В силу $2\pi i$ – периодичности показательной функции

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

5. Функции комплексного переменного $\sin z$, $\cos z$

обращаются в ноль только на действительной оси.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Решим уравнение

$$\cos z = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0$$

Все выражение умножим на $e^{iz} \neq 0$

$$e^{2iz} + 1 = 0 \Rightarrow e^{2iz} = -1$$

Прологарифмируем полученное выражение

$$2iz = \ln(-1) = \ln(-1) + i\arg(-1) + 2\pi ik$$

Раскрывая получим

$$2iz = i(\pi + 2\pi k), k = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0 \pm 1 \ldots$$

То есть косинус обращается в ноль только в точках

действительной оси.

Синус тоже обращается в ноль в точках

действительной оси.

6. Функции sin, cos действительного переменного

<1.

Для ФКП это не так. $|\cos z|, |\sin z|$ могут быть >1.

В комплексной области $\sin z$ и $\cos z$ могут

превышать 1.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} = \frac{(\cos x + i\sin x)e^{-y} + (\cos x - i\sin x)e^{y}}{2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot ch\, y}{2} - i\frac{\sin x \cdot sh\, y}{v}$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \cdot ch^2 y + \sin^2 x \cdot sh^2 y}$$

cos *x*, sin *x* - не могут быть >1.

ch *y*, sh *y* – могут быть >1, поэтому $|\cos z| > 1$

sin *z* может быть >1.

Для тригонометрической ФКП выполняются

следующие тригонометрические тождества

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$ (по определению)

$$2 \sin z \cos z = \sin 2z$$

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

Тригонометрические функции являются однозначными.

Общепоказательные и общестепенные функции.

Определение.

Для любого комплексного числа a и переменной z, комплексная функция, определенная как $a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}$ называется общепоказательной функцией.

$z^a = e^{a\mathrm{Ln}z}$ - общестепенная функция.

Эти функции определены на комплексной плоскости с вырезом по отрицательной части действительной оси, являются многозначными функциями. Значения их находятся по приведенным выше формулам.

Можно определить:

$$tg\,z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad ch\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$ctg\,z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad sh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Обратные тригонометрические функции.

Если каждому комплексному числу z поставлено в соответствие комплексное число w:

$$\cos w = z (\sin w = z)$$

то комплексное число w называется

$\arccos z (\arcsin z)$ и обозначается

$$w = \operatorname{Arccos} z (w = \operatorname{Arcsin} z)$$

<u>**Определение.**</u> **(обратных тригонометрических функций)**

Функции $\operatorname{Arccos} z$ и $\operatorname{Arcsin} z$ определяются как обратные функции $\cos z$ и $\sin z$ соответственно, то есть :

$$w = \operatorname{Arccos} z, \text{ если } z = \cos w$$

$$w = \operatorname{Arcsin} z, \text{ если } z = \sin w$$

Пусть $w = \operatorname{Arccos} z$, тогда по определению

$$z = \cos w, \text{ то } z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

Или умножая обе части равенства на $-2e^{iw}$

и, перенося все слагаемые в левую часть,

получаем:

$$e^{2iw} - e^{2iw} + 1 = 0$$

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 + 1}$$

$$w = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) = -i\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

Из формулы следует, что $\operatorname{Arc}\cos z$ - функция бесконечнозначная.