Лекция №2. Обратная матрица.

Матричный способ решения линейной системы уравнений.

Формулы Крамера.

Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется обратной матрицей для данной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (единичная матрица)

Если $\Delta \neq 0$, то матрица A неособенная (невырожденная).

Если $\Delta = 0$, то матрица A особенная (вырожденная).

Всякая неособенная матрица A имеет обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$

$A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nn}$ - алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы.

Найти матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

=> матрица A невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1}.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Матричный способ решения линейной системы уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B$

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Матричный способ решения линейной системы уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta}$$

Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x - y + 2z = 3, \\ 3x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 10 & -5 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 10 & -5 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = 1, y = 1, z = 1.$$

Формулы Крамера.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Решить по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9, \\ 5x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

$$\Delta_{X_1} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -21$$

$$\Delta_{X_2} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -42$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{X_1}}{\Delta} = \frac{(-21)}{(-21)} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{X_2}}{\Delta} = \frac{(-42)}{(-21)} = 2$$

Ранг матрицы.

Теорема Кронекера-Капелли.

Метод Гаусса.

Квадратная матрица A^{-1} порядка n – обратная матрица для данной матрицы А, если $A^{-1} = A^{-1}A=E$ – единичная матрица

Если Δ≠0, то матрица А неособенная (невырожденная).

Если Δ=0, то матрица А особенная (вырожденная).

Всякая неособенная матрица А имеет обратную матрицу A^{-1}=

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделить в матрице k строк и k столбцов (k≤min(m,n))
Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов составить определитель k-го порядка.

Ранг матрицы r(A) – наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля.
0≤r(A)≤min(m;n)

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы – базисный.

Свойства ранга матрицы

- При транспонировании матрицы её ранг не меняется
- Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
- Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

- Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной.
- Система, имеющая только одно решение, называется определённой.
- Система, имеющая более одного решения называется неопределённой.
- Система, не имеющая ни одного решения называется несовместной.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
$$

$$
\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} - \text{\textit{расширенная матрица}}
$$

- Теорема Кронекера-Капели: система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

- Теорема: Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

- Теорема: Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений.

- Найти ранг основной и расширенной матриц системы. Если $r(\tilde{A}) \neq r(A)$, то система несовместна.
- Если $r(\tilde{A})=r(A)=r$, то система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют главными и оставляют слева, а остальные $n-r$ неизвестных называют свободными и переносят в правые части уравнений.
- Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получить общее решение системы (множество всех решений).
- Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных.
- Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Исключим с помощью первого уравнения неизвестную x_1 из остальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a_{11}}{a_{11}}x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \frac{a_{21}}{a_{21}}x_1 - \frac{a_{11}}{a_{11}}x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{2n}}{a_{21}}x_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_2}{a_{21}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1k}^1 x_k + \ldots \\ \frac{a_{m1}}{a_{m1}}x_1 - \frac{a_{11}}{a_{11}}x_1 + \frac{a_{m2}}{a_{m1}}x_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{mn}}{a_{m1}}x_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_m}{a_{m1}}. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + \ldots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1, \\ a_{22}^1 x_2 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}^1 x_2 + \ldots + a_{mn}^1 x_n = b_m^1. \end{cases}$$

Аналогично исключим с помощью второго уравнения неизвестную x_2 из остальных уравнений и т. д. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + \ldots + a_{1k}^1 x_k + \ldots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1, \\ x_2 + \ldots + a_{2k}^2 x_k + \ldots + a_{2n}^2 x_n = b_2^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + \ldots + a_{kn}^k x_n = b_k^k. \end{cases}$$

$$\begin{matrix} Если \\ m=n \end{matrix}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, то \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + \ldots + a_{1k}^1 x_k + \ldots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1, \\ x_2 + \ldots + a_{2k}^2 x_k + \ldots + a_{2n}^2 x_n = b_2^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + \ldots + a_{kn}^k x_n = b_k^k. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + \ldots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1, \\ x_2 + \ldots + a_{2n}^2 x_n = b_2^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_n^n. \end{cases}$$

И тогда: $x_n = b_n^n$. Подставляя это значение в предпоследнее уравнение системы найти x_{n-1}. Подставляя найденные значения в предыдущие уравнения системы найти x_{n-2} и т. д. Итак, система будет иметь единственное решение.

$$\text{Если } m \neq n \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

переносим слагаемые в _ правую часть уравнений, получим :

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + \ldots + a_{1k}^1 x_k + \ldots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1, \\ x_2 + \ldots + a_{2k}^2 x_k + \ldots + a_{2n}^2 x_n = b_2^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + \ldots + a_{kn}^k x_n = b_k^k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + \ldots + a_{1k}^1 x_k = b_1^1 - a_{1k+1}^1 x_{k+1} \ldots - a_{1n}^1 x_n, \\ x_2 + \ldots + a_{2k}^2 x_k + \ldots + a_{2n}^2 x_n = b_2^2 - a_{2k+1}^2 x_{k+1} - \ldots - a_{2n}^2 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + \ldots + a_{kn}^k x_n = b_k^k - a_{kk+1}^k x_{k+1} - \ldots - a_{kn}^k x_n. \end{cases}$$

Значения x_1, x_2, …, x_k выражаются через значения неизвестных x_{k+1}, …, x . Такая система имеет бесконечно много решений.